УДК 53 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4

Н. М. Лебедев, М. В. Компаниец

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $O(n)$-СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ С АНТИСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА: РЕНОРМГРУППА В РЕАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Критическое поведение $O(n)$-симметричной модели ϕ^4 с антисимметричным тензорным параметром порядка изучается с помощью подхода ренормгруппы (РГ) в реальном пространстве. Ранее авторами совместно с Н. В. Антоновым данная модель изучалась посредством метода ε-разложения. В рамках такого подхода было показано, что нетривиальные фиксированные точки присутствуют в модели только в случае $n = 4$, однако их свойства инфракрасной устойчивости являются чувствительными по отношению к учёту старших порядков теории возмущений и асимптотического характера ε-разложений. В итоге был сделан вывод, что для получения достоверной картины критического поведения необходимо помимо учёта старших порядков теории возмущений исследовать также зависимость результатов от выбора конкретной схемы ренормировки. Для этого в настоящей работе РГ-функции и критические индексы модели вычислены в форме псевдо-ε-разложений с трёхпетлевой точностью. Полученные результаты качественно согласуются с результатами борелевского пересуммирования соответствующих ε-разложений в трёхпетлевом приближении. Тем не менее значения критических индексов, полученные путём прямого суммирования псевдо-ε-разложений и борелевского пересуммирования соответствующих ε-разложений могут довольно существенно отличаться. Библиогр. 33 назв. Табл. 6.

Ключевые слова: ренормализационная группа, критическое поведение.

Для цитирования: *Лебедев Н. М., Компаниец М. В.* Критическое поведение $O(n)$-симметричной модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: ренормгруппа в реальном пространстве // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 417–428. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.405

N. M. Lebedev, M. V. Kompaniets

CRITICAL BEHAVIOUR OF A $O(n)$-SYMMETRIC MODEL WITH AN ANTISYMMETRIC TENSOR ORDER PARAMETER: THE REAL-SPACE RENORMALIZATION GROUP

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Critical behavior of the $O(n)$-symmetric model with antisymmetric tensor order parameter is studied by means of the renormalization group approach in the space of a fixed dimension. Previously this model was studied by the authors in collaboration with N. V. Antonov by means of ε-expansion. Within the framework of this approach, it was shown that non-trivial fixed points are present in the model only in the case $n = 4$, however, their infrared stability properties appeared to be sensitive to the accounting of the higher orders of perturbation theory and the asymptotic nature of ε-expansions. As a result, it was concluded that in order to obtain a reliable picture of critical behavior, besides accounting for the higher orders of perturbation theory, it is also necessary to explore the dependence of the results on the choice of a specific renormalization scheme. For this purpose in the present paper RG-functions and critical exponents of the model are calculated in form of pseudo-ε-expansions with a three-loop accuracy. The results obtained are in qualitative agreement with results of the Borel resummation of corresponding ε-expansions

* Н. М. Лебедев выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку в рамках гранта 16-32-00086 мол-а.

in three-loop approximation. Nevertheless, the numerical values of the critical exponents obtained by direct summation of the pseudo-ε-expansions and by the Borel resummation of the corresponding ε-expansions can differ quite significantly. Refs 33. Tables 6.

Keywords: renormalization group, critical behavior.

For citation: Lebedev N. M., Kompaniets M. V. Critical behaviour of a $O(n)$-symmetric model with an antisymmetric tensor order parameter: the real-space renormalization group. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry.* 2017. Vol. 4 (62), iss. 4. P. 417–428.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.405

Введение. Многочисленные физические системы обнаруживают интересное сингулярное поведение в окрестности своих критических точек. Их термодинамические и корреляционные функции демонстрируют степенное поведение с универсальными критическими размерностями, которые в соответствии с общепринятыми взглядами зависят только от нескольких глобальных характеристик системы, таких как симметрия или размерность пространства. Тем самым можно говорить о классах универсальности моделей критического поведения безотносительно к конкретной природе физической системы, претерпевающей фазовый переход второго рода [1, 2].

В рамках ренормгруппового (РГ) подхода (как с использованием ренормгруппы в реальном пространстве, так и в рамках ε-разложения) наиболее изученные фазовые переходы (жидкость—пар, бинарные смеси, ферро- и антиферромагнетики) описываются $O(n)$-симметричными моделями со взаимодействием типа ϕ^4 и n-компонентным векторным параметром порядка [1–8].

Однако во многих случаях описание с помощью подобных сравнительно простых моделей оказывается неадекватным, и приходится рассматривать более сложные симметрии или более сложные типы параметров порядка с матричной или тензорной природой. Как правило, соответствующие теоретико-полевые модели включают несколько различных типов взаимодействий и, соответственно, несколько констант связи.

В работах [9, 10] теоретико-полевая ренормгруппа применялась к $O(n)$-симметричной модели ϕ^4 с вещественным антисимметричным тензорным параметром порядка в рамках ε-разложения. Такая модель может иметь отношение к переходам между нематической, холестерической и голубой фазами жидких кристаллов [11–16], переходу в диссиметричную фазу в ферроэластиках [17–21] и, в комплексной модификации, к переходу в сверхпроводящее состояние в системах фермионов с высшими спинами или дополнительными степенями свободы [22–24].

При $n = 2$ и 3 модель сводится к хорошо изученным однозарядным скалярной и $O(3)$-векторной ϕ^4-моделям соответственно; при $n \geqslant 4$ это истинно двухзарядная модель. РГ-анализ, выполненный в работе [9] в рамках однопетлевого приближения (первый порядок ε-разложения), показал, что только при $n = 4$ в модели имеются фиксированные точки с вещественными координатами: одна инфракрасно-устойчивая (ИК-устойчивая) и три неустойчивых. При $n > 4$ нетривиальные фиксированные точки в модели отсутствуют, а РГ-потоки уходят либо на бесконечность, либо в нефизическую область.

Однако в работе [10] было продемонстрировано, что данные результаты не являются устойчивыми по отношению к учёту следующих порядков теории возмущений, а также к учёту асимптотического характера рядов теории возмущений для данной модели. В частности, непосредственный учёт трёхпетлевых поправок привёл к смене типа ИК-устойчивой в главном приближении фиксированной точки на седловидную, в то время как одна из седловидных точек, наоборот, стала ИК-устойчивой после учёта асимптотического характера ε-разложений. В итоге в работе [10] был сделан вывод, что для достоверного определения типа перехода и надёжного вычисления критических размерностей необходимо исследовать не только устойчивость полученных результатов по отношению к учёту следующих порядков теории возмущения, но также и их зависимость от выбора конкретной схемы ренормировки.

В настоящей работе для анализа обсуждаемой модели используются подход ренормгруппы в фиксированной размерности пространства (реальном пространстве) и метод псевдо-ε-разложения (τ-разложения). Известно, что τ-разложение является эффективным методом изучения характеристик критического поведения различных систем. Более того, данный подход позволяет получать надёжные численные оценки критических индексов без применения сложных техник суммирования, чувствительных к особенностям асимптотического поведения рядов теории возмущений [6, 25–30]. Таким образом, анализ результатов, полученных в рамках данного подхода, может помочь получить дополнительную информацию об устойчивости неподвижных точек и прояснить ситуацию со сменой устойчивости, которая была описана в работе [10].

Модель. В данной работе рассматривается модель вещественного антисимметричного тензорного поля $\phi = \phi_{ik}(\boldsymbol{x})$ второго ранга ($\phi_{ik} = -\phi_{ki}, i, k = 1, \ldots, n$) в d-мерном евклидовом векторном пространстве. Модель задаётся функционалом действия:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\phi(-\partial^2 + m_0^2)\phi) - \frac{g_{10}}{4!}\,(\mathrm{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_{20}}{4!}\,\mathrm{tr}(\phi^4). \tag{1}$$

Здесь и далее интегрирование по d-мерному пространству, а также суммирование по повторяющимся индексам подразумевается; ∂^2 обозначает оператор Лапласа, m_0^2 — отклонение температуры (или её аналога) от критического значения, а g_{10}, g_{20} — константы взаимодействия.

Для обеспечения стабильности модели необходимо, чтобы неквадратичная по полям часть функционала (1) была отрицательно определённой на любой конфигурации поля ϕ. Данное требование приводит к ограничениям на значения, которые могут принимать константы взаимодействия в случае чётных и нечётных значений n соответственно:

$$2g_{10} + g_{20} > 0,\ ng_{10} + g_{20} > 0; \tag{2}$$

$$2g_{10} + g_{20} > 0,\ (n-1)g_{10} + g_{20} > 0. \tag{3}$$

Стандартный анализ симметрий функционала (1) и канонических размерностей полей и параметров модели показывает, что поверхностные ультрафиолетовые (УФ) расходимости, требующие устранения путём перенормировки, содержатся только в двух- и четырёхточечных 1-неприводимых функциях Грина. Как следствие, модель является мультипликативно ренормируемой с ренормированным действием:

$$S_R(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\phi(-Z_1\partial^2 + Z_2 m^2)\phi) - \frac{g_1\mu^{(4-d)}}{4!}\,Z_3(\mathrm{tr}(\phi^2))^2 - \frac{g_2\mu^{(4-d)}}{4!}\,Z_4\,\mathrm{tr}(\phi^4).$$

Связь констант ренормировки зарядов и поля с нумерованными константами даётся соотношениями:

$$Z_{g_1} = \frac{Z_3}{Z_2^2};\ Z_{g_2} = \frac{Z_4}{Z_2^2};\ Z_\phi = Z_2^{1/2}. \tag{4}$$

В работе используется схема ренормировки, аналогичная используемой в работе [31]. Перенормировочные константы Z_i определяются непосредственно из нормировочных условий для функций Грина:

$$\Gamma_2^R|_{p=0,\ \mu=m} = -m^2,\ \Gamma_2^R|_{p=0,\ \mu=0} = 0,$$

$$\partial_{p^2}\Gamma_2^R|_{p=0,\ \mu=m} = -1,\ \Gamma_4^R|_{p=0,\ \mu=0} = -g_1V_1m^{(4-d)} - g_2V_2m^{(4-d)},$$

и, как и в схеме минимальных вычитаний (MS), зависят только от безразмерных зарядов $g_{1,2}$.

Уравнение ренормгруппы получается стандартным способом на основе произвольности ренормировочной массы μ, и для k-точечной 1-неприводимой функции Грина совпадает с таковым для схемы MS:

$$(\mu\partial_\mu + \beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2} - \gamma_{m^2}D_{m^2} - k\gamma_\phi)\Gamma_k^R = 0.$$

При этом РГ-функции задаются стандартными определениями:

$$\gamma_i \equiv \widetilde{D}_\mu \ln Z_i,\ \beta_i \equiv \widetilde{D}_\mu g_i,\ i = 1, 2, \tag{5}$$

где $D_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x, а $\widetilde{D}_\mu$ есть оператор D_μ при фиксированных затравочных параметрах.

Из определений (4) и (5) получаем явные выражения для РГ-функций через константы ренормировки поля и зарядов:

$$\beta_1 = \frac{g_1(4-d)(-1 + D_{g_2}\ln Z_{g_1} - D_{g_2}\ln Z_{g_2})}{1 + D_{g_1}\ln Z_{g_1} - D_{g_1}\ln Z_{g_2}\cdot D_{g_2}\ln Z_{g_1} + D_{g_2}\ln Z_{g_2} + D_{g_1}\ln Z_{g_1}\cdot D_{g_2}\ln Z_{g_2}}, \tag{6}$$

$$\beta_2 = \frac{g_2(4-d)(-1 + D_{g_1}\ln Z_{g_2} - D_{g_1}\ln Z_{g_1})}{1 + D_{g_1}\ln Z_{g_1} - D_{g_1}\ln Z_{g_2}\cdot D_{g_2}\ln Z_{g_1} + D_{g_2}\ln Z_{g_2} + D_{g_1}\ln Z_{g_1}\cdot D_{g_2}\ln Z_{g_2}} \tag{7}$$

$$\gamma_\phi = (\beta_1\partial_{g_1} + \beta_2\partial_{g_2})\ln Z_\phi. \tag{8}$$

Инфракрасное асимптотическое поведение функций Грина определяется набором ИК-притягивающих (ИК-устойчивых) неподвижных точек соответствующих уравнений РГ, координаты которых ищутся из условия одновременного зануления всех β-функций:

$$\beta_i(g_*) = 0.$$

Тип неподвижной точки определяется с помощью матрицы:

$$\omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g_*}.$$

Неподвижная точка является ИК-притягивающей, если матрица ω положительна в этой точке, т. е. положительна вещественная часть всех её собственных чисел. Существование ИК-притягивающей неподвижной точки предполагает скейлинговое поведение для всех функций Грина, описываемое критическими индексами, в частности индексом Фишера:

$$\eta = 2\gamma_\phi(g_{1*}, g_{2*}).$$

Константы ренормировки были явно вычислены в форме рядов по степеням g_1, g_2 с трёхпетлевой точностью. Каждая диаграмма исследуемой модели, дающая вклад в Z_i, может быть представлена в виде произведения соответствующей диаграммы скалярной ϕ^4 модели и дополнительного тензорного множителя, возникающего как результат свёртки тензорных частей пропагатора и вершинных множителей (см. [9, 10]). Значения диаграмм скалярной модели были взяты в работе [31] для случая $d = 2$ и в работе [25] для случая $d = 3$. Вычисление тензорных свёрток было произведено при помощи программы FORM [32, 33].

Разложения для РГ-функций (6)–(8) были получены по известным рядам для констант ренормировки. Для этого была выполнена замена $g_{1,2} \to tg_{1,2}$, после чего выражения (6)–(8) были разложены в ряд по t с необходимой точностью, а параметр t был положен равным единице. Полученные таким образом разложения для РГ-функций приводятся и обсуждаются ниже.

Стоит также отметить, что модель с дополнительными соотношениями $g_2 = 0$ или $4g_1 + 3g_2 = 0$ замкнута по отношению к процедуре ренормировки. Следствием этого является тот факт, что для координат неподвижных точек, обозначаемых в дальнейшем как **A** и **C**, должны выполняться точно соотношения $g_{2*} = 0$ и $4g_{1*} + 3g_{2*} = 0$ соответственно, а по отношению к соответствующим однозарядным моделям эти точки должны быть ИК-притягивающими. Данный факт можно использовать для дополнительной проверки полученных в данной работе результатов.

Случай $d = 3$. В случае размерности пространства $d = 3$ были получены следующие выражения для РГ-функций (для удобства в этом разделе всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(8\pi^2)$):

$$\begin{aligned}\beta_1 = &- g_1 + (0{,}083333n^2 - 0{,}083333n + 1{,}333333)g_1^2 + (0{,}333333n - 0{,}166667)g_1g_2 + \\ &+ 0{,}25g_2^2 + (-0{,}084362n^2 + 0{,}084362n - 0{,}781893)g_1^3 + (-0{,}411523n + \\ &+ 0{,}205761)g_1^2g_2 + (-0{,}011831n^2 + 0{,}011831n - 0{,}380658)g_1g_2^2 + (-0{,}027778n + \\ &+ 0{,}013889)g_2^3 + (0{,}001562n^4 - 0{,}003123n^3 + 0{,}128738n^2 - 0{,}127177n + \\ &+ 0{,}924261)g_1^4 + (0{,}015386n^3 - 0{,}023079n^2 + 0{,}769794n - 0{,}381051)g_1^3g_2 + \\ &+ (0{,}000180n^4 - 0{,}000360n^3 + 0{,}092671n^2 - 0{,}092491n + 0{,}859047)g_1^2g_2^2 + \\ &+ (0{,}001893n^3 - 0{,}002840n^2 + 0{,}163558n - 0{,}081306)g_1g_2^3 + (0{,}003444n^2 - \\ &- 0{,}00341707n + 0{,}037871)g_2^4 + O(g^5),\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = &- g_2 + 2{,}0g_1g_2 + (0{,}166667n - 0{,}0833333)g_2^2 + (-0{,}047325n^2 + 0{,}047325n - \\ &- 1{,}522634)g_1^2g_2 + (-0{,}411523n + 0{,}205761)g_1g_2^2 + (-0{,}007202n^2 + 0{,}007202n - \\ &- 0{,}139918)g_2^3 + (-0{,}001448n^4 + 0{,}002896n^3 + 0{,}095436n^2 - 0{,}096884n + \\ &+ 2{,}172842)g_1^3g_2 + (-0{,}005216n^3 + 0{,}007824n^2 + 0{,}984544n - 0{,}493576)g_1^2g_2^2 + \\ &+ (0{,}047003n^2 - 0{,}047003n + 0{,}591662)g_1g_2^3 + (0{,}000324n^3 - 0{,}000499n^2 + \\ &+ 0{,}0385699n - 0{,}019250)g_2^4 + O(g^5),\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\gamma_\phi = &(0{,}002058n^2 - 0{,}002058n + 0{,}008231)g_1^2 + (0{,}008231n - 0{,}004115)g_1g_2 + \\ &+ (0{,}000514n^2 - -0{,}000514n + 0{,}002058)g_2^2 + (0{,}000014n^4 - 0{,}000029n^3 + \\ &+ 0{,}000300n^2 - 0{,}000286n + 0{,}000914)g_1^3 + (0{,}000086n^3 - 0{,}000129n^2 + 0{,}001414n - \\ &- 0{,}000686)g_1^2g_2 + (0{,}000300n^2 - 0{,}000300n + 0{,}000557)g_1g_2^2 + (0{,}000007n^3 - \\ &- 0{,}000011n^2 + 0{,}000118n - 0{,}000057)g_2^3 + O(g^4).\end{aligned}$$

По известным разложениям РГ-функций координаты трёх нетривиальных неподвижных точек, описанных в работе [9], и соответствующие им критические индексы были вычислены в форме τ-разложения. Для этого в (9), (10) была осуществлена замена линейного члена $g_{1,2} \to \tau g_{1,2}$. В приведённых ниже выражениях сделана подстановка $n = 4$ (единственный случай, когда существуют нетривиальные фиксированные точки).

Точка **A**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}428571\tau + 0{,}141237\tau^2 + 0{,}002840\tau^3,\\
g_2 &= 0,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}329554\tau^2 + 0{,}203958\tau^3,\\
\omega_2 &= -0{,}142857\tau - 0{,}101501\tau^2 - 0{,}001258\tau^3,\\
\eta &= 0{,}012094\tau^2 + 0{,}008979\tau^3.
\end{aligned}
$$

Точка **B**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}705882\tau + 0{,}547663\tau^2 + 0{,}127564\tau^3,\\
g_2 &= -0{,}705882\tau - 1{,}12898\tau^2 - 0{,}512302\tau^3,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}364091\tau^2 + 0{,}183818\tau^3,\\
\omega_2 &= 0{,}058823\tau - 0{,}070855\tau^2 - 0{,}126034\tau^3,\\
\eta &= 0{,}012303\tau^2 + 0{,}009984\tau^3.
\end{aligned}
$$

Точка **C**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}818182\tau + 0{,}313549\tau^2 + 0{,}008818\tau^3,\\
g_2 &= -1{,}09091\tau - 0{,}418065\tau^2 - 0{,}011757\tau^3,\\
\omega_1 &= \tau - 0{,}383226\tau^2 + 0{,}272169\tau^3,\\
\omega_2 &= -0{,}090909\tau + 0{,}207585\tau^2 + 0{,}009024\tau^3,\\
\eta &= 0{,}012244\tau^2 + 0{,}010404\tau^3.
\end{aligned}
$$

Полагая всюду τ равным единице, получаем численные значения, которые можно сравнить с предыдущими результатами прямого суммирования ε-разложений и суммирования методом борелевского пересуммирования с конформным маппингом, полученными в работе [10].

Из табл. 1–3 видно, что все точки лежат в физической области параметров, так как их координаты удовлетворяют соотношениям (2)–(3) для любого из рассмотренных методов суммирования. Более того, для всех трёх неподвижных точек результаты суммирования τ-разложений качественно согласуются с результатами обработки ε-разложений методом борелевского пересуммирования с конформным маппингом. В частности, оба метода предсказывают одинаковые свойства устойчивости всех трёх точек, что подтверждает обмен свойствами устойчивости между точками **B** и **C** в сравнении с однопетлевыми результатами. Тем не менее значения критических индексов, полученные этими методами, могут довольно существенно различаться.

Таблица 1

Сравнение критических индексов в размерности $d = 3$ для неподвижной точки A при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	0,538	0,485	0,572
g_2	0	0	0
ω_1	1,459	0,759	0,874
ω_2	−0,177	−0,194	−0,245
η	0,035	0,012	0,021

Таблица 2

Сравнение критических индексов в размерности $d = 3$ для неподвижной точки B при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	1,213	0,952	1,381
g_2	−2,190	−1,335	−2,347
ω_1	1,478	0,721	0,819
ω_2	−0,243	−0,008	−0,138
η	0,038	0,010	0,022

Таблица 3

Сравнение критических индексов в размерности $d = 3$ для неподвижной точки C при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	1,025	0,896	1,141
g_2	−1,367	−1,194	−1,521
ω_1	1,712	0,724	0,889
ω_2	−0,009	0,035	0,126
η	0,039	0,010	0,022

Случай $d = 2$. В случае размерности пространства $d = 2$ были получены следующие выражения для РГ-функций (для удобства в этом разделе всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(2\pi)$):

$$\frac{\beta_1}{2} = -g_1 + (0{,}083333n^2 - 0{,}083333n + 1{,}333333)g_1^2 + (0{,}333333n - 0{,}166667)g_1g_2 + \\ + 0{,}25g_2^2 + (-0{,}143542n^2 + 0{,}143542n - 1{,}32431)g_1^3 + \\ + (-0{,}699191n + 0{,}349595)g_1^2g_2 + (-0{,}020258n^2 + 0{,}020258n - 0{,}643635)g_1g_2^2 + \\ + (-0{,}046884n + 0{,}023442)g_2^3 + (0{,}005787n^4 - 0{,}011575n^3 + 0{,}351046n^2 - \\ - 0{,}345259n + 2{,}427669)g_1^4 + (0{,}050539n^3 - 0{,}075808n^2 + 2{,}036559n - \\ - 1{,}005645)g_1^3g_2 + (0{,}000456n^4 - 0{,}000911n^3 + 0{,}259558n^2 - \\ - 0{,}259103n + 2{,}230287)g_1^2g_2^2 + (0{,}004833n^3 - 0{,}007250n^2 + 0{,}434706n - \\ - 0{,}216145)g_1g_2^3 + (+0{,}009517n^2 - 0{,}009496n + 0{,}096221)g_2^4 + O(g^5),$$

$$\frac{\beta_2}{2} = -g_2 + 2{,}0g_1g_2 + (0{,}166667n - 0{,}083333)g_2^2 + (-0{,}081030n^2 + 0{,}081030n - \\ - 2{,}574540)g_1^2g_2 + (-0{,}699191n + 0{,}349595)g_1g_2^2 + (-0{,}012444n^2 + 0{,}012444n - \\ - 0{,}237309)g_2^3 + (-0{,}002120n^4 + 0{,}004240n^3 + 0{,}272194n^2 - 0{,}274314n + \\ + 5{,}688098)g_1^3g_2 + (-0{,}001888n^3 + 0{,}002832n^2 + 2{,}618419n - 1{,}309681)g_1^2g_2^2 + \\ + (0{,}146413n^2 - 0{,}146413n + 1{,}522642)g_1g_2^3 + (0{,}001155n^3 - 0{,}001743n^2 + \\ + 0{,}106368n - 0{,}0529323)g_2^4 + O(g^5),$$

$$\gamma_\phi = (0{,}006369n^2 - 0{,}006369n + 0{,}025475)g_1^2 + (0{,}025475n - 0{,}012737)g_1g_2 + \\ + (0{,}001592n^2 - 0{,}001592n + 0{,}006369)g_2^2 + (-0{,}000032n^4 + 0{,}000063n^3 -$$

$$- 0{,}000664n^2 + 0{,}000632n - 0{,}002023)g_1^3 + (-0{,}000190n^3 + 0{,}000284n^2 -$$
$$- 0{,}003129n + 0{,}001517)g_1^2 g_2 + (-0{,}000664n^2 + 0{,}000664n - 0{,}001232)g_1 g_2^2 +$$
$$+ (-0{,}000016n^3 + 0{,}000024n^2 - 0{,}000261n + 0{,}000126)g_2^3 + O(g^4).$$

Как и в предыдущем разделе, по известным разложениям РГ-функций находим координаты трёх нетривиальных критических точек и соответствующие им критические индексы в форме τ-разложения для единственного нетривиального случая $n = 4$.

Точка **A**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}428571\tau + 0{,}239836\tau^2 + 0{,}018647\tau^3, \\
g_2 &= 0, \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}559618\tau^2 + 0{,}539324\tau^3, \\
\frac{\omega_2}{2} &= -0{,}142857\tau - 0{,}171799\tau^2 - 0{,}00901592\tau^3, \\
\eta &= 0{,}037432\tau^2 + 0{,}039666\tau^3.
\end{aligned}$$

Точка **B**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}705882\tau + 0{,}926789\tau^2 + 0{,}423377\tau^3, \\
g_2 &= -0{,}705882\tau - 1{,}90794\tau^2 - 1{,}58056\tau^3, \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}617968\tau^2 + 0{,}448858\tau^3, \\
\frac{\omega_2}{2} &= 0{,}058823\tau - 0{,}119387\tau^2 - 0{,}362933\tau^3, \\
\eta &= 0{,}038080\tau^2 + 0{,}044797\tau^3.
\end{aligned}$$

Точка **C**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}818182\tau + 0{,}532022\tau^2 + 0{,}0668321\tau^3, \\
g_2 &= -1{,}09091\tau - 0{,}709362\tau^2 - 0{,}0891094\tau^3, \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0{,}650249\tau^2 + 0{,}682279\tau^3, \\
\frac{\omega_2}{2} &= -0{,}090909\tau + 0{,}350054\tau^2 + 0{,}0348665\tau^3, \\
\eta &= 0{,}037896\tau^2 + 0{,}047027\tau^3.
\end{aligned}$$

Полагая τ равным единице, получаем численные значения индексов. Результаты прямого суммирования, а также результаты борелевского пересуммирования с конформным маппингом получены при помощи описанных в работе [10] ε-разложений, а также параметров их асимптотик.

Из табл. 4–6 видно, что, как и в предыдущем разделе, для всех трёх неподвижных точек суммирование τ-разложений качественно подтверждает характер ИК-устойчивости, предсказываемый борелевским пересуммированием ε-разложений, что, в свою очередь, подтверждает обмен свойствами устойчивости между точками **B** и **C**.

Однако, в отличие от предыдущего раздела, суммирование τ-разложений приводит к тому, что точка **B** покидает границу физической области параметров (2)–(3). Тем не менее она всё же оказывается существенно ближе к границе данной области, чем в случае прямого суммирования ε-разложения. Возможным объяснением данного факта может служить более сильная расходимость рядов теории возмущений в случае $d = 2$, которая приводит к необходимости учитывать асимптотические свойства τ-разложений уже на уровне трёх петель. Этим же может объясняться и более существенное расхождение численных значений индексов, полученных различными методами, в сравнении со случаем $d = 3$.

Таблица 4

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки A при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	0,893	0,898	0,687
g_2	0	0	0
ω_1	7,631	1,269	1,959
ω_2	0,048	−0,372	−0,647
η	0,201	0,027	0,077

Таблица 5

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки B при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	2,200	1,775	2,056
g_2	−6,530	−2,617	−4,194
ω_1	7,992	1,167	1,662
ω_2	−1,872	−0,046	−0,847
η	0,221	0,023	0,082

Таблица 6

Сравнение критических индексов в размерности $d = 2$ для неподвижной точки C при $n = 4$

Индекс	ε-разложение	Борелевское пересуммирование	τ-разложение
g_1	1,433	1,599	1,417
g_2	−1,910	−2,132	−1,889
ω_1	9,982	1,176	2,064
ω_2	−0,776	0,112	0,588
η	0,230	0,022	0,085

Заключение. При помощи подхода ренормгруппы в реальном пространстве было исследовано критическое поведение $O(n)$-симметричной модели с антисимметричным тензорным параметром порядка. РГ-функции и критические индексы модели были вычислены в форме τ-разложения с трёхпетлевой точностью для физически интересных размерностей пространства $d = 2$ и 3.

Оказалось, что результаты применения данного подхода качественно согласуются с результатами обработки трёхпетлевых ε-разложений методом борелевского пересуммирования с конформным маппингом, полученными ранее в работе [10]. В частности, в обеих размерностях пространства подтверждается интересный факт обмена свойствами устойчивости между точками **B** и **C** в сравнении с однопетлевыми результатами.

Тем не менее численные значения критических индексов, полученные прямым суммированием τ-разложений, являются скорее промежуточными между прямым суммированием ε-разложений и результатом их обработки методом борелевского пересуммирования, учитывающего их асимптотический характер.

Таким образом, проблема надёжности полученных в работе [10] результатов решена в настоящей статье лишь частично. В этой связи по-прежнему остаётся актуальной задача вычисления и учёта следующих порядков рядов теории возмущений.

Литература

1. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.

2. *Васильев А. Н.* Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1998.

3. *Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V.* Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$-symmetric ϕ^4 model // Nucl. Phys. (B). 2016. Vol. 906. P. 147–167.

4. *Kompaniets M. V., Panzer E.* Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$-symmetric ϕ^4 theory and critical exponents // Phys. Rev. (D). 2017. Vol. 96. 036016.

5. *Kompaniets M. V., Panzer E.* Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the MS-scheme to six loops // Proc. conference "Loops and Legs in Quantum Field Theory". Leipzig, Germany, 2016. P. 038.

6. *Orlov E. V., Sokolov A. I.* Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the ve-loop renormalization-group approximation // Phys. Solid State. 2000. Vol. 42, N 11. P. 2151–2158.

7. *Sokolov A. I., Nikitina M. A.* Pseudo-ϵ-expansion and renormalized coupling constants at criticality // Phys. Rev. (E). 2014. Vol. 89. 052127.

8. *Sokolov A. I., Nikitina M. A.* Fisher exponent from pseudo-ϵ-expansion // Phys. Rev. (E). 2014. Vol. 90. 012102.

9. *Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M.* Critical behaviour of the $O(n)$-ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter // J. Phys. (A). 2013 Vol. 46. 405002.

10. *Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M.* Critical behavior of the $O(n)$-ϕ^4-model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation // Theor. Math. Phys. 2017. Vol. 190, N 2. P. 204–216.

11. *Brazovski S. A., Dmitriev L. D.* Phase transitions in cholesteric liquid crystals // Sov. Phys. JETP. 1975. Vol. 42, N 3. P. 497.

12. *Brazovski S. A., Filev V. M.* Critical phenomena in cholesteric liquid crystals // Sov. Phys. JETP. 1978 Vol. 48, N 3. P. 497–573.

13. *Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S.* Landau theory of cholesteric blue phases // Phys. Rev. (A). 1983. Vol. 28. P. 1114.

14. *Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S.* Landau theory of cholesteric blue phases: The role of higher harmonics // Phys. Rev. (A). 1984. Vol. 30. P. 3264.

15. *Hornreich R. M., Shtrikman S.* Some open questions in cholesteric blue phases // Z. Phys. (B): Cond. Matt. 1987. Vol. 68. P. 369.

16. *Belyakov V. A., Dmitrienko V. E.* The blue phase of liquid crystals // Sov. Phys. Uspekhi. 1985. Vol. 28. P. 535.

17. *Изюмов Ю. А., Сыромятников В. Н.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.: Наука, 1984.

18. *Dove M. T., Redfern S. A. T.* Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in (Na,K)$AlSi_3O_8$ and (Sr,Ca)$Al_2Si_2O_8$ feldspar solid solutions // Am. Mineral. 1997. Vol. 82. P. 8.

19. *Watson G. W., Parker S. C.* Dynamical instabilities in a-quartz and a-berlinite: A mechanism for amorphization // Phys. Rev. (B). 1995. Vol. 52. P. 13306.

20. *Goryainov S. V., Ovsyuk N. N.* Twisting of a-quartz tetrahedra at pressures near the transition to the amorphous state // J. Exp. Theor. Phys. Lett. 1999. Vol. 69. P. 467.

21. *Goryainov S. V., Ovsyuk N. N.* Mechanism of the formation of a soft mode in ferroelastic phase transition // J. Exp. Theor. Phys. Lett. 2001. Vol. 73, iss. 8. P. 408–410.

22. *Nalimov M. Yu., Komarova M. V., Honkonen J.* Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition // Theor. Math. Phys. 2013. Vol. 176, N 1. P. 89–97.

23. *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations // Nucl. Phys. (B). 2016. Vol. 905. P. 16–44.

24. *Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu.* Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations // Theor. Math. Phys. 2014. Vol. 181, N 2. P. 1448–1458.

25. *Nickel B. G., Meiron D. I., Baker G. A.* Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model // University of Guelph report. 1977.

26. *Baker G. A., Nickel B. G., Meiron D. I.* Critical indices from perturbation analysis of the Callan—Symanzik equation // Phys. Rev. (B). 1978. Vol. 17. P. 1365–1374.

27. *Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Critical exponents from field theory // Phys. Rev. (B). 1980. Vol. 21, N 9. P. 3976–3998.

28. *Guida R., Zinn-Justin J.* Critical exponents of the N-vector model // J. Phys. (A). 1998. Vol. 31. P. 8103.

29. *Folk R., Holovatch Yu., Yavorskii T.* Pseudo-ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // Phys. Rev. (B). 2000. Vol. 62. P. 12195.

30. *Holovatch Yu., Ivaneiko D., Delamotte B.* On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order // J. Phys. (A). 2004. Vol. 37. P. 3569.

31. *Adzhemyan L. Ts., Kirienko Yu. V., Kompaniets M. V.* Critical exponent η in 2D $O(N)$-symmetric φ^4-model up to 6 loops // arXiv: 1602.02324.

32. *Vermaseren J. A. M.* New features of FORM // arXiv: math-ph/0010025.

33. *Kuipers J., Ueda T., Vermaseren J. A. M., Vollinga J.* FORM version 4.0 // Comp. Phys. Comm. 2013. Vol. 184, N 5. P. 1453–1467.

References

1. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena.* Oxford, Clarendon, 1989.

2. Vasiliev A. N. *Kvantovopolevaia renormgruppa v teorii kriticheskogo povedeniia i stokhasticheskoi dinamike* [*The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*]. St. Petersburg, PNPI Publ., 1998. (In Russian)

3. Batkovich D. V., Chetyrkin K. G., Kompaniets M. V. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$-symmetric ϕ^4 model. *Nucl. Phys. (B)*, 2016, vol. 906, pp. 147–167.

4. Kompaniets M. V., Panzer E. Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$-symmetric ϕ^4 theory and critical exponents. *Phys. Rev. (D)*, 2017, vol. 96, 036016.

5. Kompaniets M. V., Panzer E. Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the MS-scheme to six loops. *Proc. conference "Loops and Legs in Quantum Field Theory"*. Leipzig, Germany, 2016, pp. 038.

6. Orlov E. V., Sokolov A. I. Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the ve-loop renormalization-group approximation. *Phys. Solid State*, 2000, vol. 42, no 11, pp. 2151–2158.

7. Sokolov A. I., Nikitina M. A. Pseudo-ϵ-expansion and renormalized coupling constants at criticality. *Phys. Rev. (E)*, 2014, vol. 89, 052127.

8. Sokolov A. I., Nikitina M. A. Fisher exponent from pseudo-ϵ-expansion. *Phys. Rev. (E)*, 2014, vol. 90, 012102.

9. Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M. Critical behaviour of the $O(n)$-ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter. *J. Phys. (A)*, 2013 Vol. 46, 405002.

10. Antonov N. V., Kompaniets M. V., Lebedev N. M. Critical behavior of the $O(n)$ ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation. *Theor. Math. Phys.*, 2017, vol. 190, no 2, pp. 204–216.

11. Brazovski S. A., Dmitriev L. D. Phase transitions in cholesteric liquid crystals. *Sov. Phys. JETP*, 1975, vol. 42, no 3, pp. 497.

12. Brazovski S. A., Filev V. M. Critical phenomena in cholesteric liquid crystals. *Sov. Phys. JETP*, 1978 Vol. 48, no 3, pp. 497–573.

13. Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S. Landau theory of cholesteric blue phases. *Phys. Rev. (A)*, 1983, vol. 28, pp. 1114.

14. Grebel H., Hornreich R. M., Shtrikman S. Landau theory of cholesteric blue phases: The role of higher harmonics. *Phys. Rev. (A)*, 1984, vol. 30, pp. 3264.

15. Hornreich R. M., Shtrikman S. Some open questions in cholesteric blue phases. *Z. Phys. (B): Cond. Matt.*, 1987, vol. 68, pp. 369.

16. Belyakov V. A., Dmitrienko V. E. The blue phase of liquid crystals. *Sov. Phys. Uspekhi*, 1985, vol. 28, pp. 535.

17. Iziumov Iu. A., Syromiatnikov V. N. *Fazovye perekhody i simmetriia kristallov* [*Phase transitions and symmetry of crystals*]. Moscow, Nauka Publ., 1984. (In Russian)

18. Dove M. T., Redfern S. A. T. Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in (Na,K)$AlSi_3O_8$ and (Sr,Ca)$Al_2Si_2O_8$ feldspar solid solutions. *Am. Mineral*, 1997, vol. 82, pp. 8.

19. Watson G. W., Parker S. C. Dynamical instabilities in a-quartz and a-berlinite: A mechanism for amorphization. *Phys. Rev. (B)*, 1995, vol. 52, pp. 13306.

20. Goryainov S. V., Ovsyuk N. N. Twisting of a-quartz tetrahedra at pressures near the transition to the amorphous state. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 1999, vol. 69, pp. 467.

21. Goryainov S. V., Ovsyuk N. N. Mechanism of the formation of a soft mode in ferroelastic phase transition. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, 2001, vol. 73, iss. 8, pp. 408–410.

22. Nalimov M. Yu., Komarova M. V., Honkonen J. Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition. *Theor. Math. Phys.*, 2013, vol. 176, no 1, pp. 89–97.

23. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu. Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations. *Nucl. Phys. (B)*, 2016, vol. 905, pp. 16–44.

24. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu. Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 181, no 2, pp. 1448–1458.

25. Nickel B. G., Meiron D. I., Baker G. A. Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model. *University of Guelph report*, 1977.

26. Baker G. A., Nickel B. G., Meiron D. I. Critical indices from perturbation analysis of the Callan—Symanzik equation. *Phys. Rev. (B)*, 1978, vol. 17, pp. 1365–1374.

27. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev. (B)*, 1980, vol. 21, no 9, pp. 3976–3998.

28. Guida R., Zinn-Justin J. Critical exponents of the N-vector model. *J. Phys. (A)*, 1998, vol. 31, pp. 8103.

29. Folk R., Holovatch Yu., Yavorskii T. Pseudo-ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model. *Phys. Rev. (B)*, 2000, vol. 62, pp. 12195.

30. Holovatch Yu., Ivaneiko D., Delamotte B. On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order. *J. Phys. (A)*, 2004, vol. 37, pp. 3569.

31. Adzhemyan L. Ts., Kirienko Yu. V., Kompaniets M. V. Critical exponent η in 2D $O(N)$-symmetric φ^4-model up to 6 loops. *arXiv*: 1602.02324.

32. Vermaseren J. A. M. New features of FORM. *arXiv*: math-ph/0010025.

33. Kuipers J., Ueda T., Vermaseren J. A. M., Vollinga J. FORM version 4.0. *Comp. Phys. Comm.*, 2013, vol. 184, no 5, pp. 1453–1467.

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2017 г.

Контактная информация

Лебедев Никита Михайлович — аспирант; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Компаниец Михаил Владимирович — доктор физико-математических наук, доцент; e-mail: m.kompaniets@spbu.ru

Lebedev Nikita Mihailovich — post-graduate student; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Kompaniets Mikhail Vladimirivich — Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor; e-mail: m.kompaniets@spbu.ru