УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1
MSC 41A15, 41A17, 41A44

Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов

О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 22–31. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.103

Пусть L_2 — пространство 2π-периодических функций, суммируемых с квадратом, $E(f,X)_2$ — наилучшее приближение функции f пространством X в L_2. При $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_2$ обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s вида

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right).$$

В работе дается описание всех пространств $\mathbb{S}_{B,n}$, для которых справедливо точное неравенство

$$E(f, \mathbb{S}_{B,n})_2 \leqslant \frac{1}{n^r}\|f^{(r)}\|_2.$$

При этом указываются подпространства размерности $2n-1$, реализующие ту же оценку. В качестве частных случаев получаются известные неравенства для приближения тригонометрическими многочленами и сплайнами.

Ключевые слова: наилучшее приближение, пространства сдвигов, точные константы.

1. Введение. ***1.1. Обозначения.*** В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества вещественных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно, $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$. Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Если $p \in [1,+\infty)$, то L_p — пространство измеримых 2π-периодических функций f, для которых выполняется неравенство

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < +\infty;$$

$W_p^{(r)}$ — пространство функций f из L_p, у которых производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p$; ℓ_p — пространство двусторонних последовательностей $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которых выполняется неравенство

$$\|a\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

Символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$$E(f,\mathfrak{N})_p = \inf_{T\in\mathfrak{N}} \|f-T\|_p$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N}\subset L_p$.

Коэффициенты Фурье функции f и дискретное преобразование Фурье набора $\{c_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются равенствами

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad \widehat{c_l} = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k e^{-\frac{ilk\pi}{n}}.$$

Запись $f(x)\sim\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ означает, что ряд в правой части есть ряд Фурье функции f.

При $n\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{n,\mu}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов порядка μ дефекта 1 по равномерному разбиению $k\pi/n$, $k\in\mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерное пространство тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$.

1.2. Обзор результатов. Для приближения тригонометрическими многочленами общеизвестно (см., например, [1, теорема 4.2.2]) неулучшаемое на классе $W_2^{(r)}$ неравенство

$$E(f,\mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r}\|f^{(r)}\|_2. \tag{1}$$

Неравенство (1) точно даже в смысле теории поперечников, то есть константа $1/n^r$ не может быть уменьшена за счет перехода к приближающему подпространству размерности не выше $2n$ (см., например, [1, теорема 8.1.3]). Его доказательство, основанное на равенстве Парсеваля, очень просто:

$$E^2(f,\mathcal{T}_{2n-1})_2 = 2\pi\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant n}} |c_k(f)|^2 = 2\pi\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant n}} \frac{\left|c_k(f^{(r)})\right|^2}{k^{2r}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{n^{2r}}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant n}} \left|c_k(f^{(r)})\right|^2 \leqslant \frac{1}{n^{2r}}\|f^{(r)}\|_2^2.$$

Аналогичные неравенства для приближений сплайнами были получены в [2] с помощью соотношений двойственности. В настоящей работе мы доказываем эти неравенства прямым способом, используя ортогональные базисы в пространствах сплайнов и тоже основываясь на равенстве Парсеваля. Более того, мы даем описание всех подпространств размерности $2n$ и $2n-1$, которые порождаются сдвигами одной функции на π/n и для приближения которыми справедлива оценка вида (1) с константой $1/n^r$. Мы также указываем широкую совокупность приближающих подпространств размерности $2n-1$, реализующих ту же оценку.

2. Пространства сдвигов. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $B\in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s, заданных на $\mathbb{R}$ и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x-\frac{j\pi}{n}\right), \tag{2}$$

а через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (2) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0. \tag{3}$$

Подставляя в (2) разложение функции B в ряд Фурье, получаем

$$s(x) \sim \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B) e^{il\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B) \widehat{\beta}_l e^{ilx} \sim \sum_{l=0}^{2n-1} \widehat{\beta}_l \Phi_{B,l}(x), \tag{4}$$

где

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Ясно, что $\Phi_{B,l} = \Phi_{B,l+2n}$, а условие (3) равносильно $\widehat{\beta_n} = 0$. Таким образом, пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=0}^{2n-1}$ (или, что то же самое, $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$) и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$. При $m \in [1:n]$ обозначим через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$.

Функции $\Phi_{B,l}$ ортогональны: $\langle \Phi_{B,l}, \Phi_{B,j}\rangle_{L_2} = 0$ при $l \neq j$, а

$$\frac{1}{2\pi} \|\Phi_{B,l}\|_2^2 = D_{B,l} = D_{B,n,l} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2.$$

Линейная независимость наборов $\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\}_{j=0}^{2n-1}$ и $\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\}_{j=1-n}^{n-1}$ равносильна тому, что функции $\Phi_{B,l}$ ненулевые при $l \in [1-n:n]$ и $l \in [1-n:n-1]$ соответственно. В этом случае системы $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Ортонормированные базисы образуют функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B,l}}}\Phi_{B,l}$.

Коэффициенты Фурье $\zeta_{B,l}(f)$ функции $f \in L_1$ по системе $\{\Phi_{B,l}\}$ выражаются через коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе формулой

$$\zeta_{B,l}(f) = \frac{1}{2\pi D_{B,l}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} e^{-i(l+2n\nu)t}\, dt = \frac{1}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(f).$$

Если функция $\Phi_{B,l}$ нулевая, договоримся считать $\zeta_{B,l}(f) = 0$. Выразим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ пространством $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ через коэффициенты Фурье:

$$E^2\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 = \left\| f - \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left\| \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 =$$
$$= 2\pi \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l(f)|^2 - \sum_{l=1-m}^{m-1} \frac{1}{D_{B,l}} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(f) \right|^2 \right). \tag{5}$$

Аналогичная формула справедлива и для $E(f, \mathbb{S}_{B,n})_2$.

Если B есть ядро Дирихле $D_{n-1}(t) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ikt}$, то $\mathbb{S}_{B,n} = \mathbb{S}_{B,n}^{\times} = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times} = \mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n} = 0$, а $\Phi_{B,l}$ при $|l| < n$ суть обычные экспоненты. Если же $B = D_n$, то $\mathbb{S}_{B,n}$ есть сумма $\mathcal{T}_{2n-1}$ и линейной оболочки функции $x \mapsto \cos nx$.

В случае, когда B есть B-сплайн

$$B_{n,\mu}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1} e^{ikt}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь и далее при $k = 0$ дробь считается равной 1), получаем, что $\mathbb{S}_{B,n}$ — это пространство сплайнов $\mathbf{S}_{n,\mu}$. Функции

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l} - 1}{i\frac{\pi}{n}}\right)^{\mu+1} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

образующие в нем ортогональный базис, называются *экспоненциальными сплайнами* (по принятому соглашению имеем $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x) = 1$). Линейную оболочку системы $\{\Phi_{B_{n,\mu},l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ обозначим через $\mathbf{S}_{n,\mu}^{\times}$. Экспоненциальные сплайны, вообще говоря, непериодические, введены в рассмотрение Шенбергом, основы теории и исторические комментарии содержатся в [3]. Ортогональность периодических экспоненциальных сплайнов отмечалась многими авторами; по-видимому, самые ранние работы на эту тему — [4, 5]. Пространства $\mathbf{S}_{n,\mu}^{\times}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ рассматривались Виноградовым [6, 7].

Далее нам понадобится условие принадлежности констант пространству сдвигов.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Пространство $\mathbb{S}_{B,n}$ содержит константы.

2. Функция $\Phi_{B,0}$ постоянна.

3. $c_0(B) \neq 0$, а $c_{2n\nu}(B) = 0$ при всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Импликация $2 \Rightarrow 1$ тривиальна, а утверждение $3 \Rightarrow 2$ сразу следует из определения $\Phi_{B,0}$. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 3$. Пусть $1 \in \mathbb{S}_{B,n}$. Тогда по формуле (4) для некоторого набора $\{\beta_j\}$ имеем $1 \sim \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\beta}_l c_l(B) e^{ilx}$. Следовательно,

$$\widehat{\beta}_l c_l(B) = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $c_0(B) \neq 0$, $\widehat{\beta_0} \neq 0$. Ввиду $2n$-периодичности $\widehat{\beta}$ при всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ будет $\widehat{\beta_{2n\nu}} \neq 0$, а тогда $c_{2n\nu}(B) = 0$, то есть верно утверждение 3. $\square$

3. Основные результаты. Следующая теорема дает описание всех пространств сдвигов, для приближения которыми справедлива оценка (1), в терминах коэффициентов Фурье функции B.

Теорема 1. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{6}$$

2. Коэффициенты Фурье функции B удовлетворяют условиям

$$c_l(B) \neq 0 \quad \textit{при всех} \quad |l| \in [0 : m-1], \tag{7}$$

$$c_{2n\nu}(B)=0 \quad \textit{при всех} \;\; \nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{8}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}}-\frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0 \quad \textit{при всех} \;\; |l|\in[1:m-1]. \tag{9}$$

При $m=n$ *левую часть неравенства* (6) *можно заменить на* $E(f,\mathbb{S}_{B,n})_2$.

Доказательство. Из первого утверждения теоремы следует, что пространство $\mathbb{S}^\times_{B,n,m}$ содержит константы, а тогда по лемме 1 верно условие (8). С другой стороны, из второго утверждения теоремы по лемме 1 тоже следует, что пространство $\mathbb{S}^\times_{B,n,m}$ содержит константы, поэтому в (6) достаточно рассматривать функции из $W_2^{(r)}$ с нулевым средним. Тогда, учитывая (5), неравенство (6) можно переписать в виде

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\left|c_l(f^{(r)})\right|^2}{l^{2r}} - \sum_{l=1-m}^{m-1}\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}\\ |l|+|\nu|\neq 0}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B)}}{(l+2n\nu)^r}c_{l+2n\nu}(f^{(r)})\right|^2 \leqslant \frac{1}{m^{2r}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|c_l(f^{(r)})\right|^2.$$

Отсюда видно, что если условие (7) не выполнено, то есть $c_l(B)=0$ при некотором l, $|l|<m$, то для функции $x\mapsto e^{ilx}$ (в комплексном пространстве L_2) неравенство (6) тоже не выполнено. В вещественном случае из $c_l(B)=0$ следует $c_{-l}(B)=0$, и потому неравенство (6) нарушается для функций $x\mapsto \cos(lx+\alpha)$.

Остается доказать равносильность утверждений теоремы при выполнении (7) и (8). Представив суммы в виде повторных, перепишем неравенство в виде

$$\sum_{l=1-n}^{n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |l|+|k|\neq 0}} \frac{\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2}{(l+2nk)^{2r}} - \sum_{l=1-m}^{m-1}\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}\\ |l|+|\nu|\neq 0}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B)}}{(l+2n\nu)^r}c_{l+2n\nu}(f^{(r)})\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m^{2r}}\sum_{l=1-n}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2.$$

Так как в l-м слагаемом участвуют коэффициенты только с номерами $l+2n\nu$, последнее неравенство равносильно системе

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |l|+|k|\neq 0}} \frac{\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}\\ |l|+|\nu|\neq 0}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(f^{(r)})}{(l+2n\nu)^r}\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m^{2r}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2, \quad |l|\leqslant m-1,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2}{(l+2nk)^{2r}} \leqslant \frac{1}{m^{2r}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|c_{l+2nk}(f^{(r)})\right|^2, \quad m\leqslant |l|<n \text{ и } l=n.$$

Неравенство при $l=0$, $m\leqslant |l|<n$ и $l=n$ очевидно, а при $1\leqslant |l|\leqslant m-1$ означает, что квадратичная форма

$$\langle A_l u,u\rangle_{\ell_2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}}-\frac{1}{m^{2r}}\right)|u_k|^2 - \frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B)}u_\nu}{(l+2n\nu)^r}\right|^2$$

неположительна. Здесь $u \in \ell_2$, а оператор $A_l\colon \ell_2 \to \ell_2$ определен формулой

$$(A_l u)_k = \left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}\right) u_k - \frac{c_{l+2nk}(B)}{(l+2nk)^r D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B) u_\nu}}{(l+2n\nu)^r}.$$

Неположительность квадратичной формы оператора A_l равносильна неположительности всех его собственных чисел, то есть тому, что система уравнений

$$\left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda\right) u_k - \frac{c_{l+2nk}(B)}{(l+2nk)^r D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B) u_\nu}}{(l+2n\nu)^r} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

не имеет положительных корней.

Если выполняется равенство $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B) u_\nu}}{(l+2n\nu)^r} = 0$, то

$$\left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda\right) u_k = 0$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$. При положительном λ выражение в скобках может обнулиться только при $k = 0$, откуда $u_k = 0$ при всех $k \neq 0$. Поэтому $u_0 \neq 0$, а тогда $c_l(B) = 0$, что противоречит условию.

Следовательно, имеем $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B) u_\nu}}{(l+2n\nu)^r} \neq 0$, а тогда и $\frac{1}{l^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda \neq 0$, поскольку $c_l(B) \neq 0$. Деля равенство (10) на $\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda$, умножая на $\frac{\overline{c_{l+2nk}(B)}}{(l+2nk)^r}$ и суммируя по всем целым k, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2nk}(B) u_k}}{(l+2nk)^r} - \frac{1}{D_{B,l}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{(l+2nk)^{2r}\left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda\right)} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_{l+2n\nu}(B) u_\nu}}{(l+2n\nu)^r}\right) = 0,$$

что равносильно

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{(l+2nk)^{2r}\left(\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda\right)}.$$

Перенеся члены в одну часть и приведя к общему знаменателю, преобразуем уравнение к виду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}} - \lambda} = 0. \tag{11}$$

При $\lambda > \frac{1}{l^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}$ все знаменатели в левой части (11) отрицательны, а на промежутке $\left(0, \frac{1}{l^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}\right)$ она строго возрастает по λ к $+\infty$. Поэтому отсутствие у нее положительных корней равносильно ее неотрицательности при $\lambda = 0$, то есть неравенству (9).

При $m = n$ ослабление утверждения 1 путем замены левой части неравенства (6) на $E(f, \mathbb{S}_{B,n})_2$ не нарушает вывода утверждения 2. $\square$

Дадим теперь легко проверяемое условие, достаточное для выполнения (9).

Теорема 2. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, а функция $B \in L_2$ такова, что*

$$\begin{aligned} c_l(B) &\neq 0 \quad \textit{при всех} \ \ |l| \in [\,0 : m-1], \\ c_{2n\nu}(B) &= 0 \quad \textit{при всех} \ \ \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ |l+2nk|^r |c_{l+2nk}(B)| &\leqslant |l|^r |c_l(B)| \quad \textit{при всех} \ \ |l| \in [1 : m-1],\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2.$$

Доказательство. По теореме 1 достаточно проверить условие (9). Пусть $|l| \in [1 : m-1]$. Так как при $k \neq 0$ знаменатели отрицательны, в силу соотношений (12) имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant |c_l(B)|^2 |l|^{2r} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left(\frac{l}{m} + \frac{2kn}{m}\right)^{2r}}.$$

Обозначим $\frac{l}{m} = y$, $\frac{n}{m} = a$; тогда $|y| < 1$, $a \geqslant 1$. Покажем, что выполняется неравенство

$$\Psi_{r,a}(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(y+2ka)^{2r}} \geqslant 0.$$

Очевидно возрастание $\Psi_{r,a}(y)$ по a, поэтому достаточно доказать, что

$$\Psi_r(y) = \Psi_{r,1}(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(y+2k)^{2r}} \geqslant 0.$$

Поскольку функция Ψ_r четна, можно ограничиться значениями $y \in [\,0,1)$. При $y = 1$ доопределим Ψ_r по непрерывности. Ясно, что справедливо соотношение

$$\Psi_1(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-(y+2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{y+2k+1} - \frac{1}{y+2k-1}\right) = 0$$

при всех y. Далее считаем, что $r \geqslant 2$.

Группируя члены с номерами k и $-k-1$, находим

$$\Psi_r(y) = \left(\frac{1}{1-y^{2r}} + \frac{1}{1-(2-y)^{2r}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+y)^{2r}-1} + \frac{1}{(2k+2-y)^{2r}-1}\right).$$

Убедимся, что функция

$$\varphi(y) = \frac{1}{1-y^{2r}} + \frac{1}{1-(2-y)^{2r}}$$

убывает на $[0,1]$. Обозначим $y = 1-t$, $t \in [\,0,1]$. Тогда неравенство

$$\varphi'(y) = \frac{2r\, y^{2r-1}}{(1-y^{2r})^2} - \frac{2r\,(2-y)^{2r-1}}{(1-(2-y)^{2r})^2} \leqslant 0$$

равносильно неравенству $(1-t)^{2r-1}((1+t)^{2r}-1)^2 - (1+t)^{2r-1}((1-t)^{2r}-1)^2 \leqslant 0$. Оно очевидно для $t = 1$. При $t \in [\,0,1)$ имеем

$$\begin{aligned}(1-t)^{2r-1}((1+t)^{2r}-1)^2 - (1+t)^{2r-1}((1-t)^{2r}-1)^2 = \\ = (1-t)^{2r-1}(1+t)^{2r-1}\times \\ \times\left((1+t)^{2r+1} - (1-t)^{2r+1} - 4t - \left(\frac{1}{(1-t)^{2r-1}} - \frac{1}{(1+t)^{2r-1}}\right)\right) =\end{aligned}$$

$$= 2(1-t)^{2r-1}(1+t)^{2r-1}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{r}\left(C_{2r+1}^{2k+1}-C_{2r+2k-1}^{2k+1}\right)t^{2k+1}-\sum_{k=r+1}^{\infty}C_{2r+2k-1}^{2k+1}t^{2k+1}\right)\leqslant 0.$$

Следовательно, можно записать

$$\Psi_r(y) > \lim_{y\to 1}\left(\frac{1}{1-y^{2r}}+\frac{1}{1-(2-y)^{2r}}\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}-1}=\frac{2r-1}{2r}-$$
$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{2r}-1}>\frac{2r-1}{2r}-\frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-1/4}=\frac{2r-1}{2r}-\frac{1}{2^{2r-2}}>0.$$

□

Замечание. Неравенство (6) обращается в равенство на функциях $x\mapsto e^{\pm imx}$ и их линейных комбинациях. Как отмечалось во введении, оно точно даже в смысле теории поперечников.

Стандартным приемом неравенство (6) можно усилить.

Следствие 1. *Пусть $B\in W_2^{(r)}$ в условиях теоремы 2 или второго утверждения теоремы 1. Тогда для любой функции $f\in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство*

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}\big)_2\leqslant\frac{1}{m^r}E\big(f^{(r)},\mathbb{S}_{B^{(r)},n,m}^{\times}\big)_2.$$

При $m=n$, кроме того, справедлива оценка

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,n}\big)_2\leqslant\frac{1}{n^r}E\big(f^{(r)},\mathbb{S}_{B^{(r)},n}\big)_2.$$

Доказательство. Пусть $s=\sum_{l=1-m}^{m-1}\zeta_{B^{(r)},l}(f^{(r)})\Phi_{B^{(r)},l}$ — элемент наилучшего приближения функции $f^{(r)}$ пространством $\mathbb{S}_{B^{(r)},n,m}^{\times}$. Заметим, что, поскольку $c_0(B^{(r)})=0$, функция s имеет нулевое среднее. Следовательно, для нее определена 2π-периодическая r-я первообразная, обозначим ее s_r. Ясно, что $s_r\in\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$. Применяя теорему к функции $f-s_r$, получаем

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}\big)_2=E\big(f-s_r,\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}\big)_2\leqslant\frac{1}{m^r}\big\|f^{(r)}-s\big\|_2=\frac{1}{m^r}E\big(f^{(r)},\mathbb{S}_{B^{(r)},n,m}^{\times}\big)_2.$$

Доказательство для приближения пространством $\mathbb{S}_{B,n}$ аналогично. □

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям теоремы 2 для всех $m\leqslant n$, могут служить функции с коэффициентами вида

$$c_k(B)=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k}-1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1}\gamma_k,\quad \mu\in\mathbb{Z}_+,\ \mu+1\geqslant r,$$

где $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$, $\gamma_l\neq 0$ при $|l|<n$. Если γ_k суть коэффициенты Фурье функции $K\in L_1$, то такая функция B есть среднее Стеклова порядка $\mu+1$ от K. Например, в качестве K можно взять ядро Пуассона ($\gamma_k=e^{-\alpha|k|}$, $\alpha>0$), ядро теплопроводности ($\gamma_k=e^{-\alpha k^2}$, $\alpha>0$), ядра некоторых дифференциальных операторов ($\gamma_k=1/P(ik)$,

P — многочлен, все нули которого вещественны), обобщенное ядро Бернулли ($\gamma_k = |k|^{-s}e^{-i\beta\,\mathrm{sign}\,k}$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$); в последних двух примерах полагаем $\gamma_0 = 1$.

В заключение выведем известные неравенства для приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами как частные случаи доказанных утверждений; при этом ограничимся формулировками для $m = n$.

Следствие 2. *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $r, n \in \mathbb{N}$, $\mu + 1 \geqslant r$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняются неравенства*

$$E\big(f, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2,$$

$$E\big(f, \mathbf{S}_{n,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2. \qquad (13)$$

(При $\mu+1 = r$ величины $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2$ и $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2$ следует трактовать как $\|f^{(r)}\|_2$.)

Доказательство. При $\mu+1 = r$ требуемые неравенства вытекают из теоремы 2, а при $\mu \geqslant r$ — из следствия 1, если взять $B = B_{n,\mu}$. $\square$

Неравенство (13) по сути известно, так как сразу следует из результатов [2].

Следствие 3. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство*

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E(f^{(r)}, \mathcal{T}_{2n-1})_2.$$

Следствие 3 общеизвестно (см. доказательство неравенства (1) во введении); оно получается и как частный случай следствия 1, если положить $B = D_{n-1}$ или $B = D_n$.

Литература

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
2. *Сунь Юншен, Ли Чунь.* Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Матем. заметки. Т. 48, №4. 1990. С. 100–109.
3. *Schoenberg I. J.* Cardinal Spline Interpolation. Philadelphia: SIAM, 2 ed., 1993.
4. *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes // Journal of Approximation Theory. Vol. 1. 1968. P. 26–65.
5. *Kamada M., Toriachi K., Mori R.* Periodic spline orthonormal bases // Journal of Approximation Theory. Vol. 55. 1988. P. 27–34.
6. *Виноградов О. Л.* Аналог сумм Ахиезера—Крейна—Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта // Проблемы математического анализа. Вып. 25. 2003. С. 29–56.
7. *Виноградов О. Л.* Точные неравенства для приближений классов периодических сверток пространствами сдвигов нечетной размерности // Матем. заметки. Т. 85, №4. 2009. С. 569–584.

Статья поступила в редакцию 19 июля 2017 г.; рекомендована в печать 21 сентября 2017 г.

Контактная информация:

Виноградов Олег Леонидович — д-р физ.-мат. наук, доц., проф.; olvin@math.spbu.ru
Улицкая Анастасия Юрьевна — студент; baguadadao@gmail.com

Sharp estimates for mean square approximations of classes of differentiable periodic functions by shift spaces

O. L. Vinogradov, A. Yu. Ulitskaya

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu. Sharp estimates for mean square approximations of classes of differentiable periodic functions by shift spaces. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 1, pp. 22–31. https://doi.org /10.21638/11701/spbu01.2018.103

Let L_2 be the space of 2π-periodic square integrable functions; $E(f,X)_2$ is the best approximation of the function f by the space X in L_2. For $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_2$ we denote by $\mathbb{S}_{B,n}$ the space of functions s of the form

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right).$$

In this paper, we give a description of all spaces $\mathbb{S}_{B,n}$ for which the sharp inequality

$$E(f, \mathbb{S}_{B,n})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \|f^{(r)}\|_2$$

holds. In doing so, we indicate the subspaces of dimension $2n-1$ that provide the same estimate. The well-known inequalities for approximation by trigonometric polynomials and splines are obtained as particular cases.

Keywords: best approximation, shift spaces, sharp constants.

References

1. Korneichuk N. P., *Exact Constants in Approximation Theory* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian]; translated in *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **38** (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

2. Sun Yongsheng, Li Chun, “Best approximation of certain classes of smooth functions on the real axis by splines of a higher order”, *Mathematical Notes* **48**(4), 1038–1044 (1990).

3. Schoenberg I. J., *Cardinal Spline Interpolation* (SIAM, Philadelphia, 2 ed., 1993).

4. Golomb M., “Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes”, *Journal of Approximation Theory* **1**, 26–65 (1968).

5. Kamada M., Toriachi K., Mori R., “Periodic spline orthonormal bases”, *Journal of Approximation Theory* **55**, 27–34 (1988).

6. Vinogradov O. L., “Analog of the Akhiezer–Krein–Favard sums for periodic splines of minimal defect”, *Journal of Mathematical Sciences* **114**(5), 1608–1627 (2003).

7. Vinogradov O. L., “Sharp inequalities for approximations of classes of periodic convolutions by odd-dimensional subspaces of shifts”, *Mathematical Notes* **85**, 544–557 (2009).

Author’s information:

Vinogradov Oleg L. — olvin@math.spbu.ru
Ulitskaya Anastasiya Yu. — baguadadao@gmail.com