УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 26D15

Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Для цитирования: *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 70–78. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.108

Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Установлено, что, если множество «резонансных точек» этих функций не пусты и выполнено так называемое «резонансное условие», то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, при которых множество резонансных точек функции $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ совпадает с множеством резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, но при этом

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Понятия «резонансная точка» и «резонансное условие» для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$ были введены автором в его предыдущих работах.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера.

Введение. Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Если выполняется

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

то согласно неравенству Гёльдера (см., например, [1, с. 232]) можем записать

$$\left| \int_{\mathbb{R}^1} \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}. \tag{1}$$

Если же выполняется

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1, \tag{2}$$

то произведение функций, стоящих под знаком интеграла в левой части неравенства (1), является функцией локально интегрируемой, но сам интеграл при этом может быть как ограничен, так и не ограничен. В докладе, сделанном автором на VIII Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и его приложения» [2], в терминах одного обобщения соответствующих понятий из классической теории резонанса были анонсированы условие ограниченности и одно условие неограниченности интеграла из левой части (1). Работа, посвященная условиям ограниченности, находится в печати. В настоящей статье рассматривается случай неограниченности.

Работа состоит из введения и трех параграфов. Первый параграф носит вспомогательный характер. Во втором — для любых пространств $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p_1, p \in (1, +\infty]$, и любой функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ вводится понятие (определение 2.1) множества «резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$» (в дальнейшем, «резонансное множество»). Оно является подмножеством $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и (пример 2.1) для каждого тригонометрического полинома относительно любого пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$, представляет собой множество частот (показателей Фурье) или спектр этого полинома. В § 3 вводится понятие «резонансное условие» (определение 3.1), которое (замечание 3.1) в случае тригонометрических многочленов соответствует понятию резонансного условия из классической теории резонанса.

Основное утверждение работы, составляющее содержание теорем 3.1 и 3.2 из § 3, состоит в следующем. Если числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, множества «резонансных точек» этих функций не пусты и выполнено «резонансное условие», то всегда можно указать такие сколь угодно малые в смысле нормы возмущения $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, при которых множество резонансных точек функции $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ совпадает с множеством резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, но при этом выполняется равенство

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Настоящая статья содержит § 1, § 2 и представляет собой первую часть работы; вторая часть, содержащая § 3, подготовлена к печати.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

- $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;
- $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$;
- $\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;
- $0 \in \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k$ — резонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ приводится);
- $\dfrac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^m \dfrac{1}{p_j}, \quad \dfrac{1}{s_k} + \dfrac{1}{r_k} = 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$

1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть функция $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} u(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^1)$ будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно имеет вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} v(y)\, dy.$$

Обозначим также через $S(\mathbb{R}^1)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^1)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Следуя [3, с. 30–32], поставим в соответствие каждой комплекснозначной локально интегрируемой на прямой функции γ линейный непрерывный функционал, определяемый следующим образом:

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \overline{\gamma(t)} \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^1).$$

Если $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, то, как известно (см., например, [4, с. 77]), функционал (γ, φ) принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^1)$.

Известно также [3, с. 213], что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^1)$, обозначаемый в соответствии с (3) через $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = 2\pi(f, \varphi)$.

В силу введенных выше обозначений известные формулы принимают вид

$$\begin{gathered} \{\delta(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = 1(y), \quad \{1(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = 2\pi\delta(y), \quad \{e^{i\lambda\tau}\}^{\widehat{}}(y) = 2\pi\delta(y - \lambda), \\ \{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y), \quad \{\widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y)\}^{\widetilde{}}(\tau) = \gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau), \end{gathered} \tag{4}$$

где δ — дельта-функция, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$.

Введем еще одно обозначение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$ и число $\rho > 0$ столь мало, что $a + \rho < b - \rho$. Обозначим через $\Omega(\tau, [a, b], \rho)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = \frac{1}{\rho^2} \xi_{[a,b]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y) * \xi_{[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]}(y),$$

где $\xi_M(y)$ — характеристическая функция множества $M \subseteq \mathbb{R}^1$.

Нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$0 \leqslant \widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \leqslant 1, \tag{5}$$

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 0, \quad y \notin (a - \rho, b + \rho), \tag{6}$$

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) = 1, \quad y \in [a + \rho, b - \rho], \tag{7}$$

$$\left| \frac{d}{dy} \widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \right| \leqslant \frac{2}{\rho}, \quad \left| \frac{d^2}{dy^2} \widehat{\Omega}(y, [a, b], \rho) \right| \leqslant \frac{1}{\rho^2}, \tag{8}$$

$$\Omega(\tau, [a, b], \rho) \in L^p(\mathbb{R}^1), \quad p \in [1, +\infty]. \tag{9}$$

2. Резонансные точки. В этом параграфе для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$, вводится понятие множества резонансных точек, являющееся (пример 2.1) естественным аналогом понятия множества частот (показателей Фурье) тригонометрического многочлена. Доказаны две леммы о свойствах множеств резонансных точек, а также рассмотрен ряд примеров, которые будут использованы в § 3.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$.

Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$.

Определение 2.1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется *нерезонансной точкой* функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются *резонансными точками* функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 2.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 2.1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Определим на $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ операцию сложения следующим образом. Суммой элементов $\omega_1, \omega_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ будем называть элемент из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, обозначаемый $\omega_1 + \omega_2$ и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

1) выражение $\infty + \infty$ не определено;

2) $\omega + \infty = \infty, \quad \omega \in \mathbb{R}^1$.

Введенную так операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем трех слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащие более одного символа ∞, считать не имеющим смысла.

Для $A, B, \ldots, C \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^1$ положим

$$A + B + \ldots + C = \{x \,|\, x = a + b + \ldots + c,\ a \in A,\ b \in B, \ldots, c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Отметим некоторые свойства множества резонансных точек.

Лемма 2.1. *Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$ и функция $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, тогда:*

1) для любого $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$,

$$\mathcal{R}\{c\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}; \tag{10}$$

2) для любых функций $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ выполняется включение

$$\mathcal{R}\{\gamma_1 + \gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}; \tag{11}$$

3) если $\omega \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathcal{R}\{e^{i\omega\tau}\gamma(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\omega\} + \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{12}$$

Доказательство. Первое и третье утверждения достаточно очевидны. Проверим второе.

Пусть точка $\omega_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$, $\omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Тогда можно указать такую функцию $\alpha_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$, что $\widehat{\alpha}_1(y) = \widehat{\gamma}_1(y)$ в некоторой окрестности точки ω_0 и функцию $\alpha_2 \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, преобразование Фурье которой $\widehat{\alpha}_2(y)$ совпадает с $\widehat{\gamma}_2(y)$ в некоторой окрестности точки ω_0. Но тогда $\widehat{\alpha}_1(y) + \widehat{\alpha}_2(y) = \widehat{\gamma}_1(y) + \widehat{\gamma}_2(y)$ в некоторой окрестности точки ω_0, то есть $\omega_0 \notin \mathcal{R}\{\gamma_1(\tau) + \gamma_2(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Следовательно, (11) выполняется.

Лемма 2.2. *Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$, функция $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Тогда, если существует V_u окрестность точки u, в которой*

$$\widehat{\gamma},\ \frac{d\widehat{\gamma}}{dy},\ \frac{d^2\widehat{\gamma}}{dy^2} \in L^1(V_u), \tag{13}$$

то $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Доказательство. Пусть V_u — окрестность точки $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$, в которой выполняется (13). Рассмотрим два случая.

1. Точка $u \in \mathbb{R}^1$. Тогда можно указать такое $\rho > 0$, что $(u - 3\rho, u + 3\rho) \subset V_u$. Обозначим (см. § 1) $\alpha_u(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$, откуда получим $\widehat{\alpha}_u(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$. Согласно (7) и (6) имеем $\widehat{\alpha}_u(y) = \widehat{\gamma}(y)$, если $y \in (u - \rho, u + \rho)$, и $\operatorname{supp} \widehat{\alpha}_u(y) \subseteq \operatorname{supp} \widehat{\gamma}(y) \cap [u - 3\rho, u + 3\rho] \subset V_u$. Так как в силу (8) функция $\widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)$ имеет ограниченные производные и согласно (5) ограничена, то из равенства

$$\alpha_u(\tau) = \{\widehat{\alpha}_u(y)\}\check{}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) \widehat{\Omega}(y, [u - 2\rho, u + 2\rho], \rho)\, dy,$$

используя (13), в результате двукратного интегрирования по частям получаем, что $\alpha_u(\tau) = O(1)/\tau^2$. Кроме того, функция α_u ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции. Следовательно, $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$ при любом $q \in [1, +\infty]$. Но тогда $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

2. Точка $u = \infty$. В этом случае можно указать такие $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a \leqslant b$, что в области $V_\infty = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ будет выполняется (13). Обозначим $\Omega_1(\tau) = \Omega(\tau, [a-2, b+2], 1)$ и $\alpha_\infty(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_1(\tau)]$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. В силу (4) будем иметь $\widehat{\alpha}_\infty(y) = \widehat{\gamma}(y) - \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}_1(y)$ и согласно (7) можем записать $\operatorname{supp} \widehat{\alpha}_\infty(y) \subseteq (-\infty, a - 1] \cap [b + 1, +\infty) \subset V_u$. Следовательно, с учетом (13), (5)–(8) в результате двукратного интегрирования по частям получаем равенство

$$\alpha_\infty(\tau) = \{\widehat{\alpha}_\infty(y)\}\check{}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_1(y)\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\tau^2} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \left\{\widehat{\gamma}''(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_1(y)\right] - 2\widehat{\gamma}'(y)\widehat{\Omega}_1'(y) - \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}_1''(y)\right\} dy = \frac{O(1)}{\tau^2}.$$

Кроме того, функция $\alpha_\infty(\tau)$ ограничена, так как в силу (13) выполняется неравенство

$$|\alpha_\infty(\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{V_\infty} |\widehat{\gamma}(y)|\, dy < +\infty.$$

Таким образом, $\alpha_\infty(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$ при любом $q \in [1, +\infty]$, то есть точка $u = \infty$ является нерезонансной. □

Следующий пример показывает, что координаты резонансных точек тригонометрических многочленов относительно любых пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$, являются частотами (или показателями Фурье) этих многочленов.

Пример 2.1. Пусть $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k \tau}$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$. Тогда согласно (4) можем записать $\widehat{\gamma}(y) = 2\pi \sum_{k=1}^n c_n \delta(y - \lambda_k)$, откуда в силу

(10), (11) и леммы 2.2 следует, что для любого $p \in (1, +\infty]$ справедливо равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\lambda_k\}.$$

Пример 2.2. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$, $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$ и имеется функция

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}. \tag{14}$$

Проверим это. Чтобы найти резонансное множество функции γ, найдем $\widehat{\gamma}$. Выберем произвольное конечное $y \neq 0$. В результате двукратного интегрирования по частям получаем

$$\widehat{\gamma}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}} = \frac{K_1}{y^2} + \frac{K_2}{y^3} \int\limits_0^\infty \frac{\sin y\tau \, d\tau}{(1 + \tau)^{3 + \frac{1}{p} + \delta}}, \tag{15}$$

где K_1, K_2 — некоторые константы. Таким образом, в окрестности каждой конечной ненулевой точки функция $\widehat{\gamma}(y)$ дважды непрерывно дифференцируема и, следовательно, по лемме 2.2 каждая конечная ненулевая точка является нерезонансной. Также по лемме 2.2 в силу выполнения (13) нерезонансной является и бесконечная точка.

Покажем, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}$. Если точка $y = 0$ нерезонансная, то существует V_0 — окрестность этой точки и функция $\alpha_0 \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_0(y)$, $y \in V_0$. Выберем столь малое число $\rho > 0$, что $[-3\rho, +3\rho] \subset V_0$, и обозначим $\Omega_0(\tau) = \Omega(\tau, [-2\rho, +2\rho], \rho)$, $\gamma_0(\tau) = \alpha_0(\tau) * \Omega_0(\tau)$. В силу определения функции $\alpha_0(\tau)$, числа $\rho > 0$ и свойств (6), (7) можем записать $\widehat{\gamma}_0(y) = \widehat{\alpha}_0(y)\widehat{\Omega}_0(y) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}_0(y),\ y \in \mathbb{R}^1$, $\widehat{\gamma}_0(y) = \widehat{\gamma}(y),\ y \in [-\rho, +\rho]$. Кроме того, так как согласно (9) $\Omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то в силу неравенства Юнга (см., например, [5, с. 42]) $\gamma_0 \in L^r(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим $\gamma_1(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_0(\tau)]$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Как видно из (15), функции

$$\widehat{\gamma},\ \frac{d\widehat{\gamma}}{dy},\ \frac{d^2\widehat{\gamma}}{dy^2} \in L^1(\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]).$$

Поэтому в результате двукратного интегрирования по частям с учетом (15), (5)–(8) получаем равенство

$$\gamma_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}_1(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_0(y)\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\tau^2} \int\limits_{\mathbb{R}^1 \setminus [-\rho, +\rho]} e^{iy\tau} \left\{\widehat{\gamma}''(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_0(y)\right] - 2\widehat{\gamma}'(y)\widehat{\Omega}_0'(y) - \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}_0''(y)\right\} dy = \frac{O(1)}{\tau^2}.$$

А так как функция γ_1 вдобавок ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции, то $\gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$. Следовательно, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$.

Но $\gamma \notin L^r(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, так как из неравенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$ следует $r(\frac{1}{p} + \delta) < 1$, то есть $\|\gamma\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} = \infty$. Таким образом, $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{0\}$.

Пример 2.3. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$, $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$; $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau}}{(1+|\tau|)^{\frac{1}{p}+\delta}}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\lambda\}.$$

Действительно, в силу (12), (14) и правила сложения в $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ имеем

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\left\{e^{i\lambda\tau}\frac{1}{(1+|\tau|)^{\frac{1}{p}+\delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} =$$

$$= \{\lambda\} + \mathcal{R}\left\{\frac{1}{(1+|\tau|)^{\frac{1}{p}+\delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\right\} = \{\lambda\} + \{0\} = \{\lambda\}.$$

Пример 2.4. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$ и $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$; $\mu \neq 0$ и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1+|\tau|)^{\frac{1}{p}+\delta}}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}. \tag{16}$$

Проверим это. Прежде всего отметим, что функция $\widehat{\gamma}$ дважды непрерывно дифференцируема. Действительно, можем записать

$$\widehat{\gamma}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau}\frac{e^{i\mu\tau^2}d\tau}{(1+|\tau|)^{\frac{1}{p}+\delta}} = 2\int\limits_0^\infty \frac{\cos y\tau\, e^{i\mu\tau^2}d\tau}{(1+\tau)^{\frac{1}{p}+\delta}} = 2\left[f_1(y) + f_2(y) + f_3(y)\right],$$

где

$$f_1(y) = \int\limits_0^2 \frac{\cos y\tau\, e^{i\mu\tau^2}d\tau}{(1+\tau)^{\frac{1}{p}+\delta}},$$

$$f_2(y) = \int\limits_2^\infty \cos y\tau \left[\frac{1}{\tau^{\frac{1}{p}+\delta}} - \left(\frac{1}{p}+\delta\right)\frac{1}{\tau^{\frac{1}{p}+\delta+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{p}+\delta\right)\left(\frac{1}{p}+\delta+1\right)\frac{1}{\tau^{\frac{1}{p}+\delta+2}}\right] e^{i\mu\tau^2}\, d\tau, \tag{17}$$

$$f_3(y) = \int\limits_2^\infty \cos y\tau \left[\sum_{k=3}^\infty (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{p}+\delta\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{p}+\delta+1\right)\ldots\left(\frac{1}{p}+\delta+k-1\right)\frac{1}{\tau^{\frac{1}{p}+\delta+k}}\right] e^{i\mu\tau^2}\, d\tau.$$

Функции f_1 и f_3, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим функцию f_2. Трижды проинтегрируем по частям интеграл, стоящий в правой части равенства (17), используя всякий раз замену

$$e^{i\mu\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{2i\mu\tau}\,d\,e^{i\mu\tau^2}.$$

Тогда полученное выражение окажется функцией дважды непрерывно дифференцируемой по переменной y и по лемме 2.2 все конечные точки будут для функции γ нерезонансными, т. е. $\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \{\infty\}$.

Покажем, что точка ∞ является резонансной. Допустим, что $\{\infty\} \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\}$. Тогда согласно определению 2.1 можно указать такие числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a \leqslant b$, и функцию $\alpha_\infty \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, что будет выполняться равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_\infty(y)$, $y \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Обозначим $\Omega_1(\tau) = \Omega(\tau, [a-2, b+2], 1)$, $\gamma_1(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega_1(\tau)$ и $\gamma_2(\tau) = \gamma(\tau) * [\delta(\tau) - \Omega_1(\tau)]$, где δ — дельта-функция. Так как $\widehat{\gamma}$ дважды непрерывно дифференцируема и $\widehat{\gamma}_1(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot \widehat{\Omega}_1(y)$, где в силу (6) $\operatorname{supp} \widehat{\Omega}_1(y) = [a-3,\ b+3]$, то в результате двукратного интегрирования по частям с учетом (5), (6) и (8) получаем

$$\gamma_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}_1(y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a-3}^{b+3} e^{iy\tau} \widehat{\gamma}(y) \widehat{\Omega}_1(y)\,dy = \frac{O(1)}{\tau^2}.$$

Кроме того, функция $\gamma_1(\tau)$ ограничена, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции, откуда $\gamma_1 \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Рассмотрим функцию γ_2. Согласно свойству (7) можем записать $1 - \widehat{\Omega}_1(y) = 0$, если $y \in [a-1,\ b+1]$, поэтому $\widehat{\gamma}_2(y) = \widehat{\gamma}(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_1(y)\right] = \widehat{\alpha}_\infty(y) \left[1 - \widehat{\Omega}_1(y)\right]$. Так как в силу (9) $\Omega_1 \in L^1(\mathbb{R}^1)$, получаем $\gamma_2(\tau) = \alpha_\infty(\tau) - \alpha_\infty(\tau) * \Omega_1(\tau) \in L^r(\mathbb{R}^1)$.

Следовательно, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Но по условию имеем $\frac{1}{p} + \delta < 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{r}$, откуда $r(\frac{1}{p} + \delta) < 1$, т. е. $\gamma \notin L^r(\mathbb{R}^1)$. Полученное противоречие показывает, что ∞ — это резонансная точка.

Пример 2.5. Пусть числа $p, s \in (1, +\infty]$ и $\delta > 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} + \delta < 1$; $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\mu \neq 0$ и

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{i\lambda\tau} e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}.$$

Тогда выполняется

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}.$$

Действительно, в силу (12), (16) и правила сложения в $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ имеем

$$\mathcal{R}\{\gamma_(\tau), L^s(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{e^{i\lambda\tau} \frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\} =$$

$$= \{\lambda\} + \mathcal{R}\{\frac{e^{i\mu\tau^2}}{(1 + |\tau|)^{\frac{1}{p} + \delta}}, L^s(\mathbb{R}^1)\} = \{\lambda\} + \{\infty\} = \{\infty\}.$$

Литература

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
2. *Ivanov B. F.* On the Hölder Inequality // Комплексный анализ и его приложения: материалы VIII Петрозаводской международной конференции (3–9 июля 2016). Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2016. С. 31–35.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: ФМ, 1959.
4. Функциональный анализ. Серия: Справочная математическая библиотека / под ред. С. Г. Крейна; М.: Наука, 1972.
5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Статья поступила в редакцию 25 мая 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Иванов Борис Филиппович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ivanov-bf@yandex.ru

On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. I

B. F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
Higher School of Technology and Energy, ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation

For citation: Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. Resonance case. I. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 70–78. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.108

Let $m \geqslant 2$, numbers $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ satisfy inequality

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

and functions $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. We prove that if the set of "resonance points" of each of these functions is not empty and so-called "resonance condition" holds as well then there are such arbitrary small (low norm) perturbations $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ that the resonance set of function $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ coincides with the resonance set of function γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ but

$$\left\| \int_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty.$$

Concepts of "resonance point" and "resonance condition" for functions from the spaces $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$ were introduced by the author in his earlier papers.

Keywords: the Hölder inequality.

References

1. Bourbaki N., *Integration. Measures, integration of measures* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
2. Ivanov B. F., "On the Hölder Inequality", *Complex analysis and applications. Materials of the VIII Petrozavodsk International Conference (3–9 June 2016)*, 31–35 (Petrozavodsk Univ. Press, Petrozavodsk, 2016) [in Russian].
3. Gelfand I. M., Shilov G. E., *The generalized functions and operations over them, the issue 1* (PhM, Moscow, 1959) [in Russian].
4. *Functional analysis.* In Ser. *The reference mathematical library* (ed. by S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].
5. Steyn I., Weiss G., *Introduction to the harmonious analysis on Euclidean spaces* (Mir, Moscow, 1974) [in Russian].

Author's information:

Ivanov Boris F. — ivanov-bf@yandex.ru