

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Ю.Кропачева, И.В.Пелевина

Индивидуальные задания по линейной
алгебре

Санкт-Петербург
2018г.

УДК 512.644
ББК 22.143
И60

Настоящее пособие содержит блок заданий по линейной алгебре, предназначенный для студентов Санкт-Петербургского государственного университета, обучающихся по направлению «Социология». Задания также могут быть использованы для студентов, обучающихся по другим направлениям. Для решения предлагаются как определенные СЛАУ, так и неопределенные. В заключении рассмотрен пример выполнения одного из вариантов заданий. Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и контрольных работ, как в аудитории, так и для индивидуальных домашних заданий.

УДК 512.644
ББК 22.143

©Н.Ю.Кропачева, И.В.Пелевина, 2018
©СПбГУ, 2018

Вариант 1

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & -1 \\ 10 & -36 & -23 \\ 5 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 24. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -6x_1 - x_2 + 4x_3 = -21, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13, \\ 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 18. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -7 & 21 & -18 \\ 9 & 1 & -6 \\ -4 & 21 & 20 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7, \\ -11x_2 + 16x_3 = -16. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 23, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -11, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{7}{16}t + 2, \\ x_2 = t, \\ x_3 = \frac{11}{16}t - 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 3

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 & 11 \\ 16 & -22 & -7 \\ -3 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 15x_2 - 8x_3 = -5, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - 10x_3 = 5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -11, \\ -x_2 - 2x_3 = 1, \\ -6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответы

$$1) \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{71}{15}t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 1 - \frac{37}{15}t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант 4

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -30 & -20 & -21 \\ 14 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -8x_1 + x_3 = -12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -7x_1 + 6x_3 = -31. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t + 3, \\ x_2 = 2t + 2, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант 5

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 25 & 5 & -30 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = -4, \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 24, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 25, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{17}{4}t - \frac{5}{4}, \\ x_2 = \frac{11}{4}t - \frac{11}{4}, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 6

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -10 \\ -14 & -3 & 18 \\ -4 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ 9x_1 - x_2 - 2x_3 = 15. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -6, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -14, \\ -x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответы

$$1) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{7}{25}t + 1, \\ x_2 = t, \\ x_3 = \frac{19}{25}t - 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 7

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -1 & 39 \\ 12 & -6 & -9 \\ -29 & 26 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -14, \\ -7x_1 - 2x_2 = 24. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t + 1, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 3 + 2t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 8

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & 31 & 11 \\ 6 & 14 & 26 \\ 6 & 25 & 25 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -37, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 59, \\ -7x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -59. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1 - t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 9

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 41 & -3 \\ 9 & 7 & -1 \\ 30 & 15 & -17 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ -5x_1 - x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}t, \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 10

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -15 & 6 & -5 \\ 4 & 17 & -17 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 15x_2 - 8x_3 = 7, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -8, \\ 5x_1 - x_2 - 10x_3 = -9. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -17, \\ -7x_1 + x_2 - 7x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -\frac{71}{15}t - \frac{71}{15}, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -\frac{37}{15}t - \frac{22}{15}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 11

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 & -11 \\ -23 & -7 & -24 \\ 5 & 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 = -6. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 8x_3 = -22, \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}t - 1, \\ x_2 = \frac{4}{7}t + 2, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 12

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 20 & -24 & -29 \\ 2 & -3 & -16 \\ -16 & 18 & 25 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 8, \\ -7x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -58, \\ -7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -43. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}t + 1, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -\frac{2}{3}t - 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 13

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 25 & -20 & 9 \\ 14 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_3 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = -11. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{3t+1}{2}, \\ x_2 = t, \\ x_3 = \frac{3t-5}{2}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 14

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 29 \\ -10 & 25 & -15 \\ 18 & -5 & -19 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 4, \\ 7x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 5, \\ 31x_2 + 8x_3 = -23. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -7x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -5, \\ 5x_1 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 4 + 4t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -\frac{31t+23}{8}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 15

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 6 & -12 \\ -12 & 32 & 0 \\ -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 10, \\ -6x_1 - 6x_2 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 - 8x_3 = 8. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = \frac{14}{9}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 16

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -25 & -11 & -17 \\ -26 & -6 & -19 \\ 7 & 14 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -11, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = -7, \\ 2x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 11, \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -10. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -13t - 11, \\ x_3 = -11t - 11. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 17

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 18 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -7, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 22, \\ -3x_2 + 8x_3 = 8. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 34, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -6. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{14t+13}{9}, \\ x_2 = \frac{8t-8}{3}, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 18

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ 5 & 9 & -1 \\ -5 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -13, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -9. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 29, \\ -x_1 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{11t-3}{7}, \\ x_2 = -\frac{19}{7}(t+1), \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -4, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 19

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -26 & -21 \\ -12 & -5 & 6 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 7, \\ 7x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -20, \\ 3x_1 - 13x_2 + 8x_3 = -34. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = -14, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 7x_1 + 4x_3 = 13. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(7 - 5t), \\ x_2 = t, \\ x_3 = \frac{1}{16}(41t - 89). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 20

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -12 & -12 & -9 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2, \\ 7x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 6, \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 33, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -8, \\ x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 2 + 4t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -\frac{1}{8}(8 + 31t). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 21

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 13 \\ 0 & 10 & -10 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x_1 + 19x_3 = 14, \\ -8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 10. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ 7x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -4, \\ -5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 16. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(-14 + 19t), \\ x_2 = \frac{1}{25}(-92 + 117t), \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант 22

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 11 \\ 12 & 7 & -5 \\ -4 & 2 & 19 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 3. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = \frac{1}{2}(9t + 6), \\ x_3 = \frac{1}{8}(17t + 8). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 23

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 10 & 2 & 18 \\ 11 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 3, \\ -8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 - x_3 = -9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -13. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -2t + 3, \\ x_3 = 2t - 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 24

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & 17 & -7 \\ 0 & 8 & 5 \\ -8 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 22, \\ 4x_1 - x_2 = -10, \\ 7x_1 - 2x_2 = -17. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 3t - 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 25

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 12 \\ -5 & -14 & -25 \\ -8 & -11 & -22 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -10, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -34, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -23 \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 26

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -20 & 5 \\ 7 & -16 & 4 \\ -13 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант 27

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -1 & 23 & -11 \\ -17 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 50, \\ 4x_1 + 5x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 27. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = -10, \\ -6x_1 - 2x_2 + x_3 = -11, \\ -6x_1 + 6x_2 - x_3 = 31. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 28

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & 9 & -1 \\ -7 & 1 & 10 \\ 3 & -11 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -43, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = -28, \\ -8x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 29

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ -5 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -8 & -6 & -14 \\ 10 & 5 & 24 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 17, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 30. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -9, \\ -8x_1 - x_2 - x_3 = 11, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = 16. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант 30

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 8 \\ 6 & 12 & -1 \\ 3 & -25 & -25 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10, \\ -7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -24, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 31

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -35 & -34 \\ -10 & 0 & 27 \\ -20 & -35 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 3, \\ -8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2, \\ -13x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = -23, \\ 5x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 45, \\ -4x_3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -15. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 32

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & 37 & 20 \\ 4 & 14 & -6 \\ -13 & -3 & 34 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 28, \\ 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -5 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 33

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 6 & 24 & -7 \\ -8 & -22 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ -8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 10. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -3x_2 - 8x_3 = 21, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 8, \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -24. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 34

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -23 \\ 1 & 3 & 15 \\ 31 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 3. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -1, \\ 5x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 8, \\ -8x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -48. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 35

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 37 & 31 \\ 6 & 23 & 15 \\ 10 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 3, \\ -8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2, \\ -13x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6, \\ -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 13, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 36

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -7x_1 + 6x_2 - x_3 = 6, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант 37

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 29 & 1 \\ 9 & -33 & -13 \\ -16 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -10, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 47, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 38

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & -32 & -26 \\ -20 & 20 & 30 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -23, \\ -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -9. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 39

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 20 \\ -8 & 11 & -17 \\ -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -15, \\ -6x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 43, \\ 4x_1 - x_2 - 6x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 40

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -24 \\ -6 & -9 & -6 \\ 2 & 14 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 22, \\ -7x_1 + x_2 - 2x_3 = -15, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 25. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 41

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -5 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -25 & 6 \\ -20 & 18 & 8 \\ 7 & -10 & -16 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 17, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 30. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -17, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -5. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант 42

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 27 & -16 & -5 \\ -10 & -3 & 6 \\ -16 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -8x_1 - 3x_2 = 32, \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -22, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 43

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -7 \\ 9 & -9 & 7 \\ 12 & -18 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 3, \\ -8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2, \\ -13x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 1. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -5, \\ 2x_2 + 7x_3 = 28, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 29. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 44

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & -18 & 3 \\ 8 & -11 & -1 \\ 1 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -22, \\ -5x_1 - 4x_2 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 45

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 26 & -8 \\ 15 & 13 & -3 \\ -4 & -19 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 3x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -4, \\ -7x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -28. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 = -4, \\ 8x_1 - x_2 = -34, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = t + 4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Вариант 46

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & 7 & -9 \\ -29 & 13 & -23 \\ -13 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 24. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = -20, \\ 8x_1 + x_2 - x_3 = -22, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 17. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{4}{3}t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 4 - \frac{5}{6}t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 47

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -50 & -12 \\ 7 & -39 & -13 \\ -10 & 51 & 19 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -17, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 23. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -20, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 21. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 8 - t, \\ x_2 = \frac{25}{3} - \frac{2}{3}t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 48

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 & 10 & 36 \\ 4 & 4 & 26 \\ 24 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -11, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = -19. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 55, \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -30, \\ 7x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 65. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}t - \frac{41}{9}, \\ x_2 = \frac{17}{18} - \frac{7}{18}t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 49

1) Решите матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 15 \\ 16 & 6 & -9 \\ -16 & -13 & -6 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -9, \\ -x_1 - 8x_2 + x_3 = 22, \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -5. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 11, \\ -3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2, \\ -6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -12t - 31, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -9 - 4t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант 50

1) Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 8 & 13 & -23 \\ 26 & 4 & 30 \end{pmatrix}.$$

2) Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -8, \\ x_1 + 5x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответы

$$1) X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{16}{11}t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 1 - \frac{13}{11}t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим для примера решение подобного варианта.

Первое задание.

Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -16 & -31 & 12 \\ 6 & 21 & -8 \\ 6 & 37 & -16 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -16 & -31 & 12 \\ 6 & 21 & -8 \\ 6 & 37 & -16 \end{pmatrix},$$

где A и B – задаваемые матрицы, X – искомая матрица.

Матрица A стоит слева от X , поэтому матричное уравнение запишется в виде:

$$A \cdot X = B.$$

Если в матричном уравнении матрица A стоит справа от X , то уравнение примет вид

$$X \cdot A = B.$$

Матричные уравнения вида $A \cdot X = B$ и $X \cdot A = B$ решаются через обратную матрицу A^{-1} .

Рассмотрим наше уравнение: $A \cdot X = B$. Для того, чтобы разрешить данное уравнение относительно X , умножим обе его части на A^{-1} **слева**:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Используем свойство матричных операций: $A^{-1} \cdot A = E$. Уравнение примет вид:

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку умножение на единичную матрицу исходную матрицу не изменяет ($E \cdot X = X$), окончательно получим:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

Эта формула позволяет найти матрицу X .

Замечание. Произведение матриц не перестановочно, поэтому существенно, с какой стороны проводить умножение (в случае $X \cdot A = B$ умножим обе части уравнения на A^{-1} **справа**).

Для вычисления обратной матрицы найдем определитель матрицы A . Он равен

$$\det A = -2.$$

Таким образом A – невырожденная матрица, значит существует обратная матрица A^{-1} .

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу X :

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & -31 & 12 \\ 6 & 21 & -8 \\ 6 & 37 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Второе задание.

Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 11x_1 + 13x_2 - 10x_3 = -11. \end{cases}$$

Метод Гаусса – это классический метод решения системы линейных уравнений, называемый также *методом последовательного исключения неизвестных*. В основе метода лежат элементарные преобразования системы с целью приведения ее к равносильной системе уравнений треугольного типа. Решая полученную равносильную треугольную систему, начиная с последнего уравнения, последовательно, тоже начиная с последней, находят все неизвестные.

К элементарным преобразованиям относятся следующие действия:

- 1) Строки матрицы можно переставлять местами.
- 2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной.
- 3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить.
- 4) Строку матрицы можно умножить на любое, отличное от нуля, число.
- 5) К строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на число, отличное от нуля. Строка, которую прибавляли остается прежней, изменяется строка к которой прибавляют.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса осуществляется в два этапа.

I этап. Прямой ход Гаусса.

Составляем расширенную матрицу системы. ***Расширенная матрица системы*** – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто разделитель.

Далее, при помощи элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду. В научной и учебной литературе под термином «ступенчатый вид» понимают трапециевидный или треугольный вид матрицы.

II этап. Обратный ход Гаусса.

Из полученной системы с треугольной или трапециевидной матрицей последовательно (обратным ходом) получаются значения всех неизвестных.

Виды метода Гаусса

- 1) Классический метод Гаусса.
- 2) Модификации метода Гаусса. Особенностью метода Гаусса с выбором главного элемента является такая перестановка уравнений, чтобы на k -ом шаге ведущим элементом оказывался наибольший по модулю элемент k -го столбца.
- 3) Метод Жордано-Гаусса. Отличие метода Жордано-Гаусса от классического метода Гаусса состоит в применении правила прямоугольника, когда направление поиска решения происходит по главной диагонали (преобразование к единичной матрице). В этом случае полученный правый столбец будет представлять искомые значения неизвестных переменных. При этом нет необходимости вычислять новые неизвестные через ранее рассчитанные.

Решение.

Сформируем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 11 & 13 & -10 & -11 \end{array} \right).$$

Применяя к расширенной матрице последовательность элементарных преобразований, будем стремиться, чтобы каждая строка, кроме, быть может, первой, начиналась с нулей, и число нулей до первого ненулевого элемента в каждой следующей строке было больше, чем в предыдущей.

Сначала смотрим на левое верхнее число. Почти всегда здесь должна находиться единица. Поэтому меняем местами первую и вторую строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 11 & 13 & -10 & -11 \end{array} \right).$$

Ставим задачу для первого столбца: получить нули во второй и третьей строках. Для этого работаем с первой строкой. Чтобы получить нуль в первом столбце второй строки, ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на -2 . Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 11 & 13 & -10 & -11 \end{array} \right).$$

Чтобы получить ноль в первом столбце третьей строки, к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на -11 . Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -20 & 12 & 0 \end{array} \right).$$

Задачу выполнили: во второй и третьей строках первого столбца стоят нули. Обычно эти действия выполняются устно и записываются в один шаг.

Теперь ставим задачу для второго столбца: мы хотим получить нули в первой и третьей строках этого столбца. Заметим, что третью строку можно разделить на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Видим, что вторая и третья строки равны, поэтому вычитаем из третьей строки вторую (вторая строка умножается на -1 и при прибавляется к третьей строке). Результат записываем в третью строку.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

На этом этапе получили трапециевидную матрицу.

Делим вторую строку на -5 , получаем во второй строке второго столбца 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Теперь получим ноль в первой строке второго столбца. Для этого из первой строки вычтем вторую строку, умноженную на -3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Получили единицы на главной диагонали.

Далее выпишем систему уравнений по последней расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_3 - 1 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 \end{cases}.$$

Принимая x_3 за свободную переменную, переменные x_1, x_2 будут являться базисными. Окончательный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}t - 1, \\ x_2 = \frac{3}{5}t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

Заданная система уравнений имеет множество решений. Нами получено общее решение заданной СЛАУ. Чтобы найти частное решение, нужно всем свободным переменным придать какое-либо конкретное значение, например, приравнять к нулю, т.е. полагая $x_3 = t = 0$, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Замечание. Для системы уравнений нужно сделать проверку найденного решения.

Третье задание.

Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -25, \\ -5x_1 - 6x_3 = 7, \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

Метод Крамера применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которых число неизвестных переменных равно числу уравнений и определитель основной матрицы отличен от нуля. Для нахождения неизвестных переменных по методу Крамера применяем формулы:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \text{ и } x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решение.

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -5 & 0 & -6 \\ -6 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 57 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение.

Подставим столбец свободных членов в первый столбец основной матрицы и вычислим ее определитель:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -25 & -3 & -3 \\ 7 & 0 & -6 \\ 9 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -285.$$

Подставим столбец свободных членов во второй столбец основной матрицы и вычислим ее определитель:

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & -25 & -3 \\ -5 & 7 & -6 \\ -6 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -171.$$

Подставим столбец свободных членов в третий столбец основной матрицы и вычислим ее определитель:

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -25 \\ -5 & 0 & 7 \\ -6 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 171.$$

В итоге, находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-285}{57} = -5; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-171}{57} = -3; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{171}{57} = 3.$$