Санкт-Петербургский государственный университет

Матвеева М.С., Орлов А.К.

Неопределенный интеграл
Методы и способы интегрирования
Определенный интеграл
Приложения определенного интеграла
Несобственные интегралы

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2017

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики в качестве методических указаний для студентов естественных факультетов.

Авторы: Матвеева М.С., Орлов А.К.

Матвеева М.С., Орлов А.К.
Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Методы и способы интегрирования. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.
Учебное пособие. – СПб.: СПбГУ, 2017. – 68 с.

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. Необходимые для решения задач теоретические сведения приводятся в каждом параграфе. Особое внимание уделяется вопросам, которые, как показывает опыт проведения практических занятий, вызывают у студентов наибольшие трудности в понимании. Пособие снабжено большим количеством примеров, а также содержит контрольные задания для индивидуальных работ.

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке $\langle a;b\rangle$, если для $\forall x \in \langle a;b\rangle$ выполнено

$$\boxed{F'(x) = f(x)}.$$

Как видно из определения, задача нахождения первообразной $F(x)$ заданной функции $f(x)$ является обратной по отношению к одной из основных задач дифференциального исчисления – отысканию производной.

Примеры:

1. Функция $F(x) = x^{10}$ является первообразной для $f(x) = 10x^9$ на всей числовой прямой, т.к. для $\forall x \in R$ выполнено $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$.
2. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной функции $f(x) = 1/x$ на интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Действительно, при $x > 0$: $F'(x) = \left[\ln(x)\right]' = 1/x$. Для $x < 0$: $F'(x) = \left[\ln(-x)\right]' = (-1)/(-x) = 1/x$.

Теорема. *Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке $\langle a;b\rangle$, то любая другая первообразная $f(x)$ на $\langle a;b\rangle$ может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.*

Доказательство. Ясно, что если $F'(x) = f(x)$, то и $\left[F(x)+C\right]' = f(x)$. С другой стороны, пусть $\Phi(x)$ – любая другая первообразная $f(x)$. Тогда

$$\left[\Phi(x) - F(x)\right]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По одной из теорем курса дифференциального исчисления известно, что если на некотором интервале производная функции равна нулю, то функция постоянна на этом интервале. Значит, $\Phi(x) - F(x) = C$. ■

Определение. *Неопределенным интегралом* $\int f(x)\,dx$ от функции $f(x)$ называется множество (семейство) всех первообразных:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x), C - \text{произвольная постоянная.}}$$

Здесь $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Восстановление функции $F(x)$ по ее производной $f(x)$, или интегрирование подынтегральной функции $f(x)$ представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Чтобы проверить правильность интегрирования, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Пример 3. Проверить, что $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C$.

Дифференцируя результат, получаем $\left(\sqrt{1+x^2} + C\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Теорема. *Любая непрерывная на интервале функция имеет первообразную.*

В дальнейшем будем считать, что все функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны. Если область определения функции есть объединение нескольких промежутков, интегрирование происходит на каждом промежутке в отдельности. Например, $f(x) = 1/x$ определена и непрерывна для $\forall x \in R, x \neq 0$. Выше было показано, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются:

   $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ и $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

   $\int d\,f(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$.

   Напомним, что дифференциал $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$.

2. Линейность интеграла:

   $\int\left(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\right)dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$.

   Здесь α и β – постоянные.

§2. Методы интегрирования.

Выше говорилось о том, что любая непрерывная функция имеет первообразную. Но если производная элементарной функции также всегда является элементарной функцией, то этого нельзя сказать об интегралах. Легко привести примеры функций, интегралы от которых хоть и существуют, но не выражаются в элементарных функциях, так называемые «неберущиеся» интегралы. Например, $\int \exp(-x^2)\,dx, \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \int \frac{dx}{\ln x}$ и др.

Зная таблицу производных и основные правила дифференцирования, легко найти производную любой элементарной функции. С интегрированием дело обстоит сложнее. Даже знание таблицы интегралов и методов интегрирования еще не является гарантией успешного решения задачи интегрирования. Не всегда очевидно, каким именно способом нужно интегрировать ту или иную функцию, какие преобразования подынтегрального выражения целесообразно сделать прежде, чем интегрировать. Кроме того, одну и ту же функцию можно проинтегрировать разными способами, возможно, получив при этом и различные ответы, так как первообразная любой функции определяется с точностью до константы.

Ниже приведена таблица производных и таблица интегралов. Часть формул таблицы интегралов непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить непосредственным дифференцированием. Так или иначе, практически любой метод интегрирования в конечном итоге приводит к необходимости применения табличных интегралов. Поэтому таблицу интегралов, как и таблицу производных, необходимо знать наизусть.

ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ [1]

Производные	*Первообразные*
$(C)' = 0$	$\int 0\,du = C$
$(u^{\alpha})' = \alpha\, u^{\alpha-1}$	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{1}{u}$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$

[1] Дифференцирование и интегрирование для удобства дальнейшего изложения ведется по переменной *u*.

$(a^u)' = a^u \ln a,\ (e^u)' = e^u$ $(a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C,\ \int e^u du = e^u + C$
$(\sin u)' = \cos u$ $(\cos u)' = -\sin u$	$\int \cos u\, du = \sin u + C$ $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}$ $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}$	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$ $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$
$(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u,\ \mathrm{sh}\, u = (e^u - e^{-u})/2$ $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u,\ \mathrm{ch}\, u = (e^u + e^{-u})/2$	$\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C$ $\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C$
$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C \end{array} \right.$ $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \dfrac{u}{a} + C \\ -\arccos \dfrac{u}{a} + C \end{array} \right.$
Производные	*Первообразные*
$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2}$ $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}$	$\int \dfrac{du}{1+u^2} = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arctg}\, u + C \\ -\mathrm{arcctg}\, u + C \end{array} \right.$ $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a} \mathrm{arcctg} \dfrac{u}{a} + C \end{array} \right.$

$\left(\ln\left\|\dfrac{u+1}{u-1}\right\|\right)' = \dfrac{1}{1-u^2}$ $\left(\ln\left\|\dfrac{u-1}{u+1}\right\|\right)' = \dfrac{1}{u^2-1}$	$\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{u+a}{u-a}\right\| + C$ $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{u-a}{u+a}\right\| + C$ $(a \neq 0)$
$\left(\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ $\left(\ln(u+\sqrt{u^2-1})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln(u+\sqrt{u^2+1}) + C$ $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln(u+\sqrt{u^2-1}) + C$ $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}} = \ln(u+\sqrt{u^2+\alpha}) + C$

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Непосредственное интегрирование предполагает использование в первую очередь табличных интегралов и свойства линейности интеграла.

Примеры:

1. $$\int\left(3\sin x + 5 - 4x^3 + \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\right)dx =$$

$$= 3\int \sin x\, dx + 5\int dx - 4\int x^3 dx + \int x^{2/3} dx + 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} =$$

$$= -3\cos x + 5x - x^4 + \frac{3}{5}x^{5/3} + 2\ln|x| - \arcsin\frac{x}{5} + C.$$

Правильность результата легко проверить дифференцированием.

На практике непосредственное интегрирование встречается довольно редко. Зачастую приходится преобразовывать подынтегральное выражение, используя разнообразные приемы , чтобы получить табличные интегралы.

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$
$=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

3. $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\operatorname{tg}x-x+C.$

4. $\displaystyle\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x+C.$

Из приведенных примеров видно, что для интегрирования недостаточно просто знать формулы. Необходим опыт, который приобретается в процессе решения задач.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ВНЕСЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА)

Одним из важных методов интегрирования является введение новой переменной, что позволяет свести интеграл к табличному. Справедлива следующая *формула замены переменной*

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C \qquad (1)$$

Здесь $u=\varphi(x),\ du=d\varphi(x)=\varphi'(x)\,dx, F(u)$ – первообразная функции *f(u)*.

Самый простой случай применения формулы – это *линейная замена*: $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$. (Ясно, что константу b всегда можно внести под знак дифференциала, поскольку $d(x+b)=dx$). Для практического применения этой формулы полезно «делать в уме», без явного введения новой переменной, такие преобразования, как

$$x^m dx=\frac{1}{m+1}d(x^{m+1}),\ 2x\,dx=d(x^2),\ \frac{dx}{x}=d(\ln x) \qquad (2)$$
$$\cos x\,dx=d(\sin x),\ \sin x\,dx=-d(\cos x).$$

Частным случаем формулы замены переменной является формула

$$\boxed{\int\frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}=\int\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.}$$

Примеры:

5. Рассмотрим линейную замену и на этом простейшем примере покажем два способа рассуждений, которые, по сути, являются одним и тем же методом замены переменной.

Вычислить интеграл $\int \sin(2x+3)\,dx$.

В первом случае (наиболее распространенном в литературе) новая переменная $u = \varphi(x) = 2x+3$ вводится явно. Тогда $du = 2dx$ и

$$\int \sin(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$$

Без явного введения новой переменной, учитывая выражения (2), вычисления выглядят следующим образом:

$$\int \sin(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\,d(2x+3) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$$

Второй способ рассуждений представляется более предпочтительным, поскольку без знания формул (2) далеко не всегда очевидно, какую именно замену переменной следует делать. Поэтому в дальнейшем преимущественно будет использоваться именно этот способ.

6. $\int \sqrt{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int (5x-4)^{1/2}\,d(5x-4) = \frac{2}{15}(5x-4)\sqrt{5x-4} + C$.

7. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C_1$.

Этот же интеграл можно вычислить по-другому:

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

На первый взгляд ответы различные. Но учитывая, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, легко заметить, что первообразные различаются на константу.

8. $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

9. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{1+\ln x}\,d(\ln x + 1) = \frac{2}{3}(\ln x + 1)^{3/2} + C$.

10. Часто используемый прием в преобразовании подынтегрального выражения – выделение полного квадрата.

$I = \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{x\,dx}{(x+1)^2+2}$. Дальше удобно ввести новую переменную явно: $u = x+1,\ x = u-1,\ du = dx$. Тогда

$I=\int\frac{(u-1)\,du}{u^2+2}=\int\frac{u\,du}{u^2+2}-\int\frac{du}{u^2+2}$. Внося в первом интеграле u под знак дифференциала (второй интеграл – табличный), имеем

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+2)}{u^2+2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln(u^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Этот метод, по сути, является разновидностью метода замены переменной, поэтому зачастую в литературе замена переменной и подстановка не различаются. Разница в том, что в методе подстановки формула (1) применяется в обратном порядке (справа налево). А именно, вместо переменной x вводится «подставляется» новая переменная $x=\varphi(t)$, и в этом случае формула (1) принимает вид

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (3)$$

И замена переменной, и подстановка применяются с целью в правой части формулы (1) или (3) получить один из табличных интегралов.

11. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}=\left\{\sqrt{x}=t,\ x=t^2,\ dx=2t\,dt\right\}=\int\frac{2t^2\,dt}{t+1}=2\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=$

$$=2\left(\int(t-1)\,dt+\int\frac{d(t+1)}{t+1}\right)=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|+C\right)=x-2\sqrt{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C.$$

(Здесь и далее в фигурных скобках записываются промежуточные вспомогательные выкладки).

В этом примере применен еще один из часто используемых приемов интегрирования рациональных функций. В неправильной дроби выделение целой части производится путем вычитания и прибавления константы в числителе вместо деления многочлена t^2 на многочлен $(t+1)$. Тем самым неправильная дробь записывается в виде суммы многочлена и правильной дроби: $\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \left\{ \sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6,\ dx=6t^5dt \right\} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+2} =$

$$= 6\int \frac{(t^3+8)-8}{t+2}\,dt = 6\left(\int (t^2-2t+4)\,dt - 8\int \frac{dt}{t+2} \right) = 6\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t - \right.$$

$$\left. -8\ln|t+2| + C \right) = -2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48\ln(\sqrt[6]{x}+2) + C.$$

Вообще, если подынтегральное выражение не содержит других корней, кроме $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, следует применять подстановку $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

13. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \left\{ e^x=t,\ x=\ln t,\ dx=\frac{dt}{t} \right\} = \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{t(t+1)}\,dt =$

$$= \left(2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} \right) = 2\ln|t+1| - \ln|t| + C = 2\ln(e^x+1) - x + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям в наиболее кратком и удобном для запоминания виде выглядит следующим образом:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \qquad (4)$$

Эта формула непосредственно следует из правила дифференцирования произведения двух функций: $(uv)' = u'v + uv'$. Интегрируя это равенство и учитывая, что

$\int u'(x)v(x)\,dx = \int v(x)\,du(x)$, $\int u(x)v'(x)\,dx = \int u(x)\,dv(x)$,

$\int (u(x)v(x))'dx = \int d(u(x)v(x)) = u(x)v(x)$, получаем формулу (4).

Часто эту формулу записывают в развернутом виде

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx}.$$

Идея метода интегрирования по частям заключается в переходе от исходного интеграла $\int u\,dv$ к более простому интегралу $\int v\,du$. Важно правильно выбрать функции $u(x)$ и $dv(x)$. За $u(x)$ целесообразно выбирать ту часть подынтегрального выражения, которая при дифференцировании упрощается. Следует учитывать, что для применения формулы (4) придется находить $v(x) = \int dv(x)$. (В первообразной $\int dv(x)$ полагают $C=0$).

Интегрирование по частям часто применяется в случаях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение алгебраической и трансцендентной или тригонометрической функций, т.е. ищется интеграл вида $\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} \sin x, \cos x \\ \arcsin x, \arccos x \\ \mathrm{arctg} x, \mathrm{arcctg} x \\ \ln x, e^x \end{matrix}\right\} dx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Для интегралов $\int P_n(x)\{\sin x, \cos x, e^x\}dx$ полагают $u(x) = P_n(x)$ и вычисляют интеграл *n*-кратным применением формулы (4).

Для интегралов $\int P_n(x)\{\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg} x, \mathrm{arcctg} x, \ln x\}dx$ полагают $dv(x) = P_n(x)\,dx$, $u(x)$ – одна из указанных функций.

Примеры:

14. $\int x^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix}\right\} = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^3}{x}dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C.$

15. $\int x^2 e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2,\ du = 2xdx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{matrix}\right\} = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{matrix}\right\} =$

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Здесь интегрирование по частям применяется последовательно два раза. Заметим, что при другом выборе функций u и dv, а именно, $u = e^x, du = e^x dx, dv = x^2 dx, v = 1/3x^3$, вместо исходного интеграла пришли бы к более сложному: $\int x^2 e^x dx = \dfrac{x^3}{3}e^x - \dfrac{1}{3}\int x^3 e^x dx$. Т.е. такой выбор u и dv в данном случае неудачен.

16. $\int \mathrm{arctg} x dx = \left\{\begin{matrix} u = \mathrm{arctg} x, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = x \end{matrix}\right\} = x\,\mathrm{arctg} x - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2} =$

$$= x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Возвратные интегралы.

Рассмотрим следующий интеграл: $I = \int e^x \sin x\,dx$. При интегрировании по частям в данном случае совершенно неважно, какую из функций выбрать в качестве u и dv. Положим для определенности $u = e^x, du = e^x dx, dv = \sin x dx, v = -\cos x$. Тогда $I = \int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$. Полученный интеграл «не хуже, и не лучше» исходного. Применим повторное интегрирование по частям. Теперь уже важно, что именно выбрать в качестве u и dv. Выбирать следует то же самое, что и в первый раз, т.е. $u = e^x, du = e^x dx, dv = \cos x\,dx, v = \sin x$. Имеем

$$I = \int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I\ .$$

Отсюда $I = \int e^x \sin x\,dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$.

Аналогичным способом вычисляются интегралы $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$. Возвратными являются и интегралы вида $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$. (Проверьте это самостоятельно).

Следует отметить, что существует более простой способ вычисления возвратных интегралов с использованием формулы Эйлера для функции комплексной переменной $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. (Здесь i – мнимая единица). Рассмотрим $I = \int e^{(1+i)x}\,dx = \dfrac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \dfrac{e^x}{2}(\cos x + i\sin x)(1-i)$. С другой стороны, $I = \int e^{(1+i)x}\,dx = \int e^x(\cos x + i\sin x)\,dx = \int e^x \cos x\,dx + i\int e^x \sin x\,dx$. Приравнивая эти выражения и отделяя действительную и мнимую части, легко получим:

$$I_1 = \int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)/2,\ \ I_2 = \int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x)/2.$$

Интегралы $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ***и*** $\int \sqrt{x^2 + \alpha}\,dx$**.**

Вычислим $I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ с помощью интегрирования по частям. Положим $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, тогда $du = \dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$.

$$I_1 = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I_1.$$

Окончательно имеем

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C} \qquad (5)$$

Аналогично вычисляется $I_2 = \int \sqrt{x^2 + \alpha}\,dx$. (Проделайте это самостоятельно). Для I_2 получим следующую формулу:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2 + \alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) хоть и не являются табличными, но часто применяются в интегрировании, поэтому их целесообразно добавить в таблицу интегралов. Ниже будет приведен другой способ вычисления I_1 и I_2 с помощью тригонометрических подстановок.

§3. Интегрирование некоторых типов функций.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Никаких специальных методов при интегрировании тригонометрических функций не применяется. Для преобразования подынтегрального выражения широко используются известные тригонометрические формулы. Рассмотрим некоторые стандартные приемы интегрирования тригонометрических функций.

Вычислить интеграл $\int \cos^m x \sin^n x\,dx,$ где $m, n \in \mathrm{N}$.

а) Подынтегральная функция содержит только четные степени $\cos x$ и $\sin x$. В этом случае используются тригонометрические формулы понижения степени $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,\ 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

б) Если хотя бы одна из степеней m или n – нечетная, от функции с нечетной степенью отделяется один множитель, который вносится под знак дифференциала по формулам $\cos x\,dx = d\sin x, \sin x\,dx = -d\cos x$. Оставшаяся четная степень этой функции выражается через кофункцию с помощью основного тригонометрического тождества.

Для нахождения интегралов $\int \sin^n x\,dx, \int \cos^n x\,dx$ можно воспользоваться следующими **рекуррентными соотношениями** ($n \in \mathrm{Z},\ n \neq 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} \int \sin^n x\,dx &= -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \\ \int \cos^n x\,dx &= \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \end{aligned}} \tag{7}$$

Эти формулы легко выводятся с помощью интегрирования по частям. Рассматриваемые интегралы – возвратные. Докажем одну из формул.

$$I = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx =$$

$$\left\{ u = \sin^{n-1} x,\ dv = \sin x\,dx,\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx, v = -\cos x \right\} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos x \sin^{n-2} x \cos x\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\underbrace{\int \sin^n x\,dx}_{I}.$$

Отсюда немедленно следует первое из рекуррентных соотношений.

Напомним некоторые тригонометрические тождества, часто используемые при интегрировании:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

Примеры:

1. $$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} \cdot \frac{(1+\cos 2x)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x - \cos 2x + \cos^3 2x)\, dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)\, dx - \frac{\sin 2x}{16} + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)\ d\sin 2x =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Как видно из этого примера, интегрирование некоторых тригонометрических функций хоть и несложное, но довольно трудоемкое занятие.

2. $$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\, d\sin x =$$

$$= \{t = \sin x\} = \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Этот интеграл можно вычислить и по-другому:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cos x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\cos x\, dx =$$

$$= \frac{\sin x}{8} - \frac{1}{8}\int \cos 4x \cos x\, dx = \frac{\sin x}{8} - \frac{1}{16}\int (\cos 5x + \cos 3x)\, dx =$$

$$= \frac{\sin x}{8} - \frac{\sin 5x}{80} - \frac{\sin 3x}{48} + C.$$

3. $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \{t = \cos x\} = -\int \frac{1-t^2}{t^3}dt = -\int t^{-3}dt + \int \frac{dt}{t} =$

$= \frac{t^{-2}}{2} + \ln|t| + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.$

Вычислим этот интеграл с помощью метода замены переменной. Пусть $t = \mathrm{tg}x$, тогда $x = \mathrm{arctg}t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 d(t^2+1)}{t^2+1} = \{u = t^2+1\} = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}du =$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{\ln u}{2} + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{2} - \ln(\mathrm{tg}^2 x+1)^{1/2} + C.$$

Легко видеть, что этот ответ совпадает с ответом, полученным выше.

4. Рассмотрим пример нахождения на первый взгляд совсем простого интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$. Он также может быть вычислен разными способами.

$$а)\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}dx = -\int \frac{d\cos(x/2)}{\cos(x/2)} + \int \frac{d\sin(x/2)}{\sin(x/2)} =$$

$$= \ln|\sin(x/2)| - \ln|\cos(x/2)| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$б)\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \{t = \cos x\} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

5. Приведем пример использования рекуррентных соотношений (7).

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \{\text{по формулам (7)}\} = \cos x \sin^{-2} x + 2\int \sin^{-3} x\,dx.$$

Отсюда $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\cos x \sin^{-2} x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

6. Рассмотрим еще один пример, в котором используется предварительное преобразование подынтегральной функции, что не редкость при интегрировании тригонометрических функций.

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x - \sin(\pi/2 - x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin(x-\pi/4)\cos(\pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

При вычислении этого интеграла использован результат примера 4.

Вычислим тот же интеграл другим способом.

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos^2 x) - \cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - (1-\sin^2 x)} = -\int \frac{d\cos x}{1-2\cos^2 x} + \int \frac{d\sin x}{2\sin^2 x - 1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = \cos x \\ u = \sin x \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 1/2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{u^2 - 1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u\sqrt{2}-1}{u\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\cdot\frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\sin x + 1}\right| + C.$$

В данном случае не очевидно, что ответы различаются на константу.

Из приведенных примеров видно, что при вычислении интеграла разными способами могут получиться и различные ответы. Примеры наглядно показывают, что в интегрировании, в отличие от дифференцирования, готовых рецептов нет. Для нахождения первообразных недостаточно иметь только технические навыки, необходим опыт и сообразительность.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональные функции – это функции вида $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Интегралы от них всегда могут быть выражены через элементарные функции. Способ интегрирования таких функций основан на фактах, доказываемых в курсе высшей алгебры.

В первую очередь, если дробь *неправильная*, т.е. $m \geq n$, нужно выполнить деление и выделить целую часть дроби из многочлена $P_m(x)$:

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Теперь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – *правильная* дробь, в которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Метод неопределенных коэффициентов.

Название этого метода, применяемого в различных случаях, вытекает из самого алгоритма, изложенного ниже.

1. Применим метод неопределенных коэффициентов для отыскания разложения рациональной функции на *простейшие дроби*. Поясним суть метода подробнее.

Известно, что любой многочлен $Q(x)$ в комплексной области может быть единственным образом разложен на множители, т.е. $Q(x) = c(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_k}$, где x_i – корни $Q(x)$, $x_i \in C$. Если рассматривать только вещественные корни, то для $Q(x)$ справедливо разложение

$$Q(x) = c(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}.$$

Здесь $x_1, \dots, x_k \in R$, $x^2 + p_s x + q_s$ – неразложимый в поле вещественных чисел квадратный трехчлен $(s = 1, \dots j)$.

В курсе высшей алгебры доказывается теорема о том, что всякая правильная рациональная дробь единственным образом разлагается на сумму элементарных (простейших) дробей (см., например, [7]), т.е. дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

При этом каждому множителю знаменателя $Q(x)$ вида $(x - x_i)^\alpha$ соответствует сумма дробей $\dfrac{A_1}{x - x_i} + \dfrac{A_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \dfrac{A_\alpha}{(x - x_i)^\alpha}$, а каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^\beta$ – сумма дробей

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta}.$$

Таким образом, для рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ имеет место разложение

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots. \qquad (8)$$

Здесь $A_\alpha,\ M_\beta,\ N_\beta$ – неопределенные коэффициенты.

Примеры:

7. $$\frac{R}{Q}=\frac{R(x)}{(x-1)^3(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{x+1}+$$
$$+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

8. $$\frac{R}{Q}=\frac{R(x)}{x^4(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Для нахождения коэффициентов $A_\alpha,\ M_\beta,\ N_\beta$ умножим обе части разложения (8) на $Q(x)$. Равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, получившимся в правой части, справедливо для всех x. (Или, что то же самое, приведем правую часть равенства (8) к общему знаменателю $Q(x)$ и запишем равенство $R(x)$ и числителя полученной дроби). Поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Отсюда получаем систему линейных уравнений, из которой и находятся неизвестные коэффициенты.

Замечание. Иногда для нахождения $A_\alpha,\ M_\beta,\ N_\beta$ удобнее применить другой способ. Вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x придадим переменной x произвольные значения нужное количество раз, получив систему для определения $A_\alpha,\ M_\beta,\ N_\beta$.

Примеры:

9. $$\frac{R}{Q}=\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$
$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Имеем: $A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)=1.$ (9)

Или $(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)=1.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases}. \qquad \text{Отсюда находим значения } \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=0 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби выглядит следующим образом: $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}$.

Замечание. Вычислим A,B,C,D другим способом. Равенство (9) верно при любых значениях переменной x. Придавая x различные (удобные для вычислений) значения, получаем систему для нахождения A,B,C,D.

$$\begin{cases} x=-1:\ -4B=1 \\ x=\ \ 1:\quad 4A=1 \\ x=\ \ 0:\quad A-B-D=1 \\ x=\ \ 2:\quad 15A+5B+6C+3D=1 \end{cases}, \qquad \text{откуда } \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=0 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Каким способом находить неопределенные коэффициенты – дело вкуса.

10. $\dfrac{R}{Q}=\dfrac{x^2-1}{x^2(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)}=$

$$=\frac{Ax(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+x+1)}.$$

Отсюда $Ax(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2=x^2-1$.

Из системы $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+D=1 \\ A+B=0 \\ B=-1 \end{cases}$ находим $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \\ D=1 \end{cases}$. Окончательно имеем

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{x-1}{(x^2+x+1)}.$$

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $W(x)$, интеграл от которого является табличным, и интегрированию правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

После разложения $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби интегрирование сводится к нахождению интегралов следующих четырех типов:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C, \ \alpha > 1,$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx, \qquad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}\,dx, \ \beta > 1$$

Интеграл $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ вычисляется стандартным способом, часто применяемым на практике. Рассмотрим этот способ.

Выделение полного квадрата. Из квадратного трехчлена выделяем полный квадрат: $x^2+px+q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}$, после чего делаем подстановку $t = x + \dfrac{p}{2}$. Обозначая $q - \dfrac{p^2}{4} = h$, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M(t-p/2)+N}{t^2+h}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+h} + \left(N - \frac{p}{2}M\right)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

Далее имеем: $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{t^2+h} = \frac{1}{2}\ln|t^2+h| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+px+q| + C$.

Интеграл $\int \dfrac{dt}{t^2+h}$ является табличным. Заметим, что $h > 0$, т.к. дискриминант квадратного трехчлена x^2+px+q отрицателен, поэтому $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+h} = \frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{h}} + C$.

Вычисление интеграла $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}\,dx, \ \beta > 1$ подстановкой $t = \dfrac{x+p/2}{\sqrt{h}}$ $(h > 0)$ сводится к применению рекуррентной формулы для интеграла $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\beta}}$, $\beta > 1$. (Подробнее об этом см., например, [3]).

Таким образом, показано, что любая дробно-рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. Рассмотрим еще один пример.

11. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^4 - 6x^3 - 8x + 4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 4} dx$.

Сначала приведем дробь к правильному виду, выделив целую часть. После деления многочленов имеем:

$I = \int (x-3)\, dx + \int \frac{-15x^2 + 14x - 8}{x^3 - 3x^2 + 6x - 4} dx$. Первый из интегралов – табличный. Для интегрирования правильной дроби представим ее в виде суммы простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. Для этого знаменатель нужно разложить на множители. В данном случае один из корней знаменателя $x = 1$ легко находится подбором. После деления $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ на $x - 1$ имеем $Q(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$, причем дискриминант квадратного трехчлена отрицателен. Тогда

$$\frac{R}{Q} = \frac{-15x^2 + 14x - 8}{(x-1)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2 - 2x + 4}.$$

Отсюда $A(x^2 - 2x + 4) + (Mx + N)(x - 1) = -15x^2 + 14x - 8$.

Полагая последовательно $x = 1, x = 0, x = 2$, получим систему для нахождения коэффициентов A, M и N:

$$\begin{cases} x = 1: \ 3A = -9 \\ x = 0: \ 4A - N = -8 \\ x = 2: \ 4A + 2M + N = -40 \end{cases}, \quad \text{откуда находим} \quad \begin{cases} A = -3 \\ M = -12 \\ N = -4 \end{cases}.$$

Осталось проинтегрировать полученный результат.

$$I = \int (x-3)dx - 3\int \frac{dx}{x-1} - 4\int \frac{3x+1}{x^2 - 2x + 4} dx.$$

Рассмотрим отдельно последний интеграл. Для его вычисления выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{3x+1}{x^2 - 2x + 4} dx = \int \frac{3(x-1)+4}{(x-1)^2 + 3} dx = \{t = x - 1\} = \int \frac{3t+4}{t^2+3} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|t^2 + 3| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно

$$I = \frac{(x-3)^2}{2} - 3\ln|x-1| - 6\ln|x^2 - 2x + 4| - \frac{16}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Метод неопределенных коэффициентов может использоваться не только при интегрировании дробно – рациональных функций. Его имеет смысл использовать в тех случаях, когда нам ясен вид первообразной, а неизвестны лишь конкретные числа, которые должны входить в ее формулу. Таких случаев немного, но они весьма часто встречаются на практике.

2. Интеграл вида $\int \mathbf{P_n(x)e^{kx}dx}$, где $P_n(x)$ многочлен степени n.

Первообразная будет иметь тот же вид, то есть представлять собой произведение многочлена n-й степени на экспоненту с тем же показателем. Коэффициенты многочлена найдем, дифференцируя и приравнивая множители при одинаковых степенях.

Пример12. $\int x^3e^{-2x}dx$.

Будем искать первообразную в виде

$F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-2x}$,

$F'(x)=(3ax^2+2bx+c)e^{-2x}-2(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-2x}=x^3e^{-2x}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части, получим систему

$$\begin{cases} -2a=1 \\ 3a-2b=0 \\ 2b-2c=0 \\ c-2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/2 \\ b=c=-3/4 \\ d=-3/8 \end{cases}. \text{ Отсюда } F(x)=\left(-\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}-\frac{3x}{4}-\frac{3}{8}\right)e^{-2x}.$$

Согласитесь, это проще, чем трижды интегрировать по частям.

3. Интеграл вида $\int \mathbf{e^{kx}(a\sin mx+b\cos nx)dx}$.

Интеграл будет иметь тот же вид $F(x)=e^{kx}(a\sin mx+b\cos nx)$.

Пример 13. $\int \sin(x/2)e^{2x}dx=e^{2x}(a\sin(x/2)+b\cos(x/2))$.

$$(e^{2x}(a\sin(x/2)+b\cos(x/2)))'=$$

$$=2e^{2x}(a\sin(x/2)+b\cos(x/2))+e^{2x}\left(\frac{a}{2}\cos(x/2)-\frac{b}{2}\sin(x/2)\right)=e^{2x}\sin(x/2).$$

Приравняем коэффициенты при $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$:

$$\begin{cases} 2a-b/2=1 \\ 2b+a/2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8/17 \\ b=-2/17 \end{cases}. \int \sin\frac{x}{2}e^{2x}dx=e^{2x}\left(\frac{8}{17}\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{17}\cos\frac{x}{2}\right)+C.$$

4. $\int \mathbf{P_n(x)\cos kx dx}$, где многочлен $P_n(x)$ имеет степень *n*.

Ищем интеграл в виде $F(x) = Q_{n-1}(x)\cos kx + S_n(x)\sin kx$, где Q_{n-1} и S_n - многочлены степени $(n-1)$ и *n* соответственно.

Пример 14. $\int (x^2 + 3x)\cos 2x dx$.

$F(x) = (ax+b)\cos 2x + (mx^2 + nx + p)\sin 2x$,

$F'(x) = a\cos 2x - 2(ax+b)\sin 2x + (2mx+n)\sin 2x + 2(mx^2 + nx + p)\cos 2x =$

$= (x^2 + 3x)\cos 2x.$

Приравняем коэффициенты при подобных слагаемых.

$$\begin{cases} 2m = 1 \\ 2n = 3 \\ a + 2p = 0 \\ -2a + 2m = 0 \\ -2b + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1/2 \\ n = 3/2 \\ a = 1/2 \\ b = 3/4 \\ p = -1/4 \end{cases}.$$

$\int (x^2 + 3x)\cos 2x dx = (x/2 + 3/4)\cos 2x + (x^2/2 + 3x/2 - 1/4)\sin 2x$.

Аналогичным образом ищется $\int \mathbf{P_n(x)\sin kx dx}$.

5. $\int \dfrac{\mathbf{P_n(x)dx}}{\sqrt{\mathbf{x^2 + a}}}$ Ищем первообразную в виде

$F(x) = Q_{n-1}(x)\sqrt{x^2 + a} + c\ln(x + \sqrt{x^2 + a}),$ где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен $(n-1)$ степени с неопределенными коэффициентами и *c* – неизвестное число.

Пример 15. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = (ax+b)\sqrt{x^2 + 2} + c\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)$

$$a\sqrt{x^2 + 2} + \frac{x(ax+b)}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{c}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} \qquad \Big| \sqrt{x^2 + 2}$$

$a(x^2 + 2) + x(ax+b) + c = x^2$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 2} - \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right).$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОДСТАНОВКА

Для интегрирования иррациональных выражений часто бывает удобно использовать тригонометрические подстановки $x = a\sin t$ и $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, которые позволяют избавиться от иррациональности в подынтегральной функции и приводят к интегрированию простых тригонометрических функций.

I. $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{a^2 - x^2}}\right)\mathbf{dx}$. В этом случае применяется подстановка

$x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt,\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\,|\cos t\,|$.

Примеры:

16. $I = \int \sqrt{3 + 2x - x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{в подкоренном выражении} \\ \text{выделяем полный квадрат}\end{matrix}\right\} = \int \sqrt{4 - (x-1)^2}\,dx =$

$$= \left\{\begin{array}{l} x - 1 = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t\,dt \\ t = \arcsin((x-1)/2) \end{array}\right\} = 4\int \cos^2 t\,dt = 2\int (1 + \cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Возвращаясь к переменной x и используя равенство $\cos\arcsin\alpha = \sqrt{1 - \alpha^2}$, получаем $I = 2\arcsin\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-1}{2}\sqrt{3 + 2x - x^2} + C$.

17. $I = \int x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \{x = 2\sin t\} = 16\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int \sin^2 2t\,dt =$

$$= 2\int (1 - \cos 4t)\,dt = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 4\arcsin\frac{x}{2} + C.$$

Используя тригонометрические формулы нетрудно показать, что $\sin 4\arcsin(x/2) = (x/2)(2 - x^2)\sqrt{4 - x^2}$.

Таким образом, $I = 2\arcsin(x/2) - (x/4)(2 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + C.$

II. $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{x^2 - a^2}}\right)\mathbf{dx}$. Применяется подстановка $x = \dfrac{a}{\cos t}$. Тогда

$dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t},\ \sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t.$

Пример 18.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}dx=\left\{x=\frac{5}{\cos t},dx=\frac{5\sin t}{\cos^2 t},\sqrt{x^2-25}=\frac{5\sin t}{\cos t}\right\}==\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}d\left(\sin t\right)=$$

$$=\{y=\sin t\}=\int\frac{y^2}{1-y^2}dy=\int\frac{\left(y^2-1\right)+1}{1-y^2}dy=-\int dy+\int\frac{1}{1-y^2}dy=-y+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем

$$x=\frac{a}{\cos t},\ \cos t=\frac{a}{x},\ y=\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$

Окончательно $I=-\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}-x}\right|+C.$

III. $\int\mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{a^2}+\mathbf{x^2}}\right)\mathbf{dx}$. Применяется подстановка $x=a\,\mathrm{tg}t$. Тогда

$$dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{|\cos t|}.$$

Примеры:

19. $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}=\{x=2\,\mathrm{tg}t\}=2\int\dfrac{dt}{\cos^2 t\sqrt{4\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)^3}}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\cos^3 t\,dt}{\cos^2 t}=$

$$=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Учитывая, что $\sin\mathrm{arctg}\alpha=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, получаем $I=\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$.

20. $\int\dfrac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}=\{x=\mathrm{tg}t\}=\int\dfrac{\cos t\,dt}{\cos^2 t\cdot\mathrm{tg}^3 t}=\int\dfrac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt=\int\dfrac{dt}{\sin^3 t}-\int\dfrac{dt}{\sin t}.$

Последние два интеграла были вычислены выше (см. §3, п. Интегрирование тригонометрических функций, примеры 4, 5).

IV. $\int\mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{ax}+\mathbf{b}}\right)\mathbf{dx}$. Подстановка $\sqrt[n]{ax+b}=t,\ \ x=\dfrac{t^n-b}{a},\ \ dx=\dfrac{nt^{n-1}}{a}.$

Пример 21.

$$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}=\left\{3x+1=t^3,dx=t^2\right\}=\frac{1}{3}\int(t^4+2t)dt=\frac{1}{3}t^2\left(\frac{t^3}{5}+1\right)=\frac{(x+2)}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C.$$

V. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Для интегрирования выражений вида $\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)dx$ в тех случаях, когда не удается вычислить интеграл путем использования простых приемов интегрирования тригонометрических функций, применяется подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
С помощью такой подстановки подынтегральная функция приводится к дробно-рациональному виду, интегрирование таких функций было рассмотрено в предыдущем пункте.

Примеры:

22. $$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \left\{ t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right\} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{2t^2+4} = \int \frac{dt}{t^2+2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C.$$

23. $$\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)} = \left\{ t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right\} = 2\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)4t\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)dt}{2t} = \frac{1}{4}\left(\ln t + \frac{t^2}{2} + C\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

Замечание. Если подынтегральная функция содержит только четные степени $\sin x$ и $\cos x$, вместо универсальной тригонометрической подстановки $t = \mathrm{tg}(x/2)$ целесообразно применить подстановку $t = \mathrm{tg}\,x$. В этом случае $x = \mathrm{arctg}\,t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Примеры:

24. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \{t = \mathrm{tg}\,x\} = \int \frac{(1+t^2)^2\,dt}{(1+t^2)t^4} = \int \frac{1+t^2\,dt}{t^4} =$$
$$= -\frac{1}{3}t^{-3} - t^{-1} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg}\,x + C.$$

25. $\int ctg^4 x\,dx = \{t = \mathrm{tg}\,x\} = \int \frac{dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)-t^2}{t^4(1+t^2)}\,dt =$

$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{(1+t^2)-t^2}{t^2(1+t^2)}\,dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} =$

$= -\frac{1}{3}t^{-3} + t^{-1} + \mathrm{arctg}\,t + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3\,x + \mathrm{ctg}\,x + x + C.$

VI. $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\right)\mathbf{dx}$. Эти интегралы приводятся к рациональному алгебраическому виду подстановкой $t = \mathrm{e}^x$. В этом случае $x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$.

Примеры:

26. $\int \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx = \left\{\mathrm{e}^x = t\right\} = \int \frac{t^2 - 2t}{(t^2+1)\,t}\,dt = \int \frac{(t-2)\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+1} -$

$-2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \ln\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1} - 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + C.$

27. $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}\,dx}{\mathrm{e}^x+2} = \left\{\mathrm{e}^x = t\right\} = \int \frac{t^3\,dt}{(t+2)\,t} = \int \frac{(t^2-4)+4}{t+2}\,dt = \int (t-2)\,dt +$

$+4\int \frac{dt}{(t+2)} = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4\ln|t+2| + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 4\ln|\mathrm{e}^x+2| + C.$

В заключение заметим, что рассмотренные методы, способы и приемы интегрирования, конечно, не исчерпывают всех аналитически интегрируемых элементарных функций и существующих приемов.

Из приведенных примеров видно, что интегрирование, в отличие от дифференцирования, требует не просто технических навыков, но опыта и изобретательности, которые приобретаются исключительно практикой решения большого количества примеров.

Контрольное задание №1.

В каждом варианте вычислить неопределенные интегралы, используя непосредственное интегрирование и метод замены переменных.

1.	*а*) $\int \left(\sin(x/2)+\cos(x/2)\right)^2 dx$	*б*) $\int x\exp(-x^2)\,dx$
2.	*а*) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$	*б*) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$
3.	*а*) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$	*б*) $\int \frac{3x+5}{x^2+9}dx$
4.	*а*) $\int \frac{x^4}{1-x^2}dx$	*б*) $\int x^2\sin(x^3)\,dx$
5.	*а*) $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$	*б*) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}dx$
6.	*а*) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$	*б*) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$
7.	*а*) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	*б*) $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$
8.	*а*) $\int \frac{x^2}{4+x^2}dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{x^5+7}dx$
9.	*а*) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$	*б*) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$
10.	*а*) $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$	*б*) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$
11.	*а*) $\int \sin^2(x/2)\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx$
12.	*а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(9-x)}}$	*б*) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
13.	*а*) $\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$	*б*) $\int x\sqrt{3+x}\,dx$
14.	*а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$	*б*) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

15.	*а*) $\int \frac{(\mathrm{arctg}\,x)^{100}\,dx}{1+x^2}$	*б*) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$
16.	*а*) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$	*б*) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$
17.	*а*) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$	*б*) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$
18.	*а*) $\int \frac{x^4-1}{x^2-1}\,dx$	*б*) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
19.	*а*) $\int \frac{\sqrt{x}+x^3 e^x+x^2}{x^3}\,dx$	*б*) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$
20.	*а*) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$	*б*) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$
21.	*а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$	*б*) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
22.	*а*) $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$	*б*) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
23.	*а*) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$	*б*) $\int \frac{x^2}{4+x^6}\,dx$
24.	*а*) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}\,dx$	*б*) $\int (5x-7)^{50}\,dx$
25.	*а*) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$	*б*) $\int \frac{3^{1/x}}{x^2}\,dx$

Контрольное задание №2.

В каждом варианте вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям. (В некоторых вариантах предварительно следует сделать замену переменной).

1.	$\int x \operatorname{arctg} x dx$	14.	$\int \ln^2 x\, dx$
2.	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^3}} dx$	15.	$\int e^{\sqrt{x}} dx$
3.	$\int x e^{3x} dx$	16.	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
4.	$\int \sin \sqrt[3]{x} dx$	17.	$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$
5.	$\int x^2 \cos x\, dx$	18.	$\int x^3 e^{-x} dx$
6.	$\int x \ln (x-1)\, dx$	19.	$\int \sqrt{x} \ln x\, dx$
7.	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$	20.	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$
8.	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	21.	$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
9.	$\int x \cos^2 x\, dx$	22.	$\int x \sin 3x\, dx$
10.	$\int (2x^3 + 3x^2 - 6x - 1) \ln x\, dx$	23.	$\int (3x^2 - 4x + 5) \sin x\, dx$
11.	$\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx$	24.	$\int x^3 \ln x\, dx$
12.	$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	25.	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$
13.	$\int (\arcsin x)^2 dx$	26.	$\int x^2 (\operatorname{arctg} x)\, dx$

Контрольное задание №3.

В каждом варианте вычислить неопределенные интегралы от а) тригонометрических функций, б) дробно-рациональных функций.

1.	*а*) $\int \sin^3 5x \cos 5x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x+2)(x^3+8)}\, dx$
2.	*а*) $\int (1+2\cos 4x)^2\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x-1)(x^3-1)}\, dx$
3.	*а*) $\int \sin 8x \cos 6x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x^2-4)(x^2+2)}\, dx$
4.	*а*) $\int \sin^5 2x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4-17}{(x^2-4x+3)(x^2+1)}\, dx$
5.	*а*) $\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4+5}{(x-1)^2(x^2-x+2)}\, dx$
6.	*а*) $\int \cos 2x \sqrt{\sin 2x}\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4+1}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\, dx$
7.	*а*) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4+4}{(x^2+2x)(x^2-x+1)}\, dx$
8.	*а*) $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2+x-1}\, dx$
9.	*а*) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx$
10.	*а*) $\int \sin^7 x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\, dx$
11.	*а*) $\int \cos 2x \sin^3 x\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$
12.	*а*) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$
13.	*а*) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$	*б*) $\int \frac{x^4+1}{x^3(x+1)}\, dx$

14.	*а*) $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4-2}{x^2(x^2+1)}dx$
15.	*а*) $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4+4}{x^2(x^2+1)}dx$
16.	*а*) $\int \cos^4 2x \sin 2x\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4-5}{(x+2)^2(x^2+2x+1)}dx$
17.	*а*) $\int \sin^3 4x\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4+1}{x(x-1)(x^2-2x+1)}dx$
18.	*а*) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$	*б*) $\int \frac{x^4+2}{(x+1)(x^3+1)}dx$
19.	*а*) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x-3)(x^3-27)}dx$
20.	*а*) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$	*б*) $\int \frac{x^4-4}{x^2(x^2-x+1)}dx$
21.	*а*) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$	*б*) $\int \frac{x^4}{(x^2+4)(x^2+3x+2)}dx$
22.	*а*) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$	*б*) $\int \frac{x^4+12}{(x^2+3)(x^2-4)}dx$
23.	*а*) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$	*б*) $\int \frac{x^4+1}{x(x+1)(x^2+1)}dx$
24.	*а*) $\int \sin^7 3x\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4-3}{(x-1)(x^3+1)}dx$
25.	*а*) $\int (\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^4 x)\,dx$	*б*) $\int \frac{x^4-3}{(x+2)(x^3-8)}dx$

§4. Определенный интеграл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками разбиения $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждом из полученных отрезков выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Обозначим длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Составим *интегральную сумму* для $f(x)$ на $[a;b]$, соответствующую данному разбиению и выбору промежуточных точек ξ_i

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

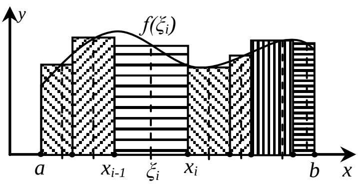

Рис.1.

Геометрический смысл интегральной суммы очевиден: это сумма площадей прямоугольников (рис.1).
Назовем *рангом разбиения* λ - длину наибольшего частичного отрезка разбиения:

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\}_{i=1}^{n}.$$

Определение. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по интервалу $[a;b]$ называется предел интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0, (n \to \infty)$, если этот предел существует, конечен, не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_i.

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

Здесь предел при $\lambda \to 0$ понимается в следующем смысле:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon : \ \lambda < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon \text{ при любом выборе точек } \xi_i .$$

Концы интервала $[a;b]$ называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, а функция $f(x)$ – *интегрируемой*.

Геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком $f(x)$ на интервале $[a;b]$ (если $f(x) \ge 0$) следует непосредственно из его определения.

СВОЙСТВА И ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Для $\forall a,b\in R$ полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx,\quad \int_a^a f(x)dx=0\,.$$

2. Аддитивность: для $\forall a,b,c\in R$ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,.$

3. Линейность: для $\forall \alpha,\beta\in R$

$$\int_a^b(\alpha\, f(x)+\beta\, g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\,.$$

4. Если для $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\geq 0\;(\leq 0)$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0\;(\leq 0)\,.$

5. Если для $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx\,.$

6. Для интегрируемой на $[a,b]$ $f(x)$ имеет место $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b\left|f(x)\right|dx\,.$

7. Если $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in[a,b]$, то

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a).$$

8. Интеграл от четной и нечетной функций по симметричному интервалу:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx,\text{ если } f(x) \text{ четная функция } f(-x)=f(x),$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0,\text{ если } f(x) \text{ нечетная функция } f(-x)=-f(x)\,.$$

9. Если $f(x)$ периодическая функция с периодом T, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx,\quad n\in Z.$$

ТЕОРЕМЫ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Теорема (достаточное условие интегрируемости функции).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

В то же время непрерывность не является необходимым условием интегрируемости функции. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Можно доказать, что существует определенный интеграл от ограниченных функций, имеющих конечное число точек разрыва на интервале, а также от монотонных и ограниченных функций (см. [1]).

2. Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то существует точка* $c \in [a;b]$ *такая, что* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

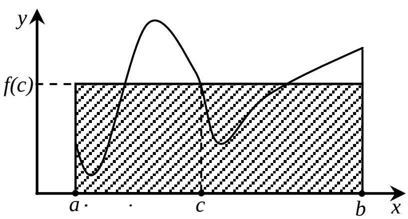

Рис.2.

Теорема о среднем говорит о том, что для непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x) \geq 0$ существует прямоугольник с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$, $(c \in [a;b])$, такой, что его площадь равна площади криволинейной трапеции (рис.2).

Доказательство. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения. То есть $\exists\ m, M$: для $\forall x \in [a,b]$ имеет место $m \leq f(x) \leq M$. По свойству 7 определенного интеграла $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ или $m \leq \mu = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a) \leq M$. По теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции $\exists\ c \in [a,b]$: $f(c) = \mu$. ■

3. Теорема Барроу об интеграле с переменным верхним пределом.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\in[a;b]$. Этот интеграл является функцией своего верхнего предела x.

Производная интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.

$$\boxed{\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\mathrm{a}}^{x} f(t)dt\right)=f(x).}$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА - ЛЕЙБНИЦА

На практике вычисление определенных интегралов основано на тесной связи между понятиями определенного и неопределенного интегралов. Эту связь устанавливает ***Основная теорема интегрального исчисления:***

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $F(x)$ - некоторая ее первообразная на этом отрезке. Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}.$$

Доказательство. По теореме Барроу функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$. Поскольку все первообразные данной функции отличаются на константу C, то любая первообразная непрерывной на сегменте $[a;b]$ функции $f(x)$ имеет вид $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C$. Полагая в последней формуле сначала $x=a$, а затем $x=b$ и используя свойство 1, получаем $F(a)=C,\ F(b)=\int\limits_a^b f(t)dt+C$, откуда немедленно следует формула Ньютона-Лейбница.

Пример 1. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x\Big|_{-1}^{1}=\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}(-1)=2\,\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{2}.$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Справедлива следующая формула замены переменной или подстановки:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Здесь $x=\varphi(t)$ -дифференцируемая, а $\varphi'(t)$ - непрерывная на $[\alpha;\beta]$ функции, причем $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$ При этом образ $\varphi([\alpha;\beta])$ входит в область непрерывности функции $f(x)$.

При вычислении определенного интеграла с помощью подстановки не обязательно возвращаться к старой переменной. Важно не забывать менять пределы интегрирования, соответствующие новой переменной.

Пример 2.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \left\{\begin{matrix} x = a\sin t, dx = a\cos t\, dt \\ 0\le t\le \pi/2 \end{matrix}\right\} = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

В данном примере следует обратить внимание на то, что $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t|$, но поскольку на интервале $[0;\pi/2]$ функция $\cos t$ положительна, то $|\cos t| = \cos t$.

Пример 3.

$$\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx = \left\{\begin{matrix} t=e^x, x=\ln t, dx=\dfrac{dt}{t} \\ 1\le t\le e \end{matrix}\right\} = \int_1^e\frac{t}{(1+t)t}dt = \ln(1+t)\Big|_1^e = \ln\frac{1+e}{2}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Для функций $u(x)$ и $v(x)$ непрерывных вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на интервале $[a;b]$ формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, также как и формула замены переменной, естественным образом обобщается на случай определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Пример 4.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{aligned} & u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ & dv = dx, v = x \end{aligned} \right\} = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Пример 5. В качестве примера применения формулы интегрирования по частям приведем вывод общих формул при любом $m \in N$ для интегралов

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx, \qquad \widetilde{I}_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx\,.$$

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

В правой части внеинтегральный член равен нулю. Заменяя $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$ имеем $I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m,$ откуда следует рекуррентная формула $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2},$ по которой интеграл I_m последовательно приводится к I_0 или I_1. Находим $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1.$ Имеем:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{при } m = 2n\,,$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}. \qquad \text{при } m = 2n+1.$$

Для $\widetilde{I}_m$ получаются точно такие же результаты либо непосредственным интегрированием, либо с помощью подстановки $x = \pi/2 - t$, которая переводит $\widetilde{I}_m$ в I_m. (Убедитесь в этом самостоятельно).

Используем понятие двойного факториала, которое означает произведение натуральных чисел, не превосходящих m и одной с ним четности: $m!! = m(m-2)(m-4)\ldots$(так, $6!! = 6\cdot 4\cdot 2,$ а $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$). Тогда получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Аналогичные формулы можно получить для интервалов $[0;\pi]$ и $[0;2\pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 2 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ 0 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x dx = \int_0^{2\pi} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 2\pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ 0 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Формулы удобны для практического использования, поскольку непосредственное вычисление этих интегралов хоть и не представляет сложности, но довольно трудоемко.

§5. Приложения определенного интеграла.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Площадь криволинейной трапеции.

Из определения интеграла как предела интегральных сумм следует, что определенный интеграл от непрерывной и неотрицательной на $[a;b]$ функции $f(x)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a;b]$ оси Ox, прямыми $x=a, x=b$ и графиком функции $y=f(x)$:

$$\boxed{\mathrm{S}_{\text{трапеции}} = \int_a^b f(x)dx.} \qquad (1)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Ясно, что если $f(x)\le 0$ на $[a;b]$, т $\mathrm{S} = -\int_a^b f(x)dx.$

В общем случае $\mathrm{S} = \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx$ (рис.3).

Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем для $\forall x \in [a;b]$ $f_1(x) \le f_2(x)$. Площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a,\ \ x=b$, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathrm{S} = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.} \qquad (2)$$

Заметим, что формула (2) справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, не обязательно положительных (рис.4).

Доказательство этой формулы основано на свойстве аддитивности площади, которое часто используется при практических вычислениях.

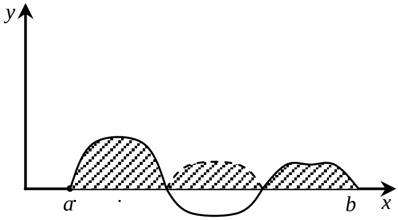

Рис.3

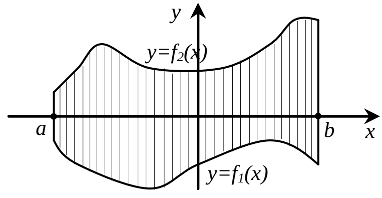

Рис.4.

Пример 1. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = 1/x^2, y = 0, x = 3$ (Рис.5).

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{x}\right|_1^3 = \frac{7}{6}.$$

Пример 2. Найти площадь S, ограниченную графиками функций $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_1(x) = -8x - 7$ и $f_2(x)$, график которой является касательной к графику $f(x)$ в точке $(3{,}5)$. (Рис.6).

Как известно, уравнение касательной к кривой в точке (x_0, y_0) имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, в данном случае $y - 5 = 4(x - 3)$, т.е. $f_2(x) = 4x - 7$. Пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Чтобы найти точку пересечения параболы и прямой, решим систему $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -8x - 7 \end{cases}$. Имеем: $x_1 = -3, x_2 = 3$. (Заметим, что прямая $y = -8x - 7$ также является касательной к параболе в точке $x_1 = -3$). Тогда

$$\mathrm{S} = \int_{-3}^{0} \left(f(x) - f_1(x)\right)dx + \int_0^3 \left(f(x) - f_2(x)\right)dx = \int_{-3}^{0} \left(x^2 - 2x + 2 - (-8x - 7)\right)dx +$$

$$+ \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)\right)dx = \int_{-3}^{0} (x^2 + 6x + 9)\, dx + \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} (x+3)^2\, dx + \int_0^3 (x-3)^2\, dx = \left.\frac{(x+3)^3}{3}\right|_{-3}^{0} + \left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3 = 9 + 9 = 18.$$

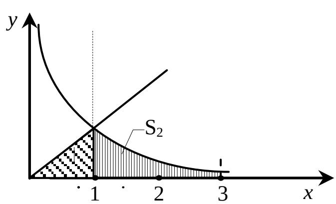

Рис.5.

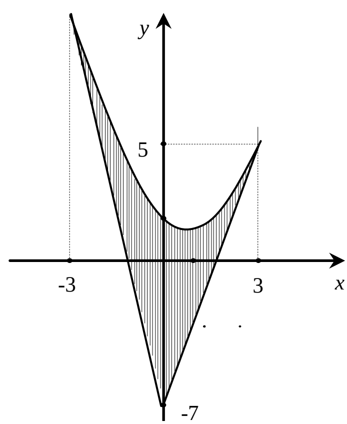

Рис.6.

Если функция задана параметрически $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, $\varphi'(t)\neq 0 \forall t\in(\alpha;\beta)$, для вычисления площади криволинейной трапеции в формуле (1) надо сделать замену переменной $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt.$ Тогда

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)dt. \tag{3}$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды[1] $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ (Рис.7).

По формуле (3) имеем:

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

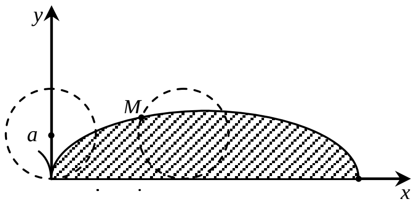

Рис.7

Искомая площадь оказалась равной утроенной площади круга радиуса a.

Указание: Самостоятельно выведите с помощью интегрирования известную формулу для площади круга радиуса R: $S=\pi R^2$.

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta,$ где $\rho(\varphi)\ge 0$ - непрерывная на $[\alpha;\beta]$ функция и точкам A и B соответствуют значения α и $\beta.$ Плоская фигура, ограниченная кривой AB и полярными лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ называется *криволинейным сектором* (рис.8). Площадь сектора может быть вычислена по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

---

[1] Циклоида – плоская кривая, которую описывает точка М окружности радиуса *а*, когда окружность катится по прямой линии.

Разобьем произвольно отрезок $[\alpha;\beta]$ на n частей точками $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\ldots<\varphi_n=\beta,$ выберем на каждом отрезке произвольную точку $\xi_i\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]$ и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$. Площадь каждого сектора $S_i=\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$. Составим интегральную сумму, соответствующую данному разбиению $S_n=\sum_{i=1}^{n}S_i$. Площадь сектора OAB есть предел интегральных сумм при стремлении к нулю ранга разбиения λ, где, как и ранее, $\lambda=\max\{\Delta\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, откуда и следует формула (4).

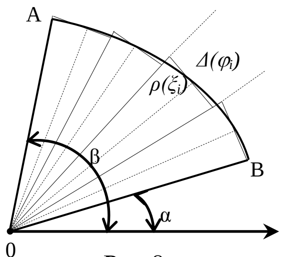

Рис.8

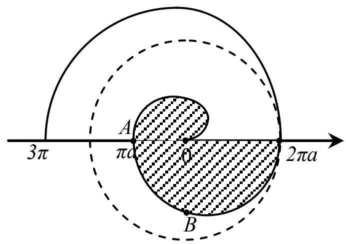

Рис.9

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho(\varphi)=a\varphi$ $(a>0)$ (рис.9).

Первый виток спирали соответствует изменению полярного угла φ от 0 до 2π. Полярный радиус опишет кривую, ограничивающую криволинейный сектор *OABC*. По формуле (4) $S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\varphi=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$

Площадь этой фигуры равна 1/3 площади круга с радиусом $R=2\pi a,$ т.е. площадь витка спирали равна трети площади круга – этот результат был известен еще Архимеду.

ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

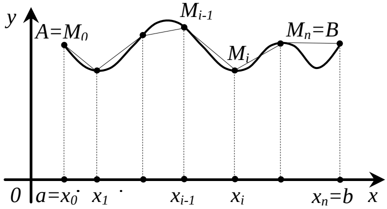

Рис.10.

Пусть плоская кривая *AB* задана уравнением $y=f(x),\ a\le x\le b,$ где $f(x)$ - дифференцируемая на $[a,b]$ функция. Разобьем *AB* на n произвольных частей точками $A=M_0,M_1,\ldots,M_{i-1},M_i,\ldots,M_n=B$ в направлении от A к B. Пусть

$\mu = \max\{\Delta l_i\}_{i=1}^{n}$ - *ранг разбиения*, где $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$ - длина i-го звена (рис.10). Длина полученной ломаной равна сумме $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Длиной L кривой AB называется предел сумм S_n при $n \to \infty, \mu \to 0$, если этот предел существует, конечен, не зависит от выбора точек M_i :

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Справедлива формула (см., например, [3]):

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.} \qquad (5)$$

Пример 5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 5$.

По формуле (5) имеем: $L = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}dx = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}$.

Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме.

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $(\alpha; \beta)$ вместе со своими производными.

Если $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (\alpha, \beta)$, то данные параметрические уравнения определяют на промежутке $[a;b] = \varphi([\alpha;\beta])$ функцию $y = f(x)$, производная которой вычисляется по формуле $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ Подставляя в формулу (5) выражение для y' и делая замену переменной $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, получим:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \, |\varphi'(t)dt| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt. \qquad (6)$$

Если же в каких-то точках $t_1, t_2, \ldots, t_k$ $\varphi'(\mathrm{t}) = 0$, то разобьем промежуток $[\alpha;\beta]$: $[\alpha;\beta] = [\alpha;t_1] \bigcup [t_1;t_2] \bigcup \ldots \bigcup [t_k;\beta]$. Внутри каждого из промежутков разбиения $\varphi'(t) \neq 0$. Поэтому можно использовать формулу (6) для вычисления длин тех дуг, которые получились в результате разбиения:

$$L=\int_{\alpha}^{t_1}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt+\ldots+\int_{t_k}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt.$$

Пример 6. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды (Рис.7).

Из уравнения циклоиды $\varphi'(t)=a(1-\cos t),\ \psi'(t)=a\sin t.$ Одна арка соответствует изменению параметра t от 0 до $2\pi,$ при этом x пробегает отрезок $[0;2\pi a]$. По формуле (6) имеем:

$$L=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2(t)}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

Замечание. Как известно, $\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Важно учитывать, какой знак имеет подкоренное выражение на рассматриваемом интервале. В данном случае на интервале $[0;2\pi]$ $\sin\frac{t}{2}\ge 0,$ поэтому $\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}.$

Указание. Самостоятельно покажите с помощью интегрирования, что длина L окружности радиуса R равна $2\pi R.$

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах.

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(t),\alpha\le t\le\beta,$ где $\rho(t)\ge 0, \rho(t)$ и $\rho'(t)$ - непрерывные на $[\alpha;\beta]$ функции и точкам A и B соответствуют значения α и $\beta.$ Переходя от полярных координат к декартовым, получим параметрическое задание кривой уравнениями $x=\varphi(t)=\rho(t)\cos t, y=\psi(t)=\rho(t)\sin t$ с параметром t. Тогда

$$\begin{cases} x'(t)=\varphi'(t)=\rho'(t)\cos t-\rho(t)\sin t,\\ y'(t)=\psi'(t)=\rho'(t)\sin t+\rho(t)\cos t,\end{cases}$$

и формула (6) принимает вид:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(t)+\rho'^2(t)}\,dt. \qquad (7)$$

Пример 7. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $\rho(t)=at\ \ (a>0)$ (рис.9).

По формуле (7) искомая длина дуги равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2+a^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2+1}\,dt=a\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^{2\pi}=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

При интегрировании использован результат, полученный в формуле (6) §2.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть кривая *AB* задана уравнением $y=f(x), a\le x\le b$, и пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением кривой *AB* вокруг оси *Ox* (рис.11), имеет площадь S, которая вычисляется по формуле:

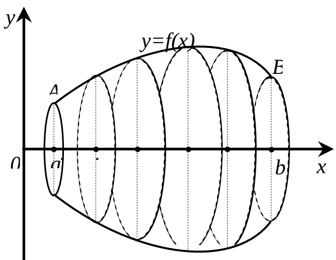

Рис.11.

$$\boxed{S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.} \qquad (8)$$

Строгое доказательство формулы (8) см., например, в [3].

Замечание. Если поверхность получается вращением кривой AB, заданной уравнением $x=\varphi(y),\ c\le y\le d,$ вокруг оси *Oy*, то ее площадь

$$S=2\pi\int_c^d\varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy.$$

Пример 8. Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, называется *шаровым поясом*. Вычислить площадь поверхности шарового пояса радиуса *R* и высоты *H* (рис.12).

Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность тела, полученного при вращении дуги окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, где $a\le x\le b,\ b-a=H,$ вокруг оси *Ox* (рис.13).

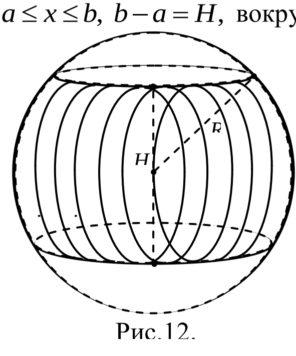

Рис.12.

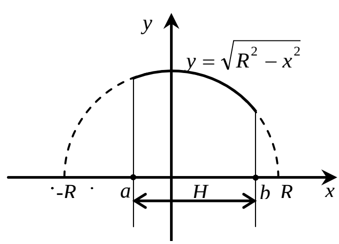

Рис.13.

Тогда $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, $1 + y'^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$ и по формуле (8)

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b-a) = 2\pi RH.$$

Итак, площадь поверхности шарового слоя $S = 2\pi RH.$ Если $H = 2R,$ то получим известную формулу для площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2.$

Указание. Найдите самостоятельно площадь S боковой поверхности конуса высоты *H* и радиусом основания *R*. (Ответ: $S = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$).

Площадь поверхности, заданной параметрически.

Пусть поверхность получается вращением вокруг оси *Ox* кривой *AB*, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$, причем $\psi(t) \ge 0,\ \varphi(t)$ монотонно изменяется от a до b при изменении t от α до β Производя в интеграле (8) замену переменных $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ получим:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (9)$$

Пример 9. Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t), \mathrm{y} = a(1 - \cos t)$ вокруг оси *Ox* (рис.7).

По формуле (9)

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + [a(1-\cos t)]^2(t)}\, dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{3/2}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\cos\frac{t}{2} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Если кривая *AB* задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(t),\ \ 0 \le \alpha \le t \le \beta \le \pi,$ где $\rho(t) \ge 0, \rho(t)$ и $\rho'(t)$ - непрерывные на $[\alpha;\beta]$ функции, то этот случай, как было показано выше, с помощью формул перехода $x = \rho(t)\cos t, y = \rho(t)\sin t$ приводится к параметрической форме задания кривой и формула (9) принимает вид:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin t \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\, dt.$$

ОБЪЕМ ТЕЛА

Пусть на интервале $[a;b]$ известны площади сечений $S(x)$ некоторого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox (рис.14). Будем считать $S(x)$ непрерывной на $[a;b]$ функцией. Составим интегральные суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$. и перейдем к пределу при стремлении ранга разбиения $\lambda = \max\{\Delta x_i\}_{i=1}^{n}$ к нулю. Для объема тела V справедлива формула

$$V = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \qquad (10)$$

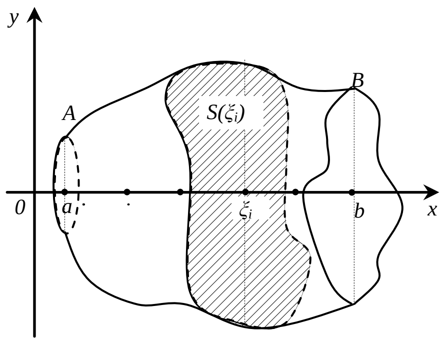

Рис.14.

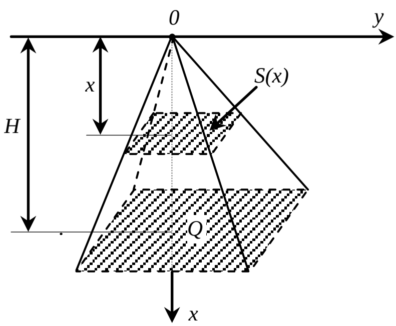

Рис.15.

Пример 10. Найти объем пирамиды высоты H с площадью основания Q.

Введем систему координат Oxy так, как показано на рис.15. Пересечем пирамиду плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии от вершины равном x, $0 \le x \le H$. Для площади сечения $S(x)$ можно записать $\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}$. Здесь использован известный из элементарной геометрии факт, что площади подобных фигур пропорциональны квадрату их линейных размеров. Подставляя выражение для $S(x)$ в формулу (10) получим известную формулу для объема пирамиды

$$V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}QH.$$

Если тело образовано вращением графика непрерывной функции $y = f(x),\ a \le x \le b$ вокруг оси *Ox*, то сечения тела плоскостями, перпендикулярными оси *Ox* и проходящими через точку *x*, представляют собой круги радиуса $f(x)$ (рис.15). Поэтому $S(x) = \pi\ f^2(x)$. И объем тела вращения

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.} \tag{11}$$

Замечание. Если график непрерывной функции $x = \varphi(y),\ c \le y \le d,$ вращается вокруг оси *Oy*, то объем тела вращения

$$V = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

В общем случае, когда криволинейная трапеция ограничена снизу и сверху функциями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и $\forall x \in [a;b]\quad 0 \le f_1(x) \le f_2(x)$, то, очевидно, объем тела вращения

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left(f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x)\right)dx.} \tag{12}$$

Формула следует из свойства аддитивности объема, которое может быть использовано при вычислении объемов, получающихся путем сложения или вычитания объемов тел вращения.

Пример 11. Найти объем эллипсоида вращения, который получается при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси *Ox*.

$y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$. Тогда по формуле (11)

$$V = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

(Если $a = b = R,$ получим для объема шара известное значение $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$).

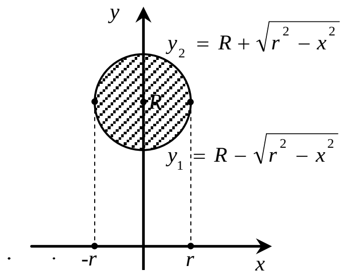

Рис.16.

Пример 12. Найти объем тора. Тор цо, бублик) – поверхность, получаемая вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр (рис.16).

Пусть окружность радиуса r, центр которой расположен на расстоянии $R>r$ от оси Ox, вращается вокруг оси Ox. Получаемое при этом тело вращения и есть тор. Уравнение окружности $x^2 + (y-R)^2 = r^2$, откуда

$$y_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},\ \ y_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}.$$

По формуле (12)

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left[\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 - \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right]dx = 8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$

$$= 8\pi R\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2.$$

(Здесь использована формула (5) §2). Итак, объем тора $V = 2\pi^2 Rr^2$.

Полученная формула имеет наглядную интерпретацию. Если площадь круга $S = \pi r^2$ умножить на длину окружности $L = 2\pi R,$ которую при вращении описывает центр этого круга, то получим искомый объем. Это объем цилиндра с основанием радиуса r и высотой $2\pi R,$ в который превратится тор, если «разрезать его поперек и вытянуть».

Указание. Самостоятельно вычислите площадь поверхности тора, используя формулу (8). (Ответ очевиден из геометрических соображений: $S = 4\pi^2 Rr$).

Объем тела вращения, заданного параметрически.

В случае параметрического задания кривой, вращающейся вокруг оси Ox, формула (11) естественным образом записывается как

$$V = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,dt. \tag{13}$$

Здесь, как и ранее, $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ \alpha \le t \le \beta.$

Пример 13. Найти объем тела, полученного вращением первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$ вокруг оси *Ox* (рис.7).

По формуле (13) имеем

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 16\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\, d\,\frac{t}{2} = 16\pi a^3 \frac{5!!}{6!!} \cdot \pi = 5\pi^2 a^3.$$

(При вычислении использовались формулы §4, полученные для $\int_0^{2\pi} \sin^m x dx$).

Итак, в данном параграфе было рассмотрено, как с помощью определенного интеграла вычисляются площади, длины и объемы различных геометрических объектов. Во всех задачах, приводящих к понятию определенного интеграла, была использована одна и та же идея. Приближенное значение искомой величины представлялось в виде интегральной суммы, а затем предельным переходом получалось точное значение в виде интеграла. Конечно, этим не исчерпываются все приложения определенного интеграла. С его помощью можно решать ряд других задач механики и физики, например, находить координаты центра тяжести и статические моменты плоских фигур, работу, совершаемую переменной силой по перемещению материальной точки и др. (подробнее см. [1]).

§6. Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы представляют собой обобщение понятия определенного интеграла в случае, когда интервал интегрирования бесконечен либо подынтегральная функция не ограничена.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ I РОДА

Это интегралы по бесконечному интервалу $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ или $(-\infty;+\infty)$.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то *несобственный интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся.

В противном случае говорят, что *интеграл расходится*.

Аналогично определяется сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходятся оба интеграла $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ при любом c, и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$.

Геометрический смысл несобственного интеграла очевиден: если $f(x)\ge 0$, то значение интеграла равно площади неограниченного множества между осью Ox и графиком функции (рис.17). Несмотря на то, что множество не ограничено, оно может иметь конечную площадь, в этом случае интеграл сходится; если же площадь бесконечна, то интеграл расходится.

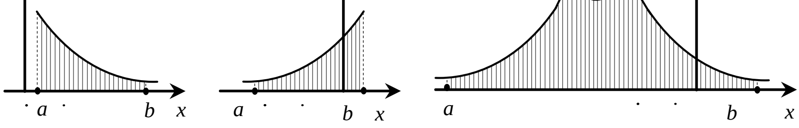

Рис.17.

Пример 1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$. Интеграл расходится.

Замечание. В дальнейшем для сокращения записи будем опускать знак предела и записывать $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$, подразумевая $\lim\limits_{x\to+\infty}$ в верхнем пределе интегрирования (рис.18).

Пример 2. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_{-\infty}^{-1} = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 1$. Интеграл сходится (рис.19).

Пример 3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Интеграл сходится (рис.20).

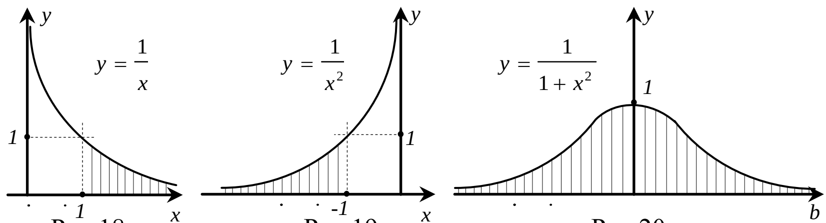

Рис.18. Рис.19. Рис.20.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ II РОДА

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции).
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Заметим, что обратное неверно: ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости. Говоря об определенном интеграле, мы предполагали интегрируемость подынтегральной функции.

Если функция $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, то интеграл называется несобственным интегралом II рода.

А именно, пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(a,b]$ и не ограничена в окрестности точки a.

$\boxed{\textbf{\textit{Определение}}}$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, то *несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ называется *сходящимся*.

В противном случае говорят, что *интеграл расходится*.

Аналогично определяется сходимость несобственного интеграла в случае функции, неограниченной в окрестности точки b:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности внутренней точки $c\in(a;b)$, то необходимо рассматривать два интеграла $\int\limits_a^c$ и $\int\limits_c^b$. Для сходимости несобственного интеграла в этом случае требуется сходимость каждого из интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0+}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0+}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла как площади неограниченной криволинейной трапеции очевиден (рис.21).

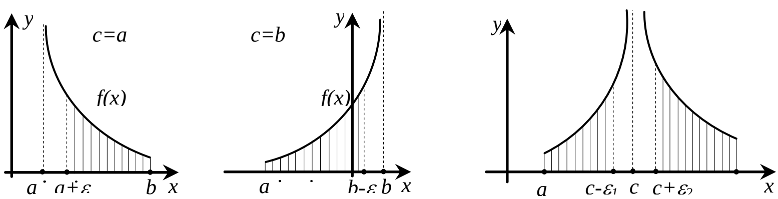

Рис.21.

Для несобственных интегралов верна формула Ньютона-Лейбница, в которой значения первообразной функции $F(x)$ в бесконечно удаленной точке или в точке разрыва понимаются как пределы $F(x)$ в этой точке.

Пример 4. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = -\lim\limits_{x\to 0}\ln x = +\infty.$ Интеграл расходится.

Пример 5. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^4 = 4.$ Интеграл сходится.

Пример 6. Рассмотрим $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$ Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=0,$ поэтому интеграл следует разбить на два, каждый из которых расходится, следовательно, исходный интеграл тоже расходится.

Пример 7. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Свойства обычных определенных интегралов естественным образом переносятся на несобственные интегралы (конечно, в случае сходимости последних). Для исследования сходимости несобственных интегралов важную роль играют ***признаки сходимости***.

1. *Признак сравнения*. Рассмотрим два интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ \ (\mathrm{I}) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g(x)dx \ \ (\mathrm{II}).$$

Если для $\forall x \in \langle a;b\rangle$ $0 \le f(x) \le g(x),$ то из сходимости интеграла (II) следует сходимость (I), а из расходимости (I) расходимость (II). (Считаем, что a и b могут быть бесконечно удаленными точками).

2. *Предельный признак сравнения.*

а) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны для всех $x \ge x_0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0.$ Тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b)$ и не ограничены в окрестности точки b. Пусть, далее, они неотрицательны в окрестности точки b и существует конечный $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0.$ Тогда

$\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно. Разумеется, аналогичное утверждение верно и для точки a.

3. *Абсолютная сходимость.* Если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$, то $\int_a^b f(x)dx$ также сходится. В этом случае говорят, что интеграл *сходится абсолютно*.

Для практического исследования сходимости полезно иметь набор *эталонных функций сравнения*. В качестве таких функций рассмотрим функции вида

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \to \infty$, б) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, $x \to a$, в) $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, $x \to b$.

Исследуем сходимость несобственных интегралов от этих функций.

а) Интеграл I рода по бесконечному промежутку:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ интеграл расходится, как было показано в примере 1. Ясно, что в качестве нижнего предела интегрирования можно взять $\forall a > 0$. Итак,

$$\boxed{\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при } \alpha > 1, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha \le 1. \end{cases}}$$

б) Интеграл II рода от неограниченной в окрестности нуля функции:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ интеграл расходится, как было показано в примере 4. Итак,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при } \alpha < 1, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha \ge 1. \end{cases}}$$

Последний результат легко обобщается на случай функции неограниченной на левом или правом конце интервала интегрирования:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{или} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при } \alpha < 1, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha \ge 1. \end{cases}$$

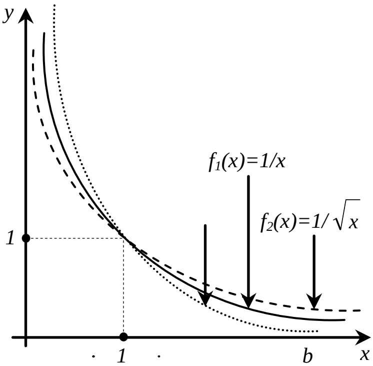

Рис.22.

На рис.22 схематично показано поведение функций сравнения на интервалах (0;1) и $(0;+\infty)$ для

$$f_1(x)=\frac{1}{x},\ f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ \text{и}\ f_3(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Пример 8. Рассмотрим

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}=\int_0^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}+\int_3^{b}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}+\int_b^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}},$$

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}=\int_0^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}+\int_3^{b}\frac{dx}{(x-3)^2}+\int_b^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^2},\ b>3.$$

Оба интеграла расходятся, так как в первом случае расходится интеграл по бесконечному промежутку, а во втором – интеграл от неограниченной функции.

Пример 9. $I_1=\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx,\qquad I_2=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

Исследуем сходимость этих несобственных интегралов I рода по предельному признаку сравнения. Подынтегральные выражения при $x\to\infty$ представляют собой бесконечно малые порядка ½ и 2 соответственно. Следовательно, I_1 расходится, а I_2 сходится.

Пример 10. $I=\int_0^{1}\frac{dx}{\sin(x^2)}$ несобственный интеграл II рода от неограниченной в окрестности нуля функции. Поскольку $\sin(x^2)\underset{x\to0}{\approx}x^2$, то $I\approx\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ и интеграл расходится. (Здесь и далее значок $\approx$ означает эквивалентность).

Пример 11. $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x dx}{x^2}$. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\cos x dx}{x^2}\right| \le \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, последний интеграл сходится, значит, сходится и исходный, причем абсолютно. Легко показать, что $\int\limits_0^\infty \frac{\cos bx dx}{k^2+x^2}$ и $\int\limits_a^\infty \frac{\sin bx dx}{k^2+x^2}$ сходятся абсолютно при $\forall b \in R,\ \ k>0,\ \ a>0.$

Для несобственных интегралов верны формулы интегрирования по частям и замены переменной с учетом сходимости интегралов.

Пример 12. $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$ представляет собой интеграл по бесконечному промежутку. Кроме того, при $x=0$ подынтегральная функция не определена. Пользуясь свойством аддитивности, разобьем интеграл на два $I = \int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty = I_1 + I_2$. Согласно первому замечательному пределу, подынтегральная функция ограничена в окрестности точки $x=0$, и, следовательно, первый из интегралов несобственным не является. Докажем сходимость I_2 с помощью интегрирования по частям.

$$I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x dx}{x} = \begin{Bmatrix} u = \frac{1}{x}, & du = -\frac{dx}{x^2}, \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x dx}{x^2}.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ как произведение бесконечно малой функции на ограниченную, а сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x dx}{x^2}$ показана в примере 11. Значит, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$ сходится. Аналогично $\int\limits_a^\infty \frac{\cos x dx}{x}$ сходится при $\forall a > 0.$

Заметим, что $\int\limits_0^a \frac{\cos x dx}{x}$ расходится, т.к. при $0 < a < \pi/2$ выполнено $\int\limits_0^a \frac{\cos x dx}{x} > \cos a \int\limits_0^a \frac{dx}{x}$.

Можно показать (см. [1]), что при $a>0$ и $\alpha>0$ сходятся интегралы

$$\int_a^\infty \frac{\sin xdx}{x^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^\infty \frac{\cos xdx}{x^\alpha}.$$

Пример 13. $I=\int_0^\infty \sin(x^2)dx.$ Сделаем замену переменной $x^2=t,\ x=\sqrt{t},\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}},\ t\in(0,\infty).$ Тогда $I=\dfrac{1}{2}\int_0^\infty \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$ Этот интеграл сходится, т.к. при $t\to 0$ подынтегральная функция эквивалентна $\sqrt{t}$, а $\int_a^\infty \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ сходится (замечание к примеру 12). Интересно отметить, что подынтегральная функция $f(x)=\sin(x^2)$ при $x\to\infty$ не стремится ни к какому пределу, а сам интеграл в элементарных функциях не выражается.

Пример 14. В заключение рассмотрим пример вычисления несобственного интеграла II рода $I=\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$ Выполнив подстановку $x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t, t\in(-1;1)$ имеем:

$$I=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{4}-\dfrac{(b-a)^2}{4}t^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-1}^{1}=\pi.$$

Интересно, что площадь неограниченного множества под графиком данной функции не зависит от интервала $[a,b]$ и остается постоянной, равной π.

Контрольное задание №4.

В каждом варианте вычислить:

а) Площадь фигуры (S), ограниченной заданными кривыми.
б) Длину дуги (L) кривой на интервале $[a;b]$ или

Объем тела (V), полученного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями.

В пунктах а) и б) изобразить кривые на рисунке.
в) Несобственный интеграл, если он существует.

	а)	б)	в)
1.	$y=x^2-x-2,$ $3y+2x=8,\ y=x+1$	$L: y^2=x^3,$ $x\in[0;4/3]$	$\int\limits_0^1 \frac{1-2x^2+x^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
2.	$y=-x^3,\ y=0,$ $x=-2,\ x=1$	$V: y^2=2px,\ x=h$ вокруг оси Ox	$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^x\,dx$
3.	$y=(x-1)^3,$ $y=3x-1$	$L: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$	$\int\limits_0^1 \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{x^5}\,dx$
4.	$y=(x-1)^3, y=-(x+1)^3$ $5y=7x+19$	$V: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, y=\pm b$ вокруг оси Oy	$\int\limits_0^{\infty} x\exp(-x^2)\,dx$
5.	$y=e^x,$ $2y+x=2,\ x=2$	$L: y^2=(x+1)^3,$ $x\in[-1;4]$	$\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
6.	$y=e^x,\quad x=e^y,$ $x+y=1,\ x+y=e+1$	$V: y^2=(x+4)^3, x=0$ вокруг оси Oy	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+5}$
7.	$y=\ln x,$ $(e^2-1)y=2(x-1)$	$L: y=\frac{x^2}{2}-1,$ $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$	$\int\limits_2^3\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
8.	$y=\sin\pi x,$ $4y=3\sqrt{3}x$	$V: y^2=4-x,\quad x=0$ вокруг оси Oy	$\int\limits_0^1 x^2\ln x\,dx$

9.	$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \sin x,$ $x = \pi/4$	$y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a},$ $x \in [-a; a]$	$\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$
10.	$xy^2 = 1,$ $x = 0, \ x = 1$	$V: (y-a)^2 = ax, x = 0,$ $y = 2a$ вокруг оси Ox	$\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} 2x\, dx$
11.	$x^2 + y^2 = 1,$ $(x-1)^2 + y^2 = 1$	$L: y = \ln x,$ $x \in [3/4; 12/5]$	$\int\limits_0^{2} \dfrac{x^3}{\left(x^4 - 1\right)^3}\, dx$
12.	$y = (x-4)^2,$ $y = \sqrt{16 - x^2}$	$V: y = a - \dfrac{x^2}{a},$ $x + y = a$ вокруг Oy	$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$
13.	$y = e^x, \quad y = e^{-x},$ $x = \pm 1, \ y = 0$	$L: y = \ln(2\cos x),$ $x \in [0; \pi/3]$	$\int\limits_0^{1} \dfrac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\, dx$
14.	$x^2 + y^2 = 3,$ $x + y = 0, \quad y = 0$	$V: x^2 - y^2 = 4, y = \pm 2$ вокруг оси Oy	$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
15.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$L: y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1},$ $x \in [a; b]$	$\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$
16.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ $x = b \quad (b > a)$	$V: y = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x = \pm 1,$ $y = 0$ вокруг оси Ox	$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}$
17.	$y = \dfrac{1}{1+x^2}, y = \dfrac{x^2}{2}$	$L: 9y^2 = x(x-3)^2,$ $x \in [0; 3]$	$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x+1}{x^2}\, dx$
18.	$x^2 + y^2 = 8, \ y = \dfrac{x^2}{2}$	$V: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy	$\int\limits_{-\infty}^{0} x e^x\, dx$
19.	$x^2 + y^2 = 16, \ y^2 = 6x$	$L: y = \ln(1 - x^2),$ $x \in [0; 1/2]$	$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\arcsin x}{x^2}\, dx$

20.	$y = x - x^2\sqrt{x},\quad x = 0$	$V: x^2 - y^2 = a^2 4,$ $x = \pm 2a$ вокруг Ox	$\int_{-1}^{\infty} x e^{-x}\,dx$
21.	$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 - 2y^2 = 1$	$L: y = \sqrt{x - x^2} +$ $+ \arcsin\sqrt{x}$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$
22.	$y = x^2 e^{-x},\ y = 0$	$V: (y-3)^2 + 3x = 0,$ $x = -3$ вокруг оси Ox	$\int_0^{\infty} x\cos x\,dx$
23.	$(y - x)^2 = x^5,\quad x = 4$	$L: y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3,$ $x \in [-1;2]$	$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$
24.	$y^2 = x^2 - x^4$	$V: y = \arcsin x,\quad x = 0$ вокруг оси Ox	$\int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}dx}{x^2}$
25.	$y^2 = \left(1 - x^2\right)^3$	$L: y = \ln(\sin x),$ $x \in [\pi/3; 2\pi/3]$	$\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^2}$

Литература.

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. М., «Наука»,1964.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М., «Наука»,1967.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математики. М., Высшая школа, 1994.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб., Изд-во «Профессия», 2003.
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М., Высшая школа, 1994.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., «Наука»,1987.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.