УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 34D10

Об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка при периодическом возмущении центра

А. А. Дороденков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Для цитирования: *Дороденков А. А.* Об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка при периодическом возмущении центра // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 44–50. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.105

Рассматривается дифференциальное уравнение вида $\ddot{x} + x^{2n}\mathrm{sgn}x = Y(t, x, \dot{x})$, где n — натуральное число, а правая часть есть малое периодическое по t возмущение, являющееся аналитической функцией в окрестности начала координат по переменным $x, \dot{x}$. Вводятся новые периодические функции по типу ляпуновских. С помощью них проводится исследование положения равновесия данного уравнения на устойчивость. Указываются достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, малые периодические возмущения, осциллятор.

1. Введение. В работе [1] А. М. Ляпунов изучил вопрос об устойчивости нулевого решения автономной системы двух уравнений в критическом случае двух нулевых собственных чисел с непростым элементарным делителем. В частности, он изучил устойчивость положения равновесия осциллятора $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$, где n — натуральное число, при малых автономных возмущениях. В работах [2, 3] были исследованы периодические по времени возмущения указанного осциллятора. Важно, что восстанавливающая сила $-x^{2n-1}$ является нечетной функцией.

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости положения равновесия осциллятора с нечетной восстанавливающей силой вида $-x^{2n}\mathrm{sgn}x$, где $1 < n$ — натуральное число, при малых периодических возмущениях. Случай $n = 1$ был рассмотрен автором ранее в работе [4]. Таким образом, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{2n}\mathrm{sgn}x = Y(t, x, \dot{x}), \tag{1.1}$$

где Y — достаточно гладкая по x, $\dot{x}$ нелинейность. Предполагается, что ее порядок малости не ниже $4n + 1$, если считать, что x имеет второй порядок, $\dot{x}$ — порядок $2n + 1$, функция Y непрерывна и периодична по t с периодом 2π.

Получены достаточные условия устойчивости нулевого решения, которые сформулированы в теоремах 1 и 2. При этом оказалось, что случаи четного и нечетного n отличаются друг от друга.

2. Предварительные преобразования. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1). Следуя подходу Ляпунова [1], введем координаты ρ, φ по формулам

$$x = \rho^2 C(\varphi), \quad y = -\rho^{2n+1} S(\varphi), \tag{2.1}$$

где $\rho > 0$, $(C(\varphi), S(\varphi))$ — решение системы

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = x^{2n}\mathrm{sgn}x$$

с начальными данными $C(0) = 1, S(0) = 0$. Так как функция $U(x,y) = (2n+1)y^2 + 2x^{2n+1}\mathrm{sgn}x$ есть интеграл данной системы, то справедливо тождество $(2n+1)S^2(\varphi) + 2C^{2n+1}(\varphi)\mathrm{sgn}C(\varphi) = 2$ и функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ — периодические с периодом 2ω; порядок их гладкости равен $2n+1$ и $2n$ соответственно. Так как кривая $U(x,y) = 2$ симметрична относительно осей x и y и начала координат, то $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$ являются четной и нечетной функциями соответственно и справедливы равенства

$$C(\varphi + \omega) = -C(\varphi), \quad S(\varphi + \omega) = -S(\varphi). \tag{2.2}$$

В эквивалентной уравнению (1.1) системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2n}\mathrm{sgn}x + Y(t, x, y) \tag{2.3}$$

выполним замену переменных (2.1) и получим

$$\dot{\rho} = -\frac{S}{2\rho^{2n}} Y(t, \rho^2 C, -\rho^{2n+1} S), \quad \dot{\varphi} = \rho^{2n-1} - \frac{C}{\rho^{2n+1}} Y(t, \rho^2 C, -\rho^{2n+1} S). \tag{2.4}$$

3. Случай четного n. Пусть n — четное число. Тогда, учитывая предположения для уравнения (1.1), функция Y в системе (2.3) примет вид $Y(t,x,y) = a(t)x^n y + Y^*$, где порядок малости Y^* не ниже $4n+2$ в указанном выше смысле. Отсюда следует, что система (2.4) запишется следующим образом:

$$\dot{\rho} = \frac{a}{2} C^n S^2 \rho^{2n+1} + O(\rho^{2n+2}), \quad \dot{\varphi} = \rho^{2n-1} + O(\rho^{2n}), \tag{3.1}$$

Лемма. *Существует замена переменных вида*

$$\rho = r + h_2(\varphi) r^2 + h_{2n+1}(t, \varphi) r^{2n+1}, \tag{3.2}$$

которая переводит систему (3.1) *в систему*

$$\dot{r} = g r^{2n+1} + O(r^{2n+2}), \quad \dot{\varphi} = r^{2n-1} + O(r^{2n}), \tag{3.3}$$

где g — *константа Ляпунова.*

Доказательство. Продифференцируем замену (3.2) по t с учетом систем (3.1), (3.3). Получим равенство

$$\dot{r}\left(1 + 2h_2 r + (2n+1)h_{2n+1} r^{2n}\right) + \frac{dh_2}{d\varphi}\left(r^{2n-1} + O(r^{2n})\right) r^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial h_{2n+1}}{\partial t} + \frac{\partial h_{2n+1}}{\partial \varphi}\left(r^{2n-1} + O(r^{2n})\right)\right) r^{2n+1} = \frac{a}{2} C^n S^2 r^{2n+1} + O(r^{2n+2}).$$

Приравнивая коэффициенты при r^{2n+1} и используя разложение

$$a(t)b(\varphi) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}(b - \bar{b}) + (a - \bar{a})b, \tag{3.4}$$

где черта сверху обозначает среднее значение, получим уравнение для определения коэффициентов замены (3.2)

$$g + \frac{dh_2}{d\varphi} + \frac{\partial h_{2n+1}}{\partial t} = \frac{\bar{a}}{2}\overline{C^n S^2} + \frac{\bar{a}}{2}\left(C^n S^2 - \overline{C^n S^2}\right) + \frac{C^n S^2}{2}(a - \bar{a}).$$

В качестве решения уравнения достаточно взять функции

$$g = \frac{\bar{a}}{2}\overline{C^n S^2}, \quad h_2 = \frac{\bar{a}}{2}\int (C^n S^2 - g)d\varphi, \quad h_{2n+1} = \frac{C^n S^2}{2}\int (a - \bar{a})dt. \tag{3.5}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если $\bar{a} < 0$, то нулевое решение уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво, если $\bar{a} > 0$, то оно неустойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(r) = \frac{1}{2}r^2. \tag{3.6}$$

Ее производная в силу системы (3.3) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = gr^{2n+2} + O(r^{2n+3}). \tag{3.7}$$

Асимптотическая устойчивость. Пусть $g < 0 \Leftrightarrow \bar{a} < 0$. Тогда из формул (3.6), (3.7) следует, что выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво. Учитывая формулы (3.2), (2.1), получим асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (1.1).

Неустойчивость. Пусть $g > 0 \Leftrightarrow \bar{a} > 0$. Тогда из формул (3.6), (3.7) следует, что выполнены все условия теоремы Ляпунова о неустойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (3.3) неустойчиво. Учитывая формулы (3.2), (2.1), получим неустойчивость нулевого решения уравнения (1.1).

4. Случай нечетного n. Пусть n — нечетное число. Тогда, учитывая предположения для уравнения (1.1), функция Y в системе (2.3) примет вид

$$Y(t, x, y) = a_1(t)x^n y + a_2(t)x^{2n+1} + a_3(t)y^2 + a_4(t)x^{n+1}y + Y^*, \tag{4.1}$$

где порядок малости Y^* не ниже $4n + 4$ в указанном выше смысле. Отсюда следует, что система (2.4) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{a_1}{2}C^n S^2 \rho^{2n+1} - \dfrac{1}{2}(a_2 C^{2n+1} + a_3 C S^2)\rho^{2n+2} + \dfrac{a_4}{2}C^{n+1}S^2\rho^{2n+3} + O(\rho^{2n+2}), \\ \dot{\varphi} = \rho^{2n-1} + a_1 C^{n+1} S\rho^{2n} - (a_2 C^{2n+2} + a_3 C S^2)\rho^{2n+1} + O(\rho^{2n+2}). \end{cases} \tag{4.2}$$

Лемма. *Существует замена переменных вида*

$$\rho = r + h_2(\varphi)r^2 + h_3(\varphi)r^3 + h_4(\varphi)r^4 + h_{2n+1}(t,\varphi)r^{2n+1} + \\ + h_{2n+2}(t,\varphi)r^{2n+2} + h_{2n+3}(t,\varphi)r^{2n+3}, \tag{4.3}$$

которая переводит систему (4.2) *в систему*

$$\dot{r} = gr^{2n+3} + O(r^{2n+4}), \quad \dot{\varphi} = r^{2n-1} + \Psi_2 r^{2n} + \Psi_{2n+1}r^{2n+1} + O(r^{2n+2}), \tag{4.4}$$

где g — константа Ляпунова,

$$\begin{aligned}&\Psi_{2n} = (2n-1)h_2 + a_1 C^{n+1} S,\\ &\Psi_{2n+1} = (2n-1)h_3 + (2n-1)(n-1)h_2^2 + 2na_1 C^{n+1} S h_2 - a_2 C^{2n+2} - a_3 S^2 C.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Доказательство. Продифференцируем замену (4.3) по t с учетом систем (4.2), (4.4). Получим равенство

$$\begin{aligned}&\dot r\,(1+O(r)) + \frac{dh_2}{d\varphi}\left(r^{2n-1} + \Psi_{2n} r^{2n} + \Psi_{2n+1} r^{2n+1} + O(r^{2n+2})\right) r^2 +\\ &\quad + \frac{dh_3}{d\varphi}\left(r^{2n-1} + \Psi_{2n} r^{2n} + O(r^{2n+1})\right) r^3 + \frac{dh_4}{dt}\left(r^{2n-1} + O(r^{2n})\right) r^4 +\\ &\quad + \left(\frac{\partial h_{2n+1}}{\partial t} + \frac{\partial h_{2n+1}}{\partial\varphi}\left(r^{2n-1} + O(r^{2n})\right)\right) r^{2n+1} +\\ &\quad + \left(\frac{\partial h_{2n+2}}{\partial t} + \frac{\partial h_{2n+2}}{\partial\varphi}(r^{2n-1} + +O(r^{2n}))\right) r^{2n+2} +\\ &\quad + \left(\frac{\partial h_{2n+3}}{\partial t} + \frac{\partial h_{2n+3}}{\partial\varphi}\left(r^{2n-1} + O(r^{2n})\right)\right) r^{2n+3} =\\ &\quad = \frac{a_1}{2} C^n S^2 r^{2n+1} + \left(\frac{2n+1}{2} a_1 h_2 C^n S^2 - \frac{a_2}{2} C^{2n+1} S - \frac{a_3}{2} S^3\right) r^{2n+2} +\\ &\qquad + \left(\frac{a_4}{2} C^{n+1} S^2 + G\right) r^{2n+3} + O(r^{2n+4}),\end{aligned}$$

где

$$G = \frac{(2n+1)a_1}{2} C^n S^2 h_3 + \frac{a_1 n(2n+1)}{2} h_2^2 C^n S^2 - (n+1)h_2(a_2 C^{2n+1} S + a_3 S^3).$$

Приравнивая коэффициенты при $r^{2n+1}, r^{2n+2}, r^{2n+3}$, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dh_2}{d\varphi} + \dfrac{\partial h_{2n+1}}{\partial t} = \dfrac{a_1}{2} C^n S^2,\\ \dfrac{dh_3}{d\varphi} + \dfrac{\partial h_{2n+2}}{\partial t} = \dfrac{2n+1}{2} a_1 h_2 C^n S^2 - \dfrac{a_2}{2} C^{2n+1} S - \dfrac{a_3}{2} S^3 - \dfrac{dh_2}{d\varphi}\Psi_{2n},\\ g + \dfrac{dh_4}{d\varphi} + \dfrac{\partial h_{2n+3}}{\partial t} = \dfrac{a_4}{2} C^{n+1} S^2 - \dfrac{dh_2}{d\varphi}\Psi_{2n+1} - \dfrac{dh_3}{d\varphi}\Psi_{2n} + G.\end{cases} \tag{4.6}$$

Свойство. *Среднее значение функции вида $C^p(\varphi)S^q(\varphi)$, где p, q — натуральные числа, из которых хотя бы одно нечетно, равно нулю.*

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi = \int_0^{\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi + \int_{\omega}^{2\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi.$$

Сделаем во втором интеграле правой части замену переменных $\varphi = \theta + \omega$, $0 \le \theta \le \omega$ и воспользуемся формулами (2.2). Получим соотношение

$$\int_0^{2\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi = \int_0^{\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi + (-1)^{p+q}\int_0^{\omega} C^p(\theta)S^q(\theta)d\theta.$$

Если только одно из чисел p, q нечетно, то свойство доказано. Если оба числа нечетны, то свойство будет доказано при условии, что интегралы в правой части запишем в виде

$$\int\limits_0^{\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi + \int\limits_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} C^p(\varphi)S^q(\varphi)d\varphi$$

и сделаем во втором интеграле правой части замену переменных $\varphi = \omega - \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\omega}{2}$.

Используя рассмотренное выше свойство и формулу (3.4), первое уравнение системы (4.6) запишем в виде

$$\frac{dh_2}{d\varphi} + \frac{\partial h_{2n+1}}{\partial t} = \frac{\bar{a}}{2}C^nS^2 + \frac{C^nS^2}{2}(a - \bar{a}),$$

откуда находим периодическое решение

$$h_2 = \frac{\bar{a}}{2}\int C^nS^2d\varphi, \quad h_{2n+1} = \frac{C^nS^2}{2}\int (a - \bar{a})dt.$$

Периодическое решение второго уравнения системы (4.6) находится аналогично, если предварительно разложить его правую часть по формуле (3.4). Покажем, что среднее значение функции, стоящей в правой части, как и в первом случае равно нулю. С помощью формул (3.5), (4.5) получим равенство

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{2}a_1h_2C^nS^2 - \frac{a_2}{2}C^{2n+1}S - \frac{a_3}{2}S^3 - \frac{dh_2}{d\varphi}\Psi_{2n} = \\ = \frac{2n+1}{4}\bar{a}_1a_1C^nS^2\int C^nS^2d\varphi - \frac{a_2}{2}C^{2n+1}S- \\ - \frac{a_3}{2}S^3 - \frac{2n-1}{4}\bar{a}_1^2C^nS^2\int C^nS^2d\varphi + \frac{\bar{a}_1a_1}{2}C^{2n+1}S^3. \quad (4.7)\end{aligned}$$

Используя вышеуказанное свойство, очевидно, что среднее значение функции, стоящей в правой части равенства (4.7), равно нулю. Периодическое решение третьего уравнения системы (4.6) находится как и в первом случае, если предварительно положить константу g равной среднему значению правой части, а затем воспользоваться разложением (3.4). При этом константа g, вообще говоря, ненулевая, так как среднее значение функции $\frac{a_4}{2}C^{n+1}S^2 \neq 0$ при $\bar{a}_4 \neq 0$. $\square$

Теорема 2. *Если в системе* (4.4) $g < 0$, *то нулевое решение уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво, если* $g > 0$, *то оно неустойчиво.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Может случиться так, что $g = 0$. Тогда следует взять замену переменных, аналогичную замене (4.3), но более общего вида. Получим систему уравнений более общего вида, аналогичную системе (4.6). Решая рекуррентно данную систему, последовательно найдем константы Ляпунова. Однако их количество будет ограничено, поскольку с некоторого момента гладкость функций h_i, где $i \geq 2n+1$, начнет уменьшаться и достигнет нуля. Дальнейшее нахождение констант Ляпунова не представляется возможным.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 272–331.

2. *Бибиков Ю. Н.* Устойчивость и бифуркация при переодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 3. С. 323–335.

3. *Бибиков Ю. Н., Савельева А. Г.* Периодические возмущения нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения, 2016. Т. 52, №4. С. 405–412.

4. *Дороденков А. А.* Устойчивость и бифуркация рождения инвариантных торов из положения равновесия существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 20–27.

Статья поступила в редакцию 12 августа 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Дороденков Александр Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; alex_math@mail.ru

On the stability of the zero solution of a differential equation of the second order under periodic perturbation of a center

A. A. Dorodenkov

St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”,
ul. Professora Popova, 5, St. Peterburg, 197376, Russian Federation

For citation: Dorodenkov A. A. On the stability of the zero solution of a differential equation of the second order under periodic perturbation of a center. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 44–50. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.105

Small periodic perturbations of the oscillator $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$ are considered, where $1 < n$ is a natural number, and the right-hand side is an analytic function in the origin neighborhood with variables $\dot{x}, x$. The equilibrium position of the given equation on stability is investigated. As a result, sufficient conditions for asymptotic stability and instability are formulated. In this work new periodic functions of the Lyapunov type are introduced. With their help, a transition to the system of equations is performed, similar to the transition to a system in polar coordinates. A system of two differential equations is obtained, the unknown functions of which are the amplitude and the “angular” variable. Then, polynomial change of variables in powers of the amplitude is made. The coefficients are periodic in time and “angular” variable functions. This replacement leads to a system of differential equations with a Lyapunov constant which in general is non-zero. Its sign determines the stability of the zero solution of the original equation. It is important that cases of even and odd n differ from each other. For an even n a non-zero Lyapunov constant can be found from one equation, and for an odd one it can be found from a system of three equations. The system is solved recurrently.

Keywords: asymptotic stability, small periodic perturbation, oscillator.

References

1. Lyapunov A. M., *Reseach of one of the special cases of the problem of stability of movement.* In: *Collected works* **2**, 272–331 (Publishing House of the Academy of Sciences, USSR, Moscow; Leningrad, 1956) [in Russian].

2. Bibikov Yu. N., “Stability and bifurcation under periodic perturbations of the equilibrium position of the oscillator of an infinitely large or infinitely small frequency”, *Math. Notes* **65**(3), 323–335 (1999) [in Russian].

3. Bibikov Yu. N., Savelyeva A. G., “Periodic perturbations of a non-linear oscillator”, *Differential Equations* **52**(4), 405–412 (2016) [in Russian].

4. Dorodenkov A. A., “Stability and bifurcation of a production of invariant tori from the equilibrium position of an essential nonlinear second order differential equation”, *Vestnik St. Petersburg University. Series 1*, Issue 4, 20–27 (2009) [in Russian].

Author’s information:

Dorodenkov Alexander A. — alex_math@mail.ru