УДК 532.517.45 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1

С. Е. Воробьёва, Э. В. Иванова, В. Д. Серов

БОРЕЛЕВСКОЕ ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИНДЕКСА z В МОДЕЛИ A КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С УЧЁТОМ АСИМПТОТИКИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В данной работе рассмотрена модель A критической динамики, описывающая динамические характеристики критического поведения ферромагнетиков, а также некоторых других систем с несохраняющимся параметром порядка. Для теоретического описания таких моделей метод ренормализационной группы и ε-разложения являются традиционными инструментами для построения ряда теории возмущений для критических показателей и других универсальных величин. Одной из проблем в данном формализме является асимптотическая природа рядов, получаемых в рамках ε-разложения, поэтому для получения надёжных теоретических предсказаний в рамках данного формализма необходимо проведение борелевского пересуммирования. В настоящей работе такое пересуммирование выполнено для четырёхпетлевого ε-разложения динамического критического индекса z, описывающего критическое замедление в системах типа ферромагнетиков. Решение этой задачи было стимулировано двумя факторами. Во-первых, недавно получены уточнённые четырёхпетлевые значения для коэффициентов ε-разложения. Во-вторых, для статических моделей было показано, что включение асимптотики сильной связи в борелевское пересуммирование приводит к лучшей сходимости процедуры. Также было показано, что для задач критической статики учёт асимптотики сильной связи существенно улучшает предсказания старших членов ряда. Поскольку асимптотика сильной связи для данной модели неизвестна, данный параметр является свободным и фиксируется из условия наиболее точного предсказания последнего известного члена по предыдущим и скорости сходимости процедуры. Библиогр. 11 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: ренормализационная группа, ε-разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели, борелевское пересуммирование.

Для цитирования: *Воробьёва С. Е., Иванова Э. В., Серов В. Д.* Борелевское пересуммирование динамического индекса z в модели A критической динамики с учётом асимптотики сильной связи // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 13–19.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.102

S. Y. Vorobyeva, E. V. Ivanova, V. D. Serov

BOREL SUMMATION OF THE DINAMIC INDEX z IN THE MODEL A OF CRITICAL DINAMICS WITH AN ACCOUNT OF THE STRONG COUPLING ASYMPTOTICS

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

In this paper we consider the model A of critical dynamics which describes the dynamic characteristics of the critical behavior of ferromagnets as well as other systems with a nonconserved order parameter. For such a model the renormalization group method and the ε-expansion are the common tool for constructing consistent perturbative expansion for critical exponents and other universal quantities. One of the problems in this formalism is the asymptotic nature of the series obtained within the ε-expansion, so to get reliable theoretical predictions it is necessary to apply the Borel resummation technique. In this work we apply such a resummation technique to the four-loop ε-expansion of the dynamical exponent z which describes the critical slowing down in the ferromagnet-type systems. The motivation of the paper is twofold: 1) improved values for the coefficients of the ε-expansion have recently been obtained, 2) sit has been shown that incorporation of strong coupling asymptotics into the Borel resummation technique leads to better convergence of the resummation procedure for static models. In this investigation it was shown that taking into account the asymptotics of the strong coupling for critical static problems also improves the predictions of the higher terms of the series. Since the strong-coupling asymptotic for this model is unknown, this parameter is held free and adjusted in accordance with the condition of the most accurate prediction of the last known term from the previous ones and the rate of convergence of the procedure. Refs 11. Figs 3.

Keywords: renormalization group, ε-expansion, multi-loop diagrams, critical exponents, Borel resummation.

For citation: Vorobyeva S. Y., Ivanova E. V., Serov V. D. Borel summation of the dynamic index z in the model A of critical dynamics with an account of the strong coupling asymptotics. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry.* 2018. Vol. 5 (63), iss. 1. P. 13–19. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.102

Одной из основных черт непрерывных фазовых переходов и критических явлений является их универсальность. Так, модель A критической динамики, до последнего времени использовавшаяся для описания критического замедления в ферромагнетиках [1], в настоящее время используется также для описания релаксационных процессов при структурных фазовых переходах [2]. В настоящей работе в рамках ренормгруппового подхода и ε-разложения произведено пересуммирование четырёхпетлевых результатов для динамического критического индекса z, который определяется динамическим индексом γ^* и статическим индексом Фишера η:

$$z = 2 + \gamma^* - \eta. \tag{1}$$

Здесь $\gamma^* = \gamma(u^*)$ и $\eta = 2\gamma_\phi(u^*)$ — значения ренормгрупповых функций $\gamma(u)$ и $\gamma_\phi(u)$ в неподвижной точке $u = u^*$ — корне уравнения $\beta(u^*) = 0$, где $\beta(u)$ — так называемая бета-функция. Величины $\gamma(u)$ и $\beta(u)$ вычисляются в виде рядов по константе связи u (мы используем нормировку u, как в статье [4], эта нормировка отличается в 7/2 раза от принятой в работе [5]). Бета-функция динамической A модели совпадает со статической и известна в настоящее время с шестипетлевой точностью [5]. Для однокомпонентного поля она имеет вид

$$\beta(u) = u\left(-\varepsilon + \frac{3u}{2} - \frac{17u^2}{12} + 4{,}06871u^3 - 16{,}97536u^4 + 89{,}01775u^5 - \right.$$
$$\left. - 543{,}37705u^6 + O(u^7)\right), \tag{2}$$

где $\varepsilon = 4 - d$ — отклонение размерности пространства d от критического значения $d_c = 4$.

Величина $\eta(u)$ также известна с шестипетлевой точностью [7]:

$$\eta(u) = 0{,}02083333u^2 - 0{,}007812500u^3 + 0{,}02115885u^4 -$$
$$- 0{,}06017453u^5 + 0{,}2247499u^6 + O(u^7). \tag{3}$$

Рассматривая ε как формально малый параметр, решая итерационно уравнение $\beta(u^*) = 0$ и подставляя результат в (3), получаем ε-разложение величины $\eta(\varepsilon)$:

$$\eta(\varepsilon) = 0{,}0185185\varepsilon^2 + 0{,}01869\varepsilon^3 - 0{,}00832875\varepsilon^4 + 0{,}0256564\varepsilon^5 - 0{,}0812726\varepsilon^6 + O(\varepsilon^7). \tag{4}$$

Для функции $\gamma(g)$ максимальная достигнутая в настоящее время точность — четырёхпетлевое приближение — получена в работе [8]:

$$\gamma(u) = c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4. \tag{5}$$

Погрешность расчёта коэффициента c_4 в (5) в этой работе довольно велика — порядка 1%. Используя при вычислении фейнмановских диаграмм метод Sector Decomposition, нам удалось на два порядка увеличить точность расчётов. В результате были получены следующие значения коэффициентов в (5):

$$\begin{aligned} c_2 &= 0{,}07192051811, \\ c_3 &= -0{,}03552374(4), \\ c_4 &= 0{,}0996502(26). \end{aligned} \tag{6}$$

Соответствующий ряд для $\gamma^*(\varepsilon)$ имеет вид

$$\gamma^*(\varepsilon) = 0{,}0319646747169\varepsilon^2 + 0{,}029726259(11)\varepsilon^3 - 0{,}0139079(5)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \tag{7}$$

Ряды (2)–(5), (7) являются асимптотическими и требуют пересуммирования для корректного определения значений критических показателей. На основе данных статьи [8] такое пересуммирование для показателя z было выполнено в работе [9], при этом сходимость итерационной процедуры оказалась плохой и значение индекса z было определено с большой погрешностью.

В настоящей работе мы используем для пересуммирования уточнённые значения (6) и модифицированный конформ-борелевский метод суммирования. Напомним его содержание. Пусть имеется функция $A(g)$, для которой известны первые N коэффициентов A_n в разложении

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \tag{8}$$

а также асимптотика высоких порядков (АВП) коэффициентов A_n:

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\,(-a)^n n!\, n^{b_0}. \tag{9}$$

Тогда конформ-борелевское представление функции $A(g)$ имеет вид

$$A(g) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)}\right)^{\nu} B(w(gt)), \tag{10}$$

где

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+ax}-1}{\sqrt{1+ax}+1}, \tag{11}$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n. \tag{12}$$

Асимптотика высоких порядков (АВП) коэффициентов разложения функции (10) в ряд по g имеет вид (9) с заданным значением параметра a, заданное значение параметра b_0 достигается путём выбора

$$b = b_0 + \frac{3}{2}. \tag{13}$$

Приближённое выражение $A^{(N)}(g)$ для функции (10) получается путём учёта в (12) N первых членов суммы, коэффициенты B_n в которой выбираются из требования совпадения первых N членов разложения функции (10) с известными коэффициентами A_n в (8):

$$A^{(N)}(g) = \int_0^\infty dte^{-t}t^b \left(\frac{gt}{w(gt)}\right)^\nu \sum_{n=0}^N B_n w^n. \tag{14}$$

Параметр ν в (10) контролирует асимптотику «сильной связи»:

$$A(g) \underset{g\to\infty}{\sim} g^\nu. \tag{15}$$

В обсуждаемой задаче параметр ν неизвестен, и мы будем использовать его для улучшения сходимости процедуры суммирования при увеличении числа учитываемых слагаемых в (8).

Следуя работе [6], проиллюстрируем эффективность такого подхода на примере модельной функции

$$A(g) = \int_0^\infty dxe^{-x^2-gx^4}. \tag{16}$$

Для этой функции известны все коэффициенты разложения (8), а АВП имеет вид (9) с $a = 4, b_0 = -1$. Параметр $\nu = -1/4$. На рис. 1 показано сравнение точного значения $A(1) = 0{,}6842134279$ функции (16) при $g = 1$ с результатом расчёта по формуле (10) с учётом различного числа слагаемых (горизонтальная ось) при различных значениях параметра ν.

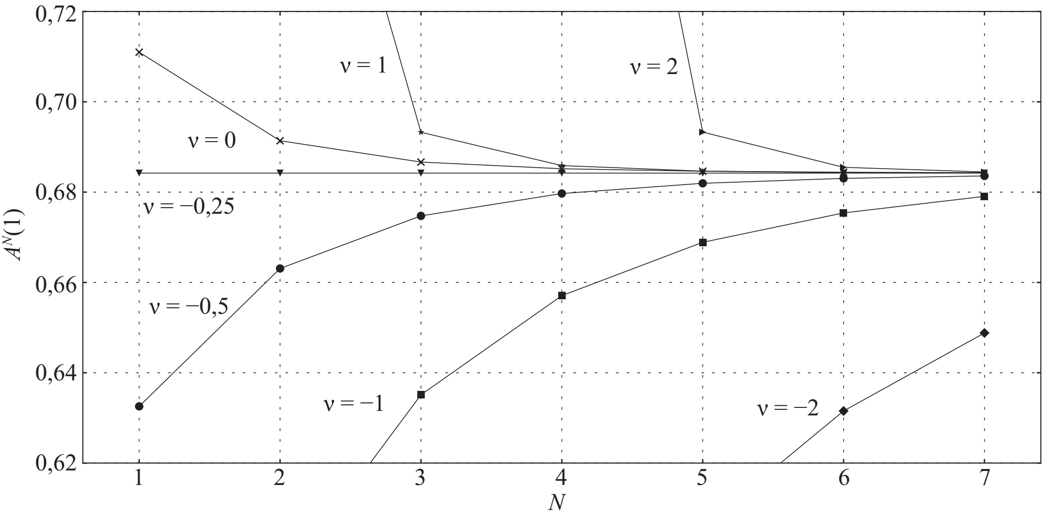

Рис. 1. Значение пересуммированного ряда $A^{(N)}(g)$ функции (16) при $g = 1$ для различных N и ν

На рис. 1 видно, что сходимость процедуры суммирования имеет место в некотором диапазоне значений параметра ν, и скорость сходимости заметно уменьшается по мере удаления этого параметра от «истинного» значения $\nu = -1/4$.

Мы применили описанную процедуру для суммирования ε-разложения динамического критического индекса z. Для этого из соотношений (1), (4) и (7) были найдены

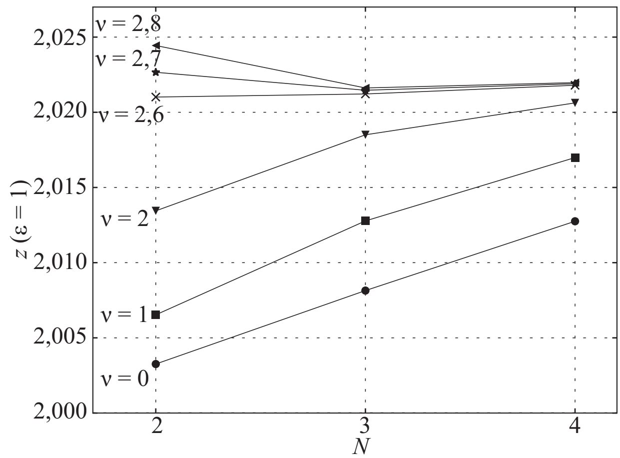

Рис. 2. Пересуммированный критический индекс z при $\varepsilon = 1$ и различных N и ν

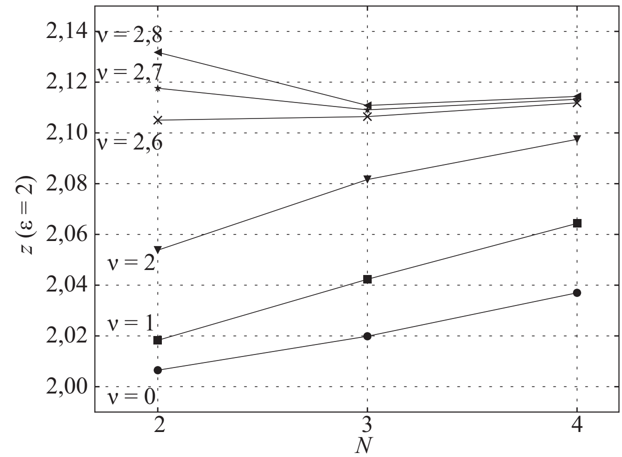

Рис. 3. Пересуммированный критический индекс z при $\varepsilon = 2$ и различных N и ν

четыре члена ε-разложения величины $z(\varepsilon) = 2 + \gamma(\varepsilon) - \eta(\varepsilon)$, и полученное разложение суммировалось согласно соотношениям (10)–(13). Параметры a и b_0 для $\eta(\varepsilon)$ выбирались, согласно [10], равными $a = 1/3$, $b_0 = 3/2$. В работе [11] показано, что такие же значения имеют эти параметры для величины $z(\varepsilon)$. На рис. 2 показаны полученные в результате суммирования значения динамического критического индекса z для трёхмерного пространства $d = 3\,(\varepsilon = 1)$ и двумерного пространства $d = 2$ $(\varepsilon = 2)$ при различном числе учтённых членов разложения $z(\varepsilon)$ и значений параметра ν.

Из сравнения рис. 1 и рис. 2 видно, что сходимость процедуры борелевского суммирования для $z(\varepsilon)$ вполне аналогична рассмотренной для модельной функции (16). Наибольшая скорость сходимости достигается при значении $\nu = 2{,}6$, что даёт следующие оценки для динамического индекса z для трёхмерного и двумерного случаев:

Число петель	Две	Три	Четыре
$\varepsilon = 1$	2,0210142	2,021218	2,0217974
$\varepsilon = 2$	2,1050275	2,10642878	2,1118359

Результаты работы показывают, что учёт параметра сильной связи ν необходим для корректного определения динамического критического индекса z методом конформ-борелевского суммирования, поскольку при значении $\nu = 0$, которое использовалось в работе [9], сходимость очень медленная и требуется учёт большого числа членов разложения $z(\varepsilon)$.

* * *

Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» (http://www.cc.spbu.ru/).

Литература

1. *Marinelli M., Mercuri F., Belanger D. P.* Specific heat, thermal diffusivity, and thermal conductivity of FeF_2 at the Néel temperature // Phys. Rev. (B). 1995. Vol. 51. P. 8897.

2. *Livet F., Fevre M., Beutier G., Sutton M.* Ordering fluctuation dynamics in $AuAgZn_2$ // Phys. Rev. (B). 2015. Vol. 92. 094102.

3. *Антонов Н. В., Васильев А. Н.* Критическая динамика как теория поля // Теор. мат. физика. 1984. Т. 60, № 1. С. 59–71.

4. *Аджемян Л. Ц., Воробьёва С. Е., Компаниец М. В.* Представление несингулярными интегралами β-функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики // Теор. мат. физика. 2015. Т. 185, № 1. С. 3–11.

5. *Kompaniets M. V., Panzer E.* Minimally subtracted six loop renormalization of $O(n)$-symmetric ϕ^4 theory and critical exponents // Phys. Rev. (D). 2017. Vol. 96. 036016.

6. *Kompaniets M. V.* Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping // J. Phys. Conf. Ser. 2016. Vol. 762. 012075.

7. *Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V.* Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$-symmetric $\phi4$ model // Nucl. Phys. (B). 2016. Vol. 906. P. 147–167.

8. *Аджемян Л. Ц., Новиков С. В., Сладкофф Л.* Расчёт динамического индекса модели A критической динамики в порядке ϵ^4 // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2008. Вып. 4. С. 110–114.

9. *Налимов М. Ю., Сергеев В. А., Сладкофф Л.* Борелевское пересуммирование ϵ-разложения динамического индекса z модели A $\phi^4(O(n))$-теории // Теор. мат. физика. 2009. Т. 159, № 1. С. 96–108.

10. *Kleinert H., Schulte-Frohlinde V.* Critical properties of ϕ^4-theories. Freie Universität Berlin, 2001. 489 p.

11. *Andreanov J., Honkonen J., Komarova M., Nalimov M.* Large-order asymptotes for dynamic models // J. Phys. (A). 2006. Vol. 39. P. 1–10.

References

1. Marinelli M., Mercuri F., Belanger D. P. Specific heat, thermal diffusivity, and thermal conductivity of FeF_2 at the Néel temperature. *Phys. Rev. (B)*, 1995, vol. 51, pp. 8897.

2. Livet F., Fevre M., Beutier G., Sutton M. Ordering fluctuation dynamics in $AuAgZn_2$. *Phys. Rev. (B)*, 2015, vol. 92, 094102.

3. Antonov N. V., Vasil'ev A. N. Kriticheskaia dinamika kak teoriia polia [Critical dynamics as a field theory]. *Teor. mat. fizika.* [*Theor. Math. Phys.*], 1984, vol. 60, no 1, pp. 59–71. (In Russian)

4. Adzhemyan L. Ts., Vorob'eva S. E., Kompaniets M. V. Predstavlenie nesinguliarnymi integralami β-funktsii i anomal'nykh razmernostei v modeliakh kriticheskoi dinamiki [Representation of the β-function and anomalous dimensions by nonsingular integrals in models of critical dynamics]. *Teor. mat. fizika.* [*Theor. Math. Phys.*], 2015, vol. 185, no 1, pp. 3–11. (In Russian)

5. Kompaniets M. V., Panzer E. Minimally subtracted six loop renormalization of $O(n)$-symmetric ϕ^4 theory and critical exponents. *Phys. Rev. (D)*, 2017, vol. 96, 036016.

6. Kompaniets M. V. Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 762, 012075.

7. Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$-symmetric $\phi4$ model. *Nucl. Phys. (B)*, 2016, vol. 906, pp. 147–167.

8. Adzhemyan L. Ts., Novikov S. V., Sladkoff L. Raschet dinamicheskogo indeksa modeli A kriticheskoi dinamiki v poriadke ϵ^4 [Calculation of the dynamical exponent in the model A of critical dynamics to order ε^4]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2008, iss. 4, pp. 110–114. (In Russian)

9. Nalimov M. Yu., Sergeev V. A., Sladkoff L. Borelevskoe peresummirovanie ϵ-razlozheniia dinamicheskogo indeksa z modeli A $\phi^4(O(n))$-teorii [Borel resummation of the ϵ-expansion of the dynamical exponent

z in model A of the $\phi^4(O(n))$ theory]. *Teor. mat. fizika.* [*Theor. Math. Phys.*], 2009, vol. 159, no 1, pp. 96–108. (In Russian)

10. Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. *Critical properties of* ϕ^4*-theories.* Freie Universität Berlin, 2001. 489 p.

11. Andreanov J., Honkonen J., Komarova M., Nalimov M. Large-order asymptotes for dynamic models. *J. Phys. (A)*, 2006, vol. 39, pp. 1–10.

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2017 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я

Воробьёва Светлана Евгеньевна — аспирантка; e-mail: svetlana.e.vorobyeva@gmail.com
Иванова Элла Валерьевна — аспирантка; e-mail: ella.v.ivanova@gmail.com
Серов Виталий Дмитриевич — студент; e-mail: vitalii_serov@inbox.ru

Vorobyeva Svetlana Yevgenyevna — post-graduate student; e-mail: svetlana.e.vorobyeva@gmail.com
Ivanova Ella Valeryevna — post-graduate student; e-mail: ella.v.ivanova@gmail.com
Serov Vitalii Dmitrievich — student; e-mail: vitalii_serov@inbox.ru