

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.97

*М. С. Никольский*¹, *Е. А. Беляевский*²**ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л. С. ПОНТРЯГИНА
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ***¹ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Российская Федерация,
119991, Москва, ул. Губкина, 8² Российский университет дружбы народов, Российская Федерация,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В статье рассматриваются некоторые оптимизационные задачи оптимального управления пучками траекторий нелинейных управляемых систем для случая минимизации интегрального функционала общего вида. В таких задачах начальное состояние управляемой системы считается принадлежащим заданному компактному положительной лебеговой меры. Подобные управляемые системы возникают, например, при описании динамики заряженных частиц (Д. А. Овсянников и др.), а также в задачах управления с неполной информацией. Важной задачей в теории управления пучками траекторий является доказательство принципа максимума Л. С. Понтрягина. В работе продолжены исследования Д. А. Овсянникова по этой задаче. Для случая интегрального функционала и мгновенных геометрических ограничений на управление доказывается принцип максимума Л. С. Понтрягина в классе измеримых по Лебегу управлений (раньше предполагалась кусочная непрерывность управлений). При этом используется классическая техника вариаций измеримого оптимального управления с соответствующими изменениями. Отметим, что полученный принцип максимума по форме несколько отличается от предложенного ранее другими авторами. В конце статьи приведено замечание, принадлежащее Д. А. Овсянникову, в котором устанавливается связь между различными формулировками принципа максимума. В качестве иллюстрации изучен случай линейного управляемого объекта. Для него основное соотношение принципа максимума Л. С. Понтрягина выписывается в более простой форме, нежели в общем нелинейном случае. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: управляемый объект, пучки траекторий, принцип максимума.

Никольский Михаил Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор;
mni@mi.ras.ru

Беляевских Елена Анатольевна — аспирант; bel.elena.anat@gmail.com

Nikolskii Mikhail Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor;
mni@mi.ras.ru

Belyaevskikh Elena Anatolyevna — postgraduate student; bel.elena.anat@gmail.com

* При подготовке работы М. С. Никольский пользовался поддержкой программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAC-18-01).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

L. S. PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE FOR SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS BY TRAJECTORIES PENCILS

¹ Steklov Mathematical Institute of RAS, 8, Gubkina ul., Moscow, 119991, Russian Federation

² People's Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklai ul., Moscow, 117198, Russian Federation

In this paper we consider some optimal problems for pencils of trajectories of nonlinear control systems, when integral functional of general type is minimized. For these problems an initial state of control system belongs to some compact set with positive Lebesgue measure. Such control systems are connected, for example, with study of control pencils of charged particles in physics (D. A. Ovsyannikov and other) and in problems of control when initial state of control system is known with error. An importance problem in this field is proof of Pontryagin's maximum principle. In the paper we continue research of Ovsyannikov on this problem. We have proved the Pontryagin's maximum principle for the case of integral functional and instantaneous geometric restrictions on control for Lebesgue measured control functions (previously piecewise continuous control functions were considered in literature). We used classical techniques of variations for measured optimal control function with some modifications. We note that our form of Pontryagin's maximum principle is distinguished from some another forms. In the end of our paper there is a remark of D. A. Ovsyannikov about the connections of different forms of Pontryagin's principle maximum. As some illustration, we consider a control object with linear dynamics. For this case our maximum principle can be written in more simple form than in general nonlinear case. Refs 8.

Keywords: control object, pencils of trajectories, maximum principle.

Рассмотрим управляемый объект, динамика которого в фазовом пространстве \mathbb{R}^n описывается дифференциальным уравнением вида (см. [1, 2] и др.)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где t — время, константа $T > 0$; $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий вектор, на который наложено геометрическое ограничение $u \in U$; U — непустой компакт из \mathbb{R}^r ; $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$.

Здесь и далее под \mathbb{R}^k ($k \geq 1$) понимается действительное евклидово арифметическое пространство, образуемое k -мерными вектор-столбцами со стандартным скалярным произведением векторов, которое будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и длиной вектора $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Условимся операцию транспонирования матрицы обозначать $*$.

Под множеством допустимых управлений \mathcal{U} будем понимать множество измеримых по Лебегу на Δ функций $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$, где $\Delta = [0, T]$. Элементы множества \mathcal{U} будем обозначать $u(\cdot)$.

Через $x(t, x_0, u(\cdot))$, $t \in \Delta$, обозначим абсолютно непрерывное решение задачи Коши для (1), соответствующее начальному состоянию x_0 и управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Пусть фиксировано множество M_0 — некоторый компакт из \mathbb{R}^n , имеющий положительную меру Лебега.

Пучком траекторий (или просто **пучком**), соответствующим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, будем называть семейство решений $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ уравнения (1), где $t \in \Delta$, $x_0 \in M_0$.

Предполагаем, что функция $f(x, u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n \times U$ и дважды непрерывно дифференцируема по компонентам вектора x на $\mathbb{R}^n \times U$.

Будем считать, что на $\mathbb{R}^n \times U$ имеет место оценка (ср. с [3])

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq c(1 + |x|^2),$$

в которой c — некоторая неотрицательная константа.

Отметим, что при наложенных требованиях при произвольном управлении $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ существует и единственно абсолютно непрерывное решение $x(t, x_0, u(\cdot))$ на всем отрезке Δ (см. [2, 3]). Более того, для $x(t, x_0, u(\cdot))$ на Δ равномерно по $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ выполняется оценка (см. [3]) $|x(t, x_0, u(\cdot))| \leq e^{ct} \sqrt{1 + |x_0|^2}$.

Сечение пучка решений при $t \in \Delta$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ определим формулой

$$M_{t, u(\cdot)} = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(t, x_0, u(\cdot)). \quad (2)$$

Пусть $\phi(t, x)$ — некоторая скалярная непрерывная по (t, x) на $\Delta \times \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора x на $\Delta \times \mathbb{R}^n$ функция.

На множестве управлений $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ рассмотрим функционал (см. [4])

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \int_{M_{t, u(\cdot)}} \phi(t, x) dx dt, \quad (3)$$

в котором сначала выполняется интегрирование в смысле Лебега по dx , а затем интегрирование в смысле Лебега по dt .

Отметим, что множество $M_{t, u(\cdot)}$ (см. (2)) является компактом при произвольных $t \in \Delta$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Этот факт можно обосновать с помощью теоремы IA из [2, см. с. 66, 67]. Учитывая непрерывность функции $\phi(t, x)$, можно теперь утверждать, что интеграл Лебега

$$G(t, u(\cdot)) = \int_{M_{t, u(\cdot)}} \phi(t, x) dx \quad (4)$$

существует при произвольных $t \in \Delta$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Произведем в (4) замену переменных вида

$$x = x(t, x_0, u(\cdot)),$$

где $t \in \Delta$ и $x_0 \in M_0$.

Тогда, согласно теории интеграла Лебега (см., например, [5]), приходим к формуле (см. (4))

$$G(t, u(\cdot)) = \int_{M_0} \phi(t, x(t, x_0, u(\cdot))) \left| \det \frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0} \right| dx_0, \quad (5)$$

\det обозначает детерминант матрицы.

Для оправдания формулы (5) и дальнейшего рассмотрения желательно иметь непрерывность функций $x(t, x_0, u(\cdot))$, $\frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0}$ по (t, x_0) на $\Delta \times M_0$ при фиксированном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. При непрерывной дифференцируемости $f(x, u)$ по x на $R^n \times U$ нужная непрерывность $x(t, x_0, u(\cdot))$ имеет место (см. теорему IA на с. 66, 67 в [2]). Для обоснования нужной непрерывности матричной функции $X(t, x_0) = \frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0}$ можно использовать непрерывность $x(t, x_0, u(\cdot))$ по (t, x_0) , матричное уравнение в вариациях

$$\dot{X}(t, x_0) = \frac{\partial f(x(t, x_0, u(\cdot)), u(t))}{\partial x} X(t, x_0) \quad (6)$$

и известное неравенство Гронуолла [6]. Отметим, что в (6) начальное условие имеет вид $X(0, x_0) = E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n .

Итак, в силу сказанного, функция $G(t, u(\cdot))$ (см. (4), (5)) является непрерывной на Δ при фиксированном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, поэтому повторный интеграл (см. (3)–(5))

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \int_{M_0} \phi(t, x(t, x_0, u(\cdot))) \left| \det \frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0} \right| dx_0 dt \quad (7)$$

определен корректно.

На основании теоремы Фубини (см. [5] и др.) интеграл $I(u(\cdot))$ можно рассматривать как интеграл Лебега от непрерывной функции переменных (t, x_0) по множеству $\Delta \times M_0$ и можно поменять местами порядок интегрирования.

Таким образом, интеграл $I(u(\cdot))$ (см. (7)) можно записать следующим образом:

$$I(u(\cdot)) = \int_{M_0} \int_0^T \mathcal{L}(t, x_0, u(\cdot)) dt dx_0, \quad (8)$$

где сначала выполняется интегрирование по dt , а затем интегрирование по dx_0 . Здесь символом $\mathcal{L}(t, x_0, u(\cdot))$ обозначена подынтегральная функция в (7).

Важную роль для дальнейшего играет формула Лиувилля (см. [4])

$$\det \left(\frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0} \right) = \exp \left(\int_0^t \text{sp} \frac{\partial f(x(s, x_0, u(\cdot)), u(s))}{\partial x} ds \right), \quad (9)$$

в которой $t \in \Delta$, $x_0 \in M_0$, \exp обозначает экспоненту, sp — операцию вычисления следа соответствующей матрицы.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I(u(\cdot))$ (см. (7)–(9)) по $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ для управляемого объекта (1) при $x_0 \in M_0$.

Для дальнейшего будет полезно рассмотреть управляемый объект вида (ср. с (1), (8), (9))

$$\dot{w} = F(t, w, u), \quad (10)$$

где

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad z \in \mathbb{R}^1, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r,$$

$$F(t, w, u) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ \phi(t, x) e^z \\ \text{sp} \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

с начальным условием

$$w(0) = w_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

в котором $x_0 \in M_0$.

Отметим, что при данных x_0 , $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (см. (7)–(12)), как нетрудно доказать,

$$y(T, x_0, u(\cdot)) = \int_0^T \mathcal{L}(t, x_0, u(\cdot)) dt. \quad (13)$$

Используя эту формулу, для $I(u(\cdot))$ (см. (8)) получаем следующее полезное представление:

$$I(u(\cdot)) = \int_{M_0} y(T, x_0, u(\cdot)) dx_0. \quad (14)$$

Для вывода необходимого условия оптимальности интегрального функционала $I(u(\cdot))$ (см. (8), (13), (14)) на множестве \mathcal{U} применим известный метод игольчатых вариаций (см. [1]) в простейшей форме.

Фиксируем некоторые $x_0 \in M_0$ и $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, а также некоторую правильную точку $\tau \in (0, T)$ (определение и свойства см. на с. 86, 87 в [1]) для $\tilde{u}(\cdot)$. Отметим, что правильные точки $\tau \in (0, T)$ образуют на Δ множество полной лебеговой меры T . Определим далее проварьированное управление

$$u_\epsilon(t) = u(t, \tau, \epsilon, v),$$

где $t \in \Delta$, $\epsilon \in (0, \tau)$, v — произвольный фиксированный вектор из U , следующим образом: $u_\epsilon(t) = v$ при $\tau - \epsilon \leq t \leq \tau$, $u_\epsilon(t) = \tilde{u}(t)$ при $t \in (\Delta \setminus [\tau - \epsilon, \tau])$.

Используя результаты из [1], находим при начальном условии (12) и $\epsilon \rightarrow 0+$ следующую важную формулу (см. (10)–(12)):

$$w(T, w_0, u_\epsilon(\cdot)) = w(T, w_0, \tilde{u}(\cdot)) + \epsilon A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) (F(\tau, \tilde{w}(\tau), v) - F(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))) + R(T, \tau, \epsilon, w_0, \tilde{u}(\cdot), v), \quad (15)$$

в ней $\tilde{w}(t) = w(t, w_0, \tilde{u}(\cdot))$, матричная функция $A(t, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot))$ по $t \in [\tau, T]$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = \frac{\partial F(t, \tilde{w}(t), \tilde{u}(t))}{\partial w} X \quad (16)$$

с начальным условием

$$X(\tau) = E_{n+2}, \quad (17)$$

здесь E_{n+2} — единичная матрица порядка $n + 2$,

$$|R(T, \tau, \epsilon, w_0, \tilde{u}(\cdot), v)| = o(\epsilon), \quad (18)$$

где символ $o(\epsilon)$ понимается равномерно по $x_0 \in M_0$.

Рассмотрим матрицу-строку π длины $n + 2$, у которой на $(n + 1)$ -м месте стоит 1, а на остальных местах нули. Очевидно,

$$\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \quad (19)$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^1$.

Из формул (15), (19) вытекает соотношение

$$y(T, w_0, u_\epsilon(\cdot)) = y(T, w_0, \tilde{u}(\cdot)) + \epsilon \pi A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) (F(\tau, \tilde{w}(\tau), v) - F(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))) + \pi R(T, \tau, \epsilon, w_0, \tilde{u}(\cdot), v). \quad (20)$$

Применяя формулы (14), (15), (18), (20), получаем соотношение

$$I(u_\epsilon(\cdot)) = I(\tilde{u}(\cdot)) + \epsilon \int_{M_0} \pi A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) \cdot (F(\tau, \tilde{w}(\tau), v) - F(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))) dx_0 + o(\epsilon). \quad (21)$$

Непрерывность матричной функции $A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot))$ по w_0 (см. (12)) можно обосновать, используя непрерывность функции $\tilde{w}(t) = w(t, w_0, \tilde{u}(\cdot))$ по (t, w_0) при $t \in \Delta$, $x_0 \in M_0$, соотношения (16), (17) и неравенство Гронуолла (см. [6]).

Пусть $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, — оптимальное управление в рассматриваемой задаче оптимального управления. Тогда в произвольной правильной точке $\tau \in (0, T)$ этого управления, рассуждая от противного, из (21) получим при произвольном $v \in U$ с учетом формулы (12) неравенство

$$\int_{M_0} \pi A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) \cdot (F(\tau, \tilde{w}(\tau), v) - F(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))) dx_0 \geq 0. \quad (22)$$

Покажем, как с его помощью можно найти аналог известного принципа максимума Понтрягина (см. [1, 2]).

Отметим полезную формулу

$$\pi A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) \xi = \langle \pi^*, A(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) \xi \rangle = \langle A^*(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) \pi^*, \xi \rangle, \quad (23)$$

здесь ξ — произвольный вектор из \mathbb{R}^{n+2} , вектор-столбец π^* имеет $(n+1)$ -ю координату, равную 1, а остальные его координаты равны 0. Обозначим через $X(t, s)$ решение по переменному $t \in \Delta$ матричного дифференциального уравнения (16) с начальным условием $X(s, s) = E_{n+2}$, где $s \in \Delta$ (зависимость от $w_0, \tilde{u}(\cdot)$ опускаем для сокращения обозначений). Используя свойства матрицанта $X(t, s)$ (см., например, [7]), получаем при $t \in \Delta$, $s \in \Delta$ тождество

$$X(t, s)X(s, t) = E_{n+2}.$$

В частности, при $t = T$, $s \in \Delta$

$$X(T, s)X(s, T) = E_{n+2}.$$

Отсюда с помощью дифференцирования по s выводим при $s \in \Delta$ для матричной функции $Y(s) = X^*(T, s)$ уравнение

$$\dot{Y}(s) = - \left(\frac{\partial F(s, \tilde{w}(s), \tilde{u}(s))}{\partial w} \right)^* Y(s) \quad (24)$$

и конечное условие $Y(T) = E_{n+2}$.

Отметим, что в формуле (23)

$$A^*(T, \tau, w_0, \tilde{u}(\cdot)) = Y(\tau), \quad A^*(T, T, w_0, \tilde{u}(\cdot)) = E_{n+2},$$

причем точка τ — произвольная точка из Δ и не обязательно является правильной точкой управления $\tilde{u}(\cdot)$.

Обозначим при $t \in \Delta$, $x_0 \in M_0$

$$\tilde{\Psi}(t, x_0) = A^*(T, t, w_0, \tilde{u}(\cdot))(-\pi)^*. \quad (25)$$

Заметим, что в силу (12) левая часть этой формулы по существу зависит лишь от x_0 , потому вместо w_0 пишем x_0 .

Из сказанного вытекает, что (см. (24)) при $x_0 \in M_0$ почти всюду на Δ

$$\dot{\tilde{\Psi}}(t, x_0) = - \left(\frac{\partial F(t, \tilde{w}(t), \tilde{u}(t))}{\partial w} \right)^* \tilde{\Psi}(t, x_0) \quad (26)$$

и

$$\tilde{\Psi}(T, x_0) = \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где 0_n — нулевой вектор из \mathbb{R}^n .

С помощью соотношений (23), (25)–(27) неравенство (22) при произвольном $v \in U$ можно переписать в виде

$$\int_{M_0} \langle \tilde{\Psi}(\tau, x_0), F(\tau, \tilde{w}(\tau), v) \rangle dx_0 \leq \int_{M_0} \langle \tilde{\Psi}(\tau, x_0), F(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau)) \rangle dx_0. \quad (28)$$

Обозначим (см. (10), (11))

$$H(t, \Psi, w, u) = \langle \Psi, F(t, w, u) \rangle, \quad (29)$$

где $\Psi \in \mathbb{R}^{n+2}$, $t \in \Delta$, $w \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$.

Тогда из (28), (29) получаем следующий аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [1, 2]).

Теорема. При сделанных предположениях для исследуемой задачи оптимального управления для почти всех $t \in \Delta$ выполняется соотношение максимума вида

$$\max_{u \in U} \int_{M_0} H(t, \tilde{\Psi}(t, x_0), \tilde{w}(t), u) dx_0 = \int_{M_0} H(t, \tilde{\Psi}(t, x_0), \tilde{w}(t), \tilde{u}(t)) dx_0.$$

Отметим, что при каждом $x_0 \in M_0$, $t \in \Delta$ вектор $\tilde{\Psi}(t, x_0) \neq 0$ и функция $\tilde{\Psi}(t, x_0)$ определяется однозначным образом по паре $(\tilde{u}(\cdot), \tilde{w}(\cdot))$ (см. (25)–(27)). Однозначная определенность функции $\tilde{\Psi}(t, x_0)$ связана со спецификой рассматриваемой оптимизационной задачи — ведь на правый конец $x(T)$ не накладываются никакие геометрические ограничения.

Укажем, что, используя соотношения (10), (11), получаем для функции $H(t, \Psi, w, u)$ (см. (29)) следующую формулу:

$$H(t, \Psi, w, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle + \psi_{n+1} \phi(t, x) e^z + \psi_{n+2} \text{sp} \frac{\partial f(x, u)}{\partial x},$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_{n+1} \\ \psi_{n+2} \end{pmatrix},$$

$\psi \in \mathbb{R}^n, \psi_{n+1} \in \mathbb{R}^1, \psi_{n+2} \in \mathbb{R}^1$. Применяя формулы (10), (11), (26), можно утверждать, что функция $\tilde{\Psi}(t, x_0)$ (см. (25)) удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= - \left(\frac{\partial f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} \right)^* \psi - \psi_{n+1} \text{grad} \phi(t, \tilde{x}(t)) e^{\tilde{z}(t)} - \psi_{n+2} \text{grad} \left(\text{sp} \frac{\partial f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} \right), \\ \dot{\psi}_{n+1} &= 0, \\ \dot{\psi}_{n+2} &= -\psi_{n+1} \phi(t, \tilde{x}(t)) e^{\tilde{z}(t)}, \end{aligned} \quad (30)$$

в которой $\tilde{x}(t) = x(t, x_0, \tilde{u}(t))$, $\tilde{z}(t) = \int_0^t \text{sp} \frac{\partial f(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s))}{\partial x} ds$, операция grad , примененная к скалярной функции $g(t, x)$, определяется как n -мерный вектор с компонентами $\frac{\partial g(t, x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Систему дифференциальных уравнений (30) нужно дополнить (см. (27)) концевыми условиями

$$\begin{aligned} \psi(T) &= 0, \\ \psi_{n+1}(T) &= -1, \\ \psi_{n+2}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (30), (31), в частности, вытекает, что при $t \in \Delta$

$$\psi_{n+1}(t) = -1. \quad (32)$$

Рассмотрим для иллюстрации сказанного частный случай, когда

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A, B — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ соответственно.

Здесь система (30) с учетом соотношения (32) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A^* \psi + \text{grad} \phi(t, \tilde{x}(t)) e^{\tilde{z}(t)}, \\ \dot{\psi}_{n+1} &= 0, \\ \dot{\psi}_{n+2} &= \phi(t, \tilde{x}(t)) e^{\tilde{z}(t)}. \end{aligned}$$

Ее надо дополнить краевыми условиями (31).

В рассматриваемом случае (см. (10), (11))

$$\tilde{x}(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B \tilde{u}(s) ds,$$

$$\tilde{z}(t) = t \text{sp} A,$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA . Отметим далее, что в таком случае

$$H(t, \Psi, w, u) = \langle \psi, Ax + Bu \rangle + \psi_{n+1} \phi(t, x) e^z + \psi_{n+2} \text{sp} A,$$

здесь $\psi \in \mathbb{R}^n, \psi_{n+1} \in \mathbb{R}^1, \psi_{n+2} \in \mathbb{R}^1$, и тогда соотношение максимума из нашей теоремы можно переписать так: почти всюду при $t \in \Delta$

$$\max_{u \in U} \left\langle \int_{M_0} \psi(t, x_0) dx_0, Bu \right\rangle = \left\langle \int_{M_0} \psi(t, x_0) dx_0, B \tilde{u}(t) \right\rangle.$$

Замечание. Полученная в настоящей статье форма принципа максимума для решаемой задачи оптимизации несколько отличается от формы принципа максимума (см. [4, формулы (3.11)–(3.13), (3.18), (3.19)]). В связи с таким обстоятельством интересно выявить некоторую взаимосвязь этих разных по форме принципов максимума. Д. А. Овсянников предложил следующую замену для сопряженных переменных:

$$\tilde{\psi} = \psi(t)e^{\alpha(t)}, \quad \lambda = \psi_{n+2}(t)e^{\alpha(t)},$$

$$\alpha(t) = - \left(\int_0^t \operatorname{sp} \frac{\partial f(x(s), x_0, u(\cdot), u(s))}{\partial x} ds \right).$$

Используя соотношение $\psi_{n+1}(t) = -1$, можно перейти от приведенной выше формы принципа максимума к форме принципа максимума из [4]. Отметим также, что в работе [8] содержатся теоремы существования оптимального управления для некоторых задач управления пучками траекторий.

В заключение авторы хотят поблагодарить Д. А. Овсянникова за интерес к настоящей работе и важные замечания.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / пер. с англ. Л. Л. Леонтьевой; под ред. Я. Н. Ройтенберга. М.: Наука, 1972. 574 с. (*Lee E. B., Markus L. Foundation of optimal control theory.*)
3. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1959. № 2. С. 25–38.
4. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
5. Никольский С. М. Курс математического анализа: в 2 т. 6-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2001. Т. II. 592 с.
6. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. И. Х. Сабитова; под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1970. 720 с. (*Hartman F. Ordinary differential equation.*)
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 576 с.
8. Никольский М. С., Беляевских Е. А. Теоремы существования оптимального управления для некоторых задач управления пучками траекторий // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, вып. 1. С. 113–118.

Для цитирования: Никольский М. С., Беляевских Е. А. Принцип максимума Л. С. Понтрягина для некоторых задач оптимального управления пучками траекторий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 1. С. 59–68. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.107>

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 384 p. (In Russian)
2. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. Malabar, FL, Krieger Publ. Co., 1986, 586 p. (Russ. ed.: Lee E. B., Markus L. *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*. Moscow, Nauka Publ., 1972, 574 p.)
3. Filippov A. F. *O nekotorykh voprosakh optimal'nogo upravleniya* [About some problems of automatic control]. *Vestnik of Moscow University. Series 1. Mathematics and mechanics*, 1959, no. 2, pp. 25–38. (In Russian)
4. Ovsyannikov D. A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* [Mathematical methods of pencils control]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1980, 228 p. (In Russian)

5. Nikolskii S. M. *Kurs matematicheskogo analiza. V 2 t.* [A course of mathematical analysis. In 2 vol.]. Moscow, Fizmathlit Publ., 2001, vol. II, 592 p. (In Russian)
6. Hartman F. *Ordinary differential equations.* London, John Wiley & Sons, 1964, 612 p. (Russ. ed.: Hartman F. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya.* Moscow, Mir Publ., 1970, 720 p.)
7. Gantmaher F. R. *Teoriya matrits [Theory of matrix].* 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian)
8. Nikolskii M. S., Belyaevskikh E. A. Teoremy suschestvovaniya optimalnogo upravleniya dlya nekotorykh zadach upravleniya puchkami trajektorii [Existence theorems of optimal control for some problems of control by pencils of trajectories]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 1, pp. 113–118. (In Russian)

For citation: Nikolskii M. S., Belyaevskikh E. A. L. S. Pontryagin maximum principle for some optimal control problems by trajectories pencils. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 1, pp. 59–68. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.107>

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 27 октября 2017 г.

Статья принята к печати 11 января 2018 г.