

Метод скоростного градиента в обратной задаче Стокера для синхронной электрической машины*

С. А. Плотников^{1,2,3}, А. Л. Фрадков^{1,2,3}, А. И. Шепелявый¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, В. О., Большой пр., 61

³ Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО),
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Для цитирования: Плотников С. А., Фрадков А. Л., Шепелявый А. И. Метод скоростного градиента в обратной задаче Стокера для синхронной электрической машины // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 111–118. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.112>

Рассматривается задача об управлении числом проскальзываний циклов ротора электрической машины с помощью воздействия внешнего момента на примере одной простой математической модели. Для ее решения применяется метод скоростного градиента с целевой функцией, определяемой функцией энергии колебаний. Особенностью данного подхода является возможность использования достаточно малого управления, что способствует сбережению энергии. Строится алгоритм управления колебаниями ротора электрической машины, при использовании которого совершается заданное число проскальзываний циклов. Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: задача Стокера, алгоритм скоростного градиента, управление энергией, электрические машины.

1. Введение. Использование природных ресурсов часто связано с преобразованием одних видов энергии в другие. Электрические машины (ЭМ), которые и служат устройствами для такого преобразования, имеют уникальное значение в современном мире. Исследование ЭМ, включающее в себя большое число различных задач, имеет важное прикладное значение. Одной из таких задач является исследование переходных процессов. На практике характеристики переходных процессов существенны и определяют работоспособность системы в целом. Число проскальзываний циклов, отслеживающее изменения выходной переменной, кратное периоду входящей в систему нелинейности, является одной из наиболее информативных характеристик переходных процессов.

Задача оценки числа проскальзываний циклов впервые была сформулирована и решена Дж. Стокером [1] для системы, описывающей затухающие движения маятника. Она заключалась в определении области начальных данных, при которых

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-08-01728, 17-08-00715), СПбГУ (тема 6.38.230.2015) и Правительства Российской Федерации (грант № 074-U01).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

маятник совершает заданное число оборотов вокруг точки подвеса. Дальнейшие работы были сфокусированы на решении данной задачи для многомерных непрерывных систем [2–7] и многомерных дискретных фазовых систем [8, 9].

В данной работе ставится новая задача, которую можно назвать обратной задачей Стокера: построить закон управления для обеспечения заданного числа проскальзываний циклов при любых начальных условиях. Предлагается подход к решению, основанный на управлении энергией колебаний ротора и применении метода скоростного градиента. Изложение ведется на примере одной сравнительно простой математической модели синхронной ЭМ, полученной на основе уравнений Лагранжа–Максвелла в [10]. Отметим, что смысл проскальзывания циклов для рассматриваемой системы в дальнейшем поясняется подробнее и иллюстрируется при численном моделировании на примере. Существует большое число различных моделей ЭМ. Наш выбор определился под влиянием имеющегося опыта построения и исследования таких моделей [10–13].

Для решения поставленной задачи находит применение алгоритм скоростного градиента [14, 15], который позволяет управлять энергией систем при использовании сколь угодно малого управления при отсутствии диссипации, а также ограниченного управления при ее наличии.

Алгоритм скоростного градиента хорошо известен и успешно применяется для управления линейными и нелинейными колебательными системами [16, 17], в задачах адаптивного управления [18], для обеспечения синхронизации в сетях из динамических систем [19, 20]. Однако в задачах управления для рассматриваемого класса систем, по-видимому, этот алгоритм применяется впервые.

2. Описание математической модели. Рассмотрим безразмерную математическую модель синхронного двигателя, описанную в [10] в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_r x + sy + 1, \\ \dot{y} &= -\alpha_r y - sx, \\ \dot{\theta} &= s, \\ \dot{s} &= \delta(\alpha_r by - u_f \sin \theta + M). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь безразмерные переменные x , y – квазитоки в обмотках статора, θ – угол нагрузки, представляющий собой разность угла поворота вектора магнитного поля статора и угла поворота магнитной оси рамки (ротора), s – скольжение контура с током относительно внешнего магнитного поля; безразмерные параметры: α_r – сопротивление роторных обмоток, δ – электромеханическая постоянная, обратно пропорциональная моменту инерции ротора, b – потокоцепление, u_f – напряжение на обмотке возбуждения, M – момент внешней нагрузки на валу ротора, который будет использоваться в качестве управления.

Малость параметра δ лежит в основе следующего подхода к дальнейшему упрощению системы (1) при изучении колебаний ротора двигателя. Этот подход состоит в «замораживании» медленной механической переменной s в уравнениях для быстрых электрических переменных x , y и переходе в последнем из уравнений к значению y в стационарном режиме, т. е. к следующей нелинейной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= s, \\ \dot{s} &= -\delta \left(\frac{\alpha_r bs}{\alpha_r^2 + s^2} + u_f \sin \theta - M \right). \end{aligned} \tag{2}$$

3. Синтез алгоритма управления. Целью работы является построение алгоритма управления, обеспечивающего выполнение заданного числа проскальзываний циклов, а затем колебание ротора с желаемой амплитудой изменения угла нагрузки, которая определяется выбором некоторого постоянного уровня энергии. Для решения поставленной задачи применим алгоритм скоростного градиента, описанный в работах [14, 15].

Введем следующее обозначение:

$$\varphi(s) = \frac{\alpha_r bs}{\alpha_r^2 + s^2}. \quad (3)$$

В результате замены исходная система (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= s, \\ \dot{s} &= -\delta(\varphi(s) + u_f \sin \theta - M). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что при $\varphi(s) \equiv 0$ и нулевом управлении $M(t) \equiv 0$ уравнения системы (4) описывают движение математического маятника. Данная система является консервативной, т. е. полная энергия системы постоянна. Ненулевой член $\varphi(s)$ в системе (4) приводит к диссипации, т. е. к рассеиванию энергии. С помощью управления можно компенсировать диссипацию $\varphi(s)$, сделав замену

$$u = M - \varphi(s),$$

которая приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= s, \\ \dot{s} &= -\delta(u_f \sin \theta - u), \end{aligned} \quad (5)$$

а для управления энергией консервативной системы (5) применить алгоритм скоростного градиента.

Рассмотрим полную энергию системы (5) при отсутствии управления. Ее можно представить в виде суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$W = W_k + W_p = \frac{s^2}{2} + \delta u_f (1 - \cos \theta). \quad (6)$$

Пусть W^* — желаемый уровень энергии колебаний. Введем следующую целевую функцию:

$$Q = (W - W^*)^2. \quad (7)$$

Найдем производную целевой функции Q в силу системы (5):

$$\dot{Q} = 2(W - W^*) \left(\frac{\partial W}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = 2(W - W^*) (\dot{s} + \delta u_f \dot{\theta} \sin \theta) = 2\delta(W - W^*) s u.$$

Вычисляя градиент по управлению от производной целевой функции

$$\nabla_u \dot{Q} = 2\delta(W - W^*) s,$$

получим следующий закон управления:

$$u = u_0 - \gamma s (W - W^*),$$

где u_0 — некоторое начальное (опорное) значение управления, а γ — коэффициент усиления. Тогда алгоритм управления энергией исходной системы (2) будет выглядеть следующим образом:

$$M = \varphi(s) + u_0 - \gamma s (W - W^*) = u_0 + \frac{\alpha_r bs}{\alpha_r^2 + s^2} - \gamma s \left(\frac{s^2}{2} + \delta u_f (1 - \cos \theta) - W^* \right). \quad (8)$$

Положим $u_0 = 0$ и рассмотрим в качестве функции Ляпунова целевую функцию (7). Найдем ее производную в силу замкнутой системы (2), (8):

$$\dot{Q} = -2\gamma\delta(W - W^*)^2 s^2 \leq 0.$$

Производная целевой функции равна нулю, если либо $W = W^*$, что означает достижение цели управления, либо $s = 0$. Во втором случае получим в замкнутой системе (2), (8) равенство $\theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $s = 0$, т. е. система находится в положении равновесия. Для того чтобы «вытолкнуть» систему из положения равновесия, используется ненулевое значение начального управления u_0 .

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Закон управления (8) обеспечивает либо достижение цели управления системой (2):*

$$W \rightarrow W^* \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где W — полная энергия системы (6), а W^* — желаемый уровень энергии, либо попадание траекторий системы в положения равновесия $s = 0$, $\theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом траектории замкнутой системы (2), (8) ограничены.

Найдем производную функции $\varphi(s)$ из равенства (3) по s :

$$\frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} = \alpha_r b \frac{\alpha_r^2 - s^2}{(\alpha_r^2 + s^2)^2} = \alpha_r b \frac{(\alpha_r - s)(\alpha_r + s)}{(\alpha_r^2 + s^2)^2},$$

отсюда следует, что функция $\varphi(s)$ ограничена по модулю величиной $0.5b$. Параметр γ в алгоритме управления (8) можно выбирать сколь угодно малым, поэтому управление (8) ограничено. Таким образом, предложенный алгоритм управления также решает задачу сбережения энергии.

Теперь перейдем непосредственно к задаче совершения заданного числа проскальзываний циклов. Для этого рассмотрим консервативную систему (5), описывающую движение математического маятника. Уровень энергии, при котором маятник находится в верхнем положении равновесия, равен $W_b = 2\delta u_f$. Значит, для совершения маятником оборотов необходимо довести энергию системы до уровня, превышающего это значение, т. е. $W^* > W_b$. Если же стоит задача о колебании ротора с заданной амплитудой изменения угла нагрузки, то в этом случае нужно выбирать $W^* < W_b$.

4. Моделирование. Рассмотрим систему (2) с параметрами $\alpha_r = 0.01$, $b = 4$, $u_f = 1$, $\delta = 0.1$ при следующих начальных условиях: $\theta(0) = \pi$, $s(0) = 0.01$. Тогда граничный уровень энергии равен $W_b = 0.2$.

Пусть стоит задача о совершении числа $n = 5$ проскальзываний циклов, после совершения которых ротор должен колебаться с желаемой амплитудой изменения угла нагрузки, определяемой следующим постоянным уровнем энергии: $W_o^* = 0.1$. Следовательно, в зависимости от угла нагрузки θ нужно выбирать различные целевые функции, а, значит, и разные алгоритмы управления. Для того чтобы число проскальзываний циклов росло, выберем желаемый уровень энергии больше граничного, например $W_r^* = 0.3$, тогда алгоритм управления будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} u = \varphi(s) - \gamma s (W - W_r^*), & \text{при } \theta < 2\pi n + \pi, \\ u = \varphi(s) - \gamma s (W - W_o^*), & \text{при } \theta > 2\pi n + \pi, \end{cases} \quad (9)$$

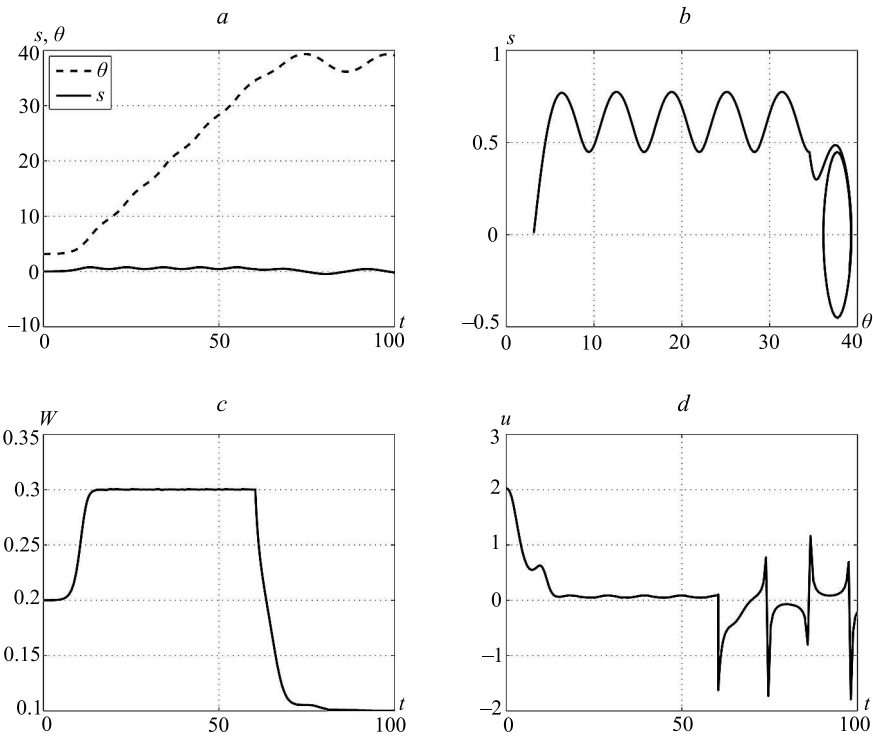


Рис. Управление энергией колебаний ротора ЭМ (2), (9): динамика вектора состояния (a); фазовая плоскость (b); динамика полной энергии системы (c); динамика управления (d). Параметры системы: $\alpha_r = 0.01$, $b = 4$, $u_f = 1$, $\delta = 0.1$, $n = 5$, $\gamma = 20$, $W_r^* = 0.3$, $W_o^* = 0.1$. Начальные условия: $\theta(0) = \pi$, $s(0) = 0.01$.

где функция $\varphi(s)$ выражается формулой (3), а коэффициент усиления γ выберем равным 20.

На рисунке представлены результаты моделирования работы предложенного алгоритма. Из рис. *a, b* видно, что примерно до 70 единиц времени угол нагрузки непрерывно растет, т. е. число проскальзываний циклов увеличивается, тогда как после 70 единиц времени ротор начинает совершать колебания с постоянной амплитудой изменения угла нагрузки. На рис. *c* представлена динамика полной энергии замкнутой системы (2), (9): в начале работы алгоритма уровень энергии становится равным 0.3, тогда как после совершения заданного числа проскальзываний циклов он равен 0.1, а значит цель управления достигается. На рис. *d* представлена динамика управления: управление является ограниченным.

Таким образом, предложенный алгоритм управления позволяет решить поставленную задачу.

5. Заключение. В данной работе был предложен алгоритм управления колебаниями ротора синхронной электрической машины для рассмотренной математической модели, разработанный на основе алгоритма скоростного градиента. При работе предложенного алгоритма сначала совершается заданное число проскальзываний циклов, а затем ротор колеблется с постоянной амплитудой. Особенностью предложенного алгоритма является малость управляющего воздействия, что позволяет так-

же решить задачу сбережения энергии. Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма.

Литература

1. *Stoker J. J.* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York: Interscience, 1950.
2. *Ершова О. Б., Леонов Г. А.* Частотные оценки числа проскальзываний циклов в фазовых системах автоматического регулирования // *АиТ.* 1983. № 5. С. 65–72.
3. *Али-Хабиб С., Морозов А. В., Шепелявый А. И.* Оценки числа проскальзываний циклов в системах синхронизации // *Матер. междунар. конф. и Чебышёвских чтений, посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышёва.* М., 1996. Т. 1. С. 16–19.
4. *Смирнова В. Б., Утина Н. В., Шепелявый А. И., Перкин А. А.* Частотные оценки числа проскальзываний циклов в фазовой системе с векторной нелинейностью // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. 2009. Вып. 1. С. 33–43.
5. *Перкин А. А., Перьева Е. Л., Смирнова В. Б., Шепелявый А. И.* Частотно-алгебраические оценки числа проскальзываний циклов для многомерных фазовых систем с дифференцируемыми нелинейностями // *Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр.* 2012. Вып. 42. С. 143–152.
6. *Smirnova V., Shepeljavyi A., Proskurnikov A., Perkin A.* Sharpened estimates for the number of slipped cycles in control systems with periodic differentiable nonlinearities // *Cybernetics and Physics.* 2013. Vol. 2, N 4. P. 222–231.
7. *Smirnova V. B., Perkin A. A., Proskurnikov A. V., Shepeljavyi A. I.* Estimation of cycle-slipping for phase synchronization systems // *Proc. of 21-st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems.* Groningen, Netherlands. 2014. P. 1244–1249.
8. *Утина Н. В.* Оценка снизу числа проскальзываний циклов в дискретных системах // *Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. 2003. Вып. 1. С. 46–55.
9. *Утина Н. В., Шепелявый А. И.* Задача Стокера для многомерных дискретных фазовых систем управления // *АиТ.* 2005. № 11. С. 65–73.
10. *Родюков Ф. Ф.* Математическая модель большой электроэнергетической системы. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
11. *Kondrat'eva N. V., Leonov G. A., Rodyukov F. F., Shepeljavyi A. I.* Nonlocal analysis of differential equations of induction motors // *Technische Mechanik.* 2001. Vol. 21, N 1. P. 75–86.
12. *Леонов Г. А., Кондратьева Н. В., Родюков Ф. Ф., Шепелявый А. И.* Нелокальный анализ дифференциальных уравнений асинхронной машины // *Нелинейная механика.* М.: Физматлит, 2001. С. 257–280.
13. *Леонов Г. А., Кондратьева Н. В.* Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.
14. *Фрадков А. Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // *АиТ.* 1979. № 9. С. 90–101.
15. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003.
16. *Andrievsky B. R.* Computation of the excitability index for linear oscillators // *Proc. 44th IEEE CDC–ECC, Seville.* 2005. P. 3537–3540.
17. *Plotnikov S., Andrievsky B.* Control of MEMS gyroscope oscillation using speed gradient algorithm // *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline).* 2013. Vol. 5, № 1. P. 1–4.
18. *Selivanov A., Fradkov A., Fridman E.* Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays // *J. Franklin Inst.* 2015. N 352. P. 52–72.
19. *Fradkov A. L., Andrievsky B. R.* Control of wave motion in the chain of pendulums // *Proc. 17th IFAC World Congress, Seoul.* 2008. P. 3136–3141.
20. *Guzenko P. Y., Lehnert J., Schöll E.* Application of adaptive methods to chaos control of networks of Rössler systems // *Cybernetics and Physics.* 2013. Vol. 2, N 1. P. 15–24.

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Плотников Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук; waterwalf@gmail.com

Фрадков Александр Львович — д-р техн. наук, проф.; fradkov@mail.ru

Шепелявый Александр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.; as@as1020.spb.edu

The speed-gradient algorithm in the inverse Stoker problem for a synchronous electric machine

S. A. Plotnikov^{1,2,3}, A. L. Fradkov^{1,2,3}, A. I. Shepeljavyi¹

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute for Problems of Mechanical Engineering, V. O., Bolshoy pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

³ St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverkskiy pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

For citation: Plotnikov S. A., Fradkov A. L., Shepeljavyi A. I. The speed-gradient algorithm in the inverse Stoker problem for a synchronous electric machine. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 111–118. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.112>

The problem of oscillation energy control of an electric machine rotor by means of an external moment is considered on the example of a simple mathematical model. The speed-gradient method is applied to solve this problem. The using of small or bounded control is a feature of this approach, which helps to save energy. The control algorithm of the rotor oscillations of an electric machine is developed, with the use of which a predetermined number of cycle slippings performs. The simulation results illustrate the efficiency of the suggested algorithm.

Keywords: Stoker problem, speed-gradient algorithm, energy control, electric machines.

References

1. Stoker J. J., *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems* (Interscience, New York, 1950).
2. Ershova O. B., Leonov G. A., “Frequency estimates of the number of cycle slippings in the phase control systems”, *Autom. Remote Control* **44**(5), 600–607 (1983).
3. Ali-Habib S., Morozov A. V., Shepeljavyi A. I., “Estimates of cycle slippings for synchronization systems”, *Materials intern. conf. and Chebyshev readings dedic. 175 year P. L. Chebyshev’s birthday* **1**, 16–19 (Moscow, 1996) [in Russian].
4. Smirnova V. B., Utina N. V., Shepeljavyi A. I., Perkin A. A., “Frequency estimates for the number of cycle slippings in a phase system with nonlinear vector function”, *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.* **42**(1), 28–36 (2009).
5. Perkin A. A., Per’eva E. L., Smirnova V. B., Shepeljavyi A. I., “Frequency-algebraic estimates of a number of slipped cycles for multidimensional phase systems with differentiable nonlinearities”, *Mechanics of Solids: Interdep. collect. sci. papers*, issue 42, 143–152 (2012) [in Russian].
6. Smirnova V., Shepeljavyi A., Proskurnikov A., Perkin A., “Sharpened estimates for the number of slipped cycles in control systems with periodic differentiable nonlinearities”, *Cybernetics and Physics* **2**(4), 222–231 (2013).
7. Smirnova V. B., Perkin A. A., Proskurnikov A. V., Shepeljavyi A. I., “Estimation of cycle-slipping for phase synchronization systems”, *Proc. of 21-st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 1244–1249 (Groningen, Netherlands, 2014).
8. Utina N. V., “Lower estimation of the number of cycle-slip periods of phase-locked loops in discrete systems”, *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.* **36**(1) (2003).
9. Utina N. V., Shepeljavyi A. I., “The Stoker problem for multidimensional discrete phase control systems”, *Autom. Remote Control* **66**(11), 1761–1767 (2005).
10. Rodyukov F. F., *Mathematical model of large-scale electric power system* (Publishing house of St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2006) [in Russian].
11. Kondrat’eva N. V., Leonov G. A., Rodyukov F. F., Shepeljavyi A. I., “Nonlocal analysis of differential equations of induction motors”, *Technische Mechanik* **21**(1), 75–86 (2001).
12. Leonov G. A., Kondrat’eva N. V., Rodyukov F. F., Shepeljavyi A. I., “Nonlocal analysis of differential equations of asynchronous machine, *Nonlocal Mechanics*, 257–280 (Physmatlit, Moscow, 2001) [in Russian].
13. Leonov G. A., Kondrat’eva N. V., *Stability analysis of electric machines of alternating current* (Publishing house of St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2008) [in Russian].

14. Fradkov A. L., “Speed-gradient scheme and its application in adaptive control problems”, *Autom. Remote Control* **40**(9), 1333–1342 (1979).
15. Fradkov A. L., *Cybernetical physics: From control of chaos to quantum control* (Springer, Heidelberg, Germany, 2007).
16. Andrievsky B. R., “Computation of the excitability index for linear oscillators”, *Proc. 44th IEEE CDC-ECC*, 3537–3540 (Seville, 2005).
17. Plotnikov S., Andrievsky B., “Control of MEMS gyroscope oscillation using speed gradient algorithm”, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* **5**(1), 1–4 (2013).
18. Selivanov A., Fradkov A., Fridman E., “Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays”, *J. Franklin Inst.* (352), 52–72 (2015).
19. Fradkov A. L., Andrievsky B. R., “Control of wave motion in the chain of pendulums”, *Proc. 17th IFAC World Congress*, 3136–3141 (Seoul, 2008).
20. Guzenko P. Y., Lehnert J., Schöll E., “Application of adaptive methods to chaos control of networks of Rössler systems”, *Cybernetics and Physics* **2**(1), 15–24 (2013).

Author’s information:

Plotnikov Sergei A. — waterwalf@gmail.com

Fradkov Alexander L. — fradkov@mail.ru

Shepeljavyi Alexander I. — as@as1020.spb.edu