УДК 532 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4

Н. М. Лебедев, П. И. Какинь

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ С «ЗАМОРОЖЕННЫМ» СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Проводится ренормгрупповой анализ четырёх моделей критического поведения с «замороженным» (статическим) шумом: модели случайного роста границы раздела фаз Кардара—Паризи—Занга и её бесконечнозарядной модификации, модели самоорганизованной критичности Хуа—Кардара и бесконечнозарядной модели эрозии ландшафта. «Замороженный» шум задаётся коррелятором $\langle ff \rangle \propto \delta(\omega)/k^4$ (где k — волновой вектор, ω — частота) и описывает неоднородность изучаемого профиля (растущей фазы, разрушаемого ландшафта и т. д.). Для двух моделей, имеющих бесконечное число констант связи, находится точное соотношение на критические размерности, определяющие инфракрасное асимптотическое (критическое) поведение системы. Для моделей Кардара—Паризи—Занга и Хуа—Кардара соответствующие критические размерности вычисляются в первом порядке разложения по отклонению от логарифмической размерности (однопетлевое приближение). Библиогр. 37 назв. Табл. 4.

Ключевые слова: ренормализационная группа, критическое поведение.

Для цитирования: *Лебедев Н. М., Какинь П. И.* Критическое поведение некоторых неравновесных систем с «замороженным» случайным шумом // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 398–416. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.404

N. M. Lebedev, P. I. Kakin

CRITICAL BEHAVIOR OF CERTAIN NON-EQUILIBRIUM SYSTEMS WITH A QUENCHED RANDOM NOISE

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Four models of critical behavior with quenched noise are studied by the means of renormalization group analysis. The models include the Kardar—Parisi—Zhang model of an interface random growth and its modification with an infinite number of coupling constants, the Hwa—Kardar model of a system in a self-organized critical state, and the model of landscape erosion with an infinite number of coupling constants. The quenched noise is described by the correlation function $\langle ff \rangle \propto \delta(\omega)/k^4$ (here k is a wave vector and ω is a frequency) and models variability of the studied profiles (e. g. growing interface, eroded landscape, etc.). For two models containing infinitely many coupling constants their critical exponents (that describe asymptotic — critical — behavior in an infrared range) satisfy a universal exact relation. For the models of the Kardar—Parisi—Zhang and Hwa—Kardar corresponding critical exponents are calculated to the first order of the expansion in the deviation from the logarithmic dimension (one-loop approximation). Refs 37. Tables 4.

Keywords: renormalization group, critical behavior.

For citation: Lebedev N. M., Kakin P. I. Critical behavior of certain non-equilibrium systems with a quenched random noise. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry.* 2017. Vol. 4 (62), iss. 4. P. 398–416. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.404

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-32-00086 мол-а.

Введение. В работе [1], посвящённой стохастической модели эрозии ландшафтов, был поднят вопрос о выборе шума, лучше всего описывающего всё то разнообразие процессов, которое приводит к размыванию речных и океанических ландшафтов. Одним из возможных шумов был предложен так называемый «замороженный» (не зависящий от времени) [2] шум $f = f(\boldsymbol{x}, h)$ — гауссов случайный шум с нулевым средним и заданным парным коррелятором:

$$\langle f(\boldsymbol{x}, h) f(\boldsymbol{x'}, h')\rangle = 2D_0 \delta(h - h')\delta^{(d)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{1}$$

с положительным амплитудным множителем $D_0 > 0$. Здесь $x, \boldsymbol{x'}$ — положение в порстранстве, а $h, \boldsymbol{h'}$ — значение поля высоты разрушаемого ландшафта в этих точках. Такой шум описывает неоднородность почвы, чья подверженность эрозии может случайно варьироваться.

Это определение была ослаблено до следующей «статической» формы:

$$\langle f(x) f(x')\rangle = 2D_0 \delta^{(d)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}). \tag{2}$$

Здесь $x = (\boldsymbol{x}, t)$, т. е. задача сохраняет свою динамику. Так определённый шум описывает ситуацию, в которой внешнее воздействие на ландшафт в среднем постоянно, и источником шума служит только неоднородность самого ландшафта.

Проведённый некорректно в работе [1] ренормгрупповой анализ модели эрозии с другим шумом (имеющим нулевое время корреляции) был исправлен в работе [3]. В последней также было указано на вероятную неуниверсальность критических размерностей процесса эрозии. Модифицированная в работе [3] модель была рассмотрена в работе [4] как модель со статическим шумом (2). Авторы работы [4] также указали на то, что неуниверсальные критические размерности возникают не в модели с шумом, имеющим нулевое время корреляции, а именно в модели со статическим шумом.

Тем не менее используемый авторами работы [4] так называемый метод функциональной (или непертурбативной) ренормгруппы ещё не до конца оправдал свою вычислительную точность. В связи с этим настоящая статья посвящена пертурбативному ренормгрупповому анализу модели эрозии со статическим шумом, а также анализу ряда других моделей критического поведение с этим шумом.

Изотропные модели. В течение последних десятилетий неослабевающий интерес вызывают процессы роста в различных физических системах. Наиболее характерным примером являются выпадение осадка на подложку и рост соответствующей фазовой границы. В качестве других примеров подобных физических систем выступают фронты отвердевания и пламени, дым и коллоидные агрегаты, опухоли и т. п. (см., например, [5–13] и литературу в них). Для описания подобных явлений был выдвинут целый ряд микроскопических моделей, таких, например, как модели Идена [10], Эдвардса—Вилкинсона [11], ограниченные модели «твёрдое тело на твёрдом теле» [12], баллистическое выпадение [13] и многие другие.

Перечисленные выше процессы роста имеют важную общую черту с поведением равновесных критических систем: они обнаруживают скейлинговое поведение (степенные зависимости корреляторов и функций отклика) с достаточно универсальными (не зависящим от особенностей конкретного процесса) индексами. Подобная аналогия естественным образом подводит к идее описания универсальных свойств процессов роста на основе определённых упрощённых моделей для сглаженного (крупнозернистого) поля высоты по аналогии с теорией критического поведения, в которой ренормгрупповой анализ упрощённых моделей успешно позволяет установить наличие и тип фазового перехода, а также дать надёжные оценки критических индексов [14, 15]. Однако, в отличие от теории критического состояния, где большинство типичных систем принадлежат классу универсальности, описываемому классической моделью φ^4, в качестве крупнозернистой модели роста обычно используется модель Кадара—Паризи—Занга (КПЗ) [16], задаваемая нелинейным дифференциальным уравнением

$$\partial_t h = \nu_0 \, \partial^2 h + \lambda_0 (\partial h)^2/2 + f, \tag{3}$$

а также её различные модификации. Здесь и далее поле высоты $h(x) = h(t, \boldsymbol{x})$ зависит от времени и d-мерной координаты подложки $\boldsymbol{x}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ обозначает оператор Лапласа и $(\partial h)^2 = \partial_i h \partial_i h$; суммирование по повторяющимся тензорным индексам всюду подразумевается. Коэффициент $\nu_0 > 0$, а λ_0 может иметь любой знак. В дальнейшем λ_0 полагается равным единице.

РГ-анализ модели КПЗ, начатый в работах [16, 17], в конечном счёте привёл к следующим заключениям [18, 19]. В теоретико-полевой формулировке стохастическая задача (3) с шумом (1) мультипликативно перенормируема. Нелинейность $(\partial h)^2$ в (3) логарифмична для $d = 2$ и ИК-существенна для $d < 2$. Таким образом, данную модель можно изучать при помощи стандартной техники РГ в рамках разложения по $\varepsilon = 2 - d$. Было показано, что соответствующие РГ-уравнения обладают нетривиальной неподвижной точкой с критическими индексами $\chi = 0$, $z = 2$ (точное соотношение $\chi + z = 2$ продиктовано галилеевой симметрией). Тем не менее неподвижная точка для $\varepsilon < 0$ является ИК-отталкивающей, тогда как для физически интересного случая $\varepsilon > 0$ она не лежит в физической области параметров модели (D_0, $\kappa_0 > 0$) и, таким образом, едва ли может описывать ИК-асимптотическое поведение задачи. Все эти результаты являются «пертурбативно точными», т. е. точными во всех порядках разложения по ε.

Модель КПЗ. В данном разделе рассматривается модель (3) с «замороженным» случайным шумом (2). Согласно общему утверждению [14, 15], данная стохастическая задача эквивалентна теоретико-полевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия:

$$S(\Phi) = h' D_0 h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_0 \, \partial^2 h + \frac{1}{2} (\partial h)^2 \right\}. \tag{4}$$

Здесь и далее подразумеваются все необходимые интегрирования по $x = (t, \boldsymbol{x})$ и суммирования по повторяющимся тензорным индексам, например:

$$hh' = \int dt \int d\boldsymbol{x} \; h(t, \boldsymbol{x}) \, h'(t, \boldsymbol{x}).$$

Стоит отметить, что в первом члене функционала (4) $h' D_0 h'$ подразумевается два интеграла по времени, а не один:

$$h' D_0 h' = \int dt \int dt' \int d\boldsymbol{x} \; h'(t', \boldsymbol{x}) \, D_0 \, h'(t, \boldsymbol{x}).$$

Теоретико-полевая формулировка означает, что корреляционные функции и функции отклика стохастической задачи (3) с шумом (2) могут быть соотнесены с функциями Грина теоретико-полевой модели с действием (4). Затравочные пропагаторы данной модели, определяемые свободной частью действия (4), в частотно-импульсном представлении имеют вид:

$$\langle hh' \rangle_0 = \langle h'h \rangle_0^* = \left\{ -i\omega + \nu k^2 \right\}^{-1}, \; \langle hh \rangle_0 = 2 D_0 2\pi \delta(\omega) / \nu^2 k^4, \tag{5}$$

а роль константы взаимодействия, являющейся параметром разложения в теории возмущений, играет параметр, определяемый из соображений размерности как $g_0 = D_0/\nu_0^4$.

Анализ УФ-расходимостей основывается на анализе канонических размерностей. Динамические модели типа (4) имеют два независимых масштаба: временной масштаб T и масштаб длины L. Каноническая размерность некоторой величины F (поля или параметра в функционале действия) может быть полностью описана двумя числами: частотной размерностью d_F^ω и импульсной размерностью d_F^k:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega}[L]^{-d_F^k}.$$

Они однозначно определяются из требования безразмерности функционала действия (отдельно по отношению к импульсным и частотной размерности) и условий нормировки: $d_k^k = -d_{\boldsymbol{x}}^k = 1$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$. В силу того, что в свободной теории $\partial_t \propto \partial^2$, полная каноническая размерность вводится как $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$. В теории перенормировки динамических моделей эта величина играет ту же роль, что и импульсная размерность в статических задачах.

Канонические размерности полей и параметров в модели (4) приведены в табл. 1. Она также включает перенормированные параметры (без нижнего индекса «о») и перенормировочную массу μ, которые будут введены позднее.

Таблица 1

Канонические размерности полей и параметров в модели (4)

F	h'	h	ν_0	g_0	g	μ
d_F^ω	-1	1	1	0	0	0
d_F^k	$d+2$	-2	-2	$4-d$	0	1
d_F	d	0	0	$4-d$	0	1

Из табл. 1 следует, что модель (4) логарифмична при $d = 4$, когда константа взаимодействия g становится безразмерной. В настоящей работе используется размерная регуляризация, в рамках которой УФ-расходимости в функциях Грина предстают в виде полюсов по отклонению размерности пространства от его логарифмического значения, в данном случае равного $\varepsilon = 4 - d$.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_{1\text{-н}}$, в частотно-импульсном представлении даётся соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - d_h N_h - d_{h'} N_{h'}, \tag{6}$$

где $N_h, N_{h'}$ — числа соответствующих полей, входящих в функцию Γ (см., например, [15]).

Полная размерность d_Γ в логарифмической теории — это формальный индекс УФ-расходимости: $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=0}$. Поверхностная УФ-расходимость, для исключения которой нужны контрчлены, может быть только в тех функциях Γ, для которых δ_Γ — неотрицательное целое. Контрчлен — полином по частотам и импульсам степени δ_Γ (при условии, что подразумевается соглашение $\omega \propto k^2$).

Если по какой-либо причине некоторое число внешних импульсов возникает как общий множитель во всех диаграммах данной функции Грина, то реальный индекс расходимости δ'_Γ будет меньше, чем δ_Γ, на соответствующее число единиц. Именно это и происходит в рассматриваемой модели: поле h входит в вершину $h'(\partial h)^2/2$ только в форме пространственной производной. Поэтому любое появление h в какой-либо функции Γ приводит к такому внешнему импульсу, и реальный индекс расходимости даётся выражением $\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_h$. Более того, h может возникнуть в соответствующем контрчлене только в форме производной. В итоге из табл. 1 и выражения (6) получаем для модели (4)

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_h = 6 - N_h - 4N_{h'}. \tag{7}$$

В динамических моделях все 1-неприводимые функции без полей отклика тождественно исчезают, так как их диаграммы всегда содержат замкнутые циклы запаздывающих линий (см., например, [15]). Таким образом, в (7) достаточно рассмотреть случай $N_{h'} > 0$, анализ которого приводит к выводу, что поверхностные УФ-расходимости в модели (4) содержатся в следующих 1-неприводимых функциях: $\langle h'hh\rangle_{1\text{-н}}$, $\langle h'h\rangle_{1\text{-н}}$.

Отдельного рассмотрения требует функция $\langle h'h'\rangle_{1\text{-н}}$. Её диаграммы содержат дельта-функцию от внешней частоты, которая приводит к отрицательному индексу расходимости δ', поэтому для такой функции последний корректно отражает сходимость, если его изменить: $\delta''_\Gamma = \delta'_\Gamma + 2$. Таким образом, данная функция также содержит поверхностные УФ-расходимости. Поскольку все эти члены присутствуют в действии (4), модель является мультипликативно ренормируемой.

Ренормированное действие получается из исходного (4) путём перенормировки полей $h \to Z_h h$; $h' \to Z_{h'} h'$ и параметров $D_0 = g_0 \nu_0^4 \to D = Z_g Z_\nu^4 g \nu^4 \mu^\varepsilon$ и имеет вид:

$$S_R(\Phi) = Z_1 h' D h' + h' \left\{ -\partial_t h + Z_2 \nu \partial^2 h + \frac{1}{2} Z_3 (\partial h)^2 \right\}. \tag{8}$$

Отсюда получаем выражения, связывающие нумерованные константы с константами перенормировки полей и параметров модели:

$$Z_g = Z_1 Z_2^{-4} Z_3^2,\ Z_\nu = Z_2,\ Z_h = Z_{h'}^{-1} = Z_3. \tag{9}$$

Константы Z_1, Z_2 и Z_3 вычисляются непосредственно из требования сокращения расходимостей в диаграммных представлениях функций Грина перенормированной модели (8). В данном разделе для вычисления констант ренормировки используется схема, в рамках которой все Z зависят только от полностью безразмерного параметра g. Используемая схема совпадает со схемой минимальных вычитаний (MS), где константы ренормировки принимают вид «$Z = 1 +$ полюсы только по ε» с точностью до замены $d = 4 - \varepsilon \to 4$ в явных выражениях ниже. Похожая перенормировочная схема, где размерность d удерживается в «геометрических множителях», возникающих из свёрток различных проекторов, ранее использовалась в [18]; её справедливость и эквивалентность схеме MS были продемонстрированы в [20].

Для удобства введём новое обозначение: $\tilde{g} = g S_d/(2\pi)^d$. Здесь и всюду далее $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в пространстве размерности d. Тогда вычисление в первом порядке по g (однопетлевое приближение) даёт

$$Z_1 = 1 - \frac{\tilde{g}}{\varepsilon},\ Z_2 = Z_3 = 1 + \frac{2\tilde{g}}{d\varepsilon} = 1 + \frac{\tilde{g}}{2\varepsilon}. \tag{10}$$

Уравнение ренормгруппы для ренормированной функции Грина $G_R(e, \mu, \dots)$, соответствующей модели (8), имеет вид (детальный вывод см. в монографиях [14, 15])

$$\{D_{RG} + N_h \gamma_h + N_{h'} \gamma_{h'}\}\ G_R(e, \mu, \dots) = 0, \tag{11}$$

где оператор D_{RG} и РГ-функции определяются соотношениями:

$$D_{RG} \equiv D_\mu + \beta_g \partial_g - \gamma_\nu D_\nu, \tag{12}$$

$$\gamma_F \equiv \widetilde{D}_\mu \ln Z_F,\ \beta_g \equiv \widetilde{D}_\mu g = g(-\gamma_g - \varepsilon). \tag{13}$$

Здесь $D_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x, а $\widetilde{D}_\mu$ есть оператор D_μ при фиксированных затравочных параметрах; $e = \{g, \nu\}$ — полный набор параметров модели.

Тогда из (9), (10), (13) в однопетлевом приближении получаем

$$\gamma_g = \tilde{g},\ \beta_g = -g(\tilde{g} + \varepsilon). \tag{14}$$

ИК-асимптотическое поведение (большие времена и расстояния) функций Грина определяется набором ИК-притягивающих неподвижных точек соответствующих уравнений РГ. Координаты неподвижных точек ищутся из условия зануления β-функции:

$$\beta(g_*) = 0. \tag{15}$$

Тип неподвижной точки определяется знаком производной $\partial\beta/\partial g$ в этой точке: ИК-притягивающей точке соответствует положительная производная.

Анализ выражения (14) обнаруживает две неподвижных точки:

1) гауссову (свободную) неподвижную точку:

$$g^* = 0,\ \partial\beta/\partial g|_{g^*} = -\varepsilon;$$

2) неподвижную точку:

$$g^* = -\varepsilon,\ \partial\beta/\partial g|_{g^*} = \varepsilon. \tag{16}$$

Точка, описываемая соотношением (16), является ИК-притягивающей в физически интересной размерности пространства $d = 2$, но при этом лежит в нефизической области значений (так как $g^* < 0$), что характерно для модели КПЗ [16].

Критическая размерность Δ_F некоторой ИК-существенной величины F даётся соотношением (с нормировочным условием $\Delta_k = 1$)

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \tag{17}$$

где

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^* \tag{18}$$

есть критическая размерность частоты; $d_F^{k,\omega}$ — канонические размерности F, данные в табл. 1; γ_F^* — значение аномальной размерности (13) в неподвижной точке (см., например, [15] для детального объяснения).

Из табл. 1 для размерностей полей находим

$$\Delta_h = -2 + \Delta_\omega + \gamma_h^*,\ \Delta_{h'} = d + 2 - \Delta_\omega + \gamma_h^*.$$

С учётом соотношений (9) в однопетлевом приближении получаем для гауссовой неподвижной точки

$$\Delta_h = 0,\ \Delta_{h'} = d,\ \Delta_\omega = 2 \tag{19}$$

и для неподвижной точки (16)

$$\Delta_h = 0,\ \Delta_{h'} = d,\ \Delta_\omega = 2 - \varepsilon/4. \tag{20}$$

Бесконечнозарядная модель роста. В работе [21] был предложен другой вариант модели (3), а именно

$$\partial_t h = \nu_0\, \partial^2 h + \partial^2 h^2/2 + f. \tag{21}$$

Однако в работе [22] было показано, что такая модель не является мультипликативно ренормируемой, так как взаимодействие $\partial^2 h^2/2$ с необходимостью порождает бесконечное число новых контрчленов вида $\partial^2 h^n$ с любым $n = 1, 2, 3, \ldots$ Поэтому следует рассматривать следующую модель [22]:

$$\partial_t h = \nu_0\, \partial^2 h + \partial^2 V(h) + f, \tag{22}$$

где функция $V(h)$ задаётся своим рядом Тейлора:

$$V(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!}. \tag{23}$$

Аналогично задаче, рассмотренной выше, модель (22) с шумом (2) эквивалентна квантовополевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия (D_0 при $h'h'$ убирается путём перемасштабирования полей и коэффициентов):

$$S(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_0\, \partial^2 h + \partial^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!} \right\}. \tag{24}$$

Канонические размерности полей и параметров модели приведены в табл. 2. Их анализ показывает, что логарифмической для данной модели является размерность $d = 4$. Также анализ размерностей позволяет найти формальный индекс расходимости 1-неприводимых функций Грина: $\delta_\Gamma = 6 - 4N_{h'}$. Дополнительный учёт производной, содержащейся во всех вершинах, приводит к реальному индексу расходимости:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - 2N_h = 6 - 6N_{h'}. \tag{25}$$

Последний, в свою очередь, означает, что расходимости, требующие устранения путём перенормировки, возникают во всех функциях Грина, содержащих одно поле h' и любое число полей h. Иными словами, как и в работе [22], модель (24) мультипликативно ренормируема с бесконечным набором констант ренормировки:

$$S_R(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + Z_1 \nu \partial^2 h + \partial^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n}{n!} \right\}. \tag{26}$$

Связь бесконечного набора констант связи g_{n0} и их ренормированных аналогов g_n с коэффициентами λ_{n0} и λ_n соответственно также определяется из размерных соображений и задаётся соотношениями:

$$\lambda_{n0} = g_{n0} \nu_0^n, \ \lambda_n = \mu^{\varepsilon(n-1)/2} g_n \nu^n, \tag{27}$$

где $\varepsilon = 4 - d$, а μ — ренормировочная масса.

Соотношения (13) и (27) позволяют установить, что соответствующие β-функции выглядят следующим образом:

$$\beta_n = g_n \left[-\varepsilon(n-1)/2 - \gamma_{g_n} \right], \tag{28}$$

где γ_{g_n} — аномальные размерности констант связи g_n.

Таблица 2

Канонические размерности полей и параметров в модели (24)

F	h'	h	ν_0	λ_{n0}	g_0	g	μ
d_F^ω	1	-1	1	n	0	0	0
d_F^k	$d/2$	$d/2$	-2	$-2-(n-1)d/2$	$(1-n)(d-4)/2$	0	1
d_F	$d/2+2$	$d/2-2$	0	$(1-n)(d-4)/2$	$(1-n)(d-4)/2$	0	1

Воспользуемся предложенным в работе [22] методом вычисления констант ренормировки Z: формально выразим однопетлевой контрчлен через функцию $V(h)$. Для этого рассмотрим разложение производящего функционала $\Gamma_R(\Phi)$ 1-неприводимых функций Грина в p петлях:

$$\Gamma_R(\Phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma^{(p)}(\Phi),\ \Gamma^{(0)}(\Phi) = S_R(\Phi). \tag{29}$$

Беспетлевой (древесный) вклад представляет собой просто действие модели, тогда как однопетлевой вклад можно найти при помощи следующего соотношения (см., например, работу [15]):

$$\Gamma^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\frac{W}{W_0}, \tag{30}$$

где W — линейный оператор с ядром

$$W(x,y) = -\frac{\delta^2 S_R(\Phi)}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)}, \tag{31}$$

а W_0 — схожее выражение для свободной части действия.

И W, и W_0 представляют собой матрицы 2×2 для пары полей $\Phi = \{h, h'\}$.

Требование, чтобы в (29) не было УФ-расходимостей, вместе со схемой минимальных вычитаний приводят к однозначно определённым значениям для констант Z. Мы полагаем $Z = 1$ в (30) в однопетлевом приближении, одновременно удерживая вклады ведущего порядка по константам взаимодействия g_n в беспетлевом вкладе в константы Z; для внутренней согласованности мы полагаем $g_n \simeq g_2^{n-2}$.

Рассмотрим ряд Тейлора для функции $V(h)$ и её ренормированного аналога $V_R(h)$:

$$V(h) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n h^n(x)}{n!},\ V_R(h) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{Z_n\lambda_n h^n(x)}{n!}. \tag{32}$$

В дальнейшем мы будем интерпретировать подобные объекты как функции единственной переменной $h(x)$, а V', V'' и т. д. — как соответствующие производные по этой переменной. В этих обозначениях матрицу W (при условии, что $Z = 1$) можно формально записать как

$$W = \begin{pmatrix} -\partial^2 h' V'' & L^T \\ L & -2 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $L \equiv \partial_t - \nu\partial^2 - \partial^2 V'$ и $L^T \equiv -\partial_t - \nu\partial^2 - V'\partial^2$ — транспонированный оператор.

Для того чтобы найти константы Z, нам нужна только расходящаяся часть выражения (29), которая (согласно форме контрчлена) имеет форму

$$\int dx \partial^2 h'(x) R(h(x)),$$

где функция $R(h)$ подобна $V(h)$. Это значит, что след логарифма в (30) с матрицей (33) нужно сосчитать только в первом порядке по её hh-элементу $-\partial^2 h' \cdot V''$. Это можно сделать при помощи хорошо известной формулы $\delta(\mathrm{Tr} \ln K) = \mathrm{Tr}(K^{-1}\delta K)$ [15], справедливой для любой вариации δK. Варьируя только hh-элемент матрицы W, получаем

$$\int dx \partial^2 h'(x) R(h(x)) \simeq -\mathrm{Tr}[D_{hh} V'' \partial^2 h'] = -\int dx\ D^{(hh)}(x,x) V''(h(x)) \partial^2 h'(x), \quad (34)$$

где $D_{hh} = (W^{-1})_{hh}$ при $h' = 0$.

По определению $D^{(hh)}$ — обыкновенный пропагатор $\langle hh \rangle$-модели (26) с $Z = 1$ и с выражением $\nu\partial^2 + \partial^2 V'$, стоящим вместо $\nu\partial^2$.

Есть ещё одно соображение, которое нужно учесть. После того как ∂^2 превращается во внешний множитель для h', в контрчлене остаётся только логарифмически-расходящаяся часть. Это значит, что при подсчёте расходящейся части какой-либо диаграммы все внешние импульсы можно положить равными нулю (ИК-регуляризация обеспечивается путём обрезания). В свою очередь, это приводит к тому, что можно игнорировать неоднородность $\partial^2 h'(x)$ и $h(x)$ (оба поля можно считать константами) в (34), когда мы отбираем полюсы по ε. Тогда можно легко вычислить $D^{(hh)}(x,x)$ путём перехода к частотно-импульсному представлению:

$$D^{(hh)}(x,x) = \int\int \frac{d\omega d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{4\pi\delta(\omega)}{(\nu + V')^2 k^4} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{2}{(\nu + V')^2} + \ldots, \quad (35)$$

где многоточие означает УФ-конечную часть.

Подставляя (34) и (35) в (30), получаем следующее выражение для расходящейся части $\Gamma_1(\Phi)$ с необходимой точностью:

$$\Gamma_1(\Phi) = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \int dx \frac{V''(h(x))}{(\nu_\parallel + V'(h(x)))^2} \partial^2 h'(x). \quad (36)$$

Найти однопетлевые вклады порядка $1/\varepsilon$ во всех константах Z можно из требования, что сумма (36) и беспетлевых вкладов в (30) не имеет полюса по ε (они сокращают друг друга).

Введём представление

$$\frac{V''(h(x))}{(\nu_\parallel + V'(h(x)))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\varepsilon(n+1)/2} \nu^n \frac{r_n h^n}{n!} \quad (37)$$

для ряда Тейлора подынтегральной части (36).

Тогда r_n — полностью безразмерные коэффициенты — полиномы по зарядам g_n. Объединяя описанное выше условие гашения полюсов по ε и (27), получаем в однопетлевом приближении:

$$Z_1 = 1 - \frac{r_1 S_d}{(2\pi)^d \varepsilon},\ Z_n = 1 - \frac{r_n}{g_n} \frac{S_d}{(2\pi)^d \varepsilon}. \quad (38)$$

Из определений (13), выражений (28), (38), а также соотношений $Z_1 = Z_\nu$, $Z_{g_n} = Z_n Z_\nu^{-n}$ получаем однопетлевые выражения для РГ-функций:

$$\gamma_\nu = a D_g r_1/2, \quad (39)$$

$$\beta_n = -\varepsilon \frac{n-1}{2} g_n + n g_n \gamma_\nu - \frac{a}{2}(D_g - n + 1) r_n, \quad (40)$$

где $a \equiv S_d/(2\pi)^d$, $D_g \equiv \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) g_n \partial_{g_n}$.

Явные выражения для первых четырёх коэффициентов r_n (первый член r_0 в (37) не даёт вклада в (36), так как стоит при полной производной) находятся из определений (37), (32), (27):

$$\begin{aligned}
&r_1 = g_3 - 2g_2^2,\ r_2 = g_4 - 6g_2g_3 + 6g_2^3,\\
&r_3 = g_5 - 8g_2g_4 - 6g_3^2 + 36g_2^2g_3 - 24g_2^4,\\
&r_4 = g_6 - 10g_2g_5 + 60g_2^2g_4 - 20g_3g_4 + 90g_2g_3^2 - 240g_2^3g_3 + 120g_2^5,
\end{aligned}$$

а при подстановке в (39), (40) эти коэффициенты дают:

$$\gamma_\nu = a(g_3 - 2g_2^2), \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_2 = -\frac{\varepsilon}{2}\,g_2 + a(-g_4 + 8g_2g_3 - 10g_2^3),\\
&\beta_3 = -\varepsilon g_3 + a(-g_5 + 8g_2g_4 + 9g_3^2 - 42g_2^2g_3 + 24g_2^4),\\
&\beta_4 = -\frac{3}{2}\,\varepsilon g_4 + a(-g_6 + 10g_5g_2 + 24g_4g_3 - 68g_4g_2^2 + 240g_3g_2^3 - 90g_3^3g_2 - 120g_2^5).
\end{aligned} \tag{42}$$

Неподвижные точки РГ-уравнений находятся из требования $\beta_n(g_*) = 0$, $n = 2, 3, \ldots$ Явная форма β-функций (42) показывает, что мы можем выбрать координаты g_{2*} и g_{3*} произвольно, тогда как все g_{n*} с $n \geqslant 4$ будут однозначно определяться через них с помощью уравнений $\beta_k(g_*) = 0$, $k \geqslant 2$. Это значит, что в бесконечномерном пространстве констант взаимодействия $g \equiv \{g_n\}$ РГ-уравнения (12) имеют двумерную поверхность неподвижных точек, параметризованную значениями g_{2*} и g_{3*}.

Неподвижная точка ИК-устойчива, если все вещественные части собственных чисел матрицы $\omega_{nm} = \partial\beta_n/\partial g_m$ строго положительны в этой точке. Необходимым условием для этого является требование, чтобы сумма всех диагональных элементов ω_{nn} была положительна. Из (39) можно получить эти элементы для всех значений n:

$$\omega_{22} = -\frac{\varepsilon}{2} + a\left[8g_{3*} - 30g_{2*}^2\right],\ \omega_{33} = -\varepsilon + a\left[18g_{3*} - 84g_{2*}^2\right],$$

и для $n \geqslant 4$ имеем

$$\omega_{nn} = -\varepsilon\frac{n-1}{2} + an(n+2)g_{3*} - an(3n+5)g_{2*}^2.$$

Существует область, где все эти величины положительны. Конечно, это только необходимое условие; тем не менее мы можем предположить, что поверхность неподвижных точек g_* содержит область ИК-устойчивых точек. Если это действительно так, модель может проявлять ИК-скейлинг с неуниверсальными критическими размерностями (т. е. зависящими от параметров g_{2*} и g_{3*}).

Так как поле h не ренормируется, имеем $\gamma_h^* = 0$. Соотношения (17) вместе с каноническими размерностями дают точный результат $2\Delta_h = d - 2\Delta_\omega$; из (41) находим в однопетлевом приближении, что $\Delta_\omega = 2 - a(g_{3*} - 2g_{2*}^2)$, $\Delta_h = d/2 - 2 + a(g_{3*} - 2g_{2*}^2)$.

Анизотропные модели. Некоторые системы обладают ярко выраженной анизотропией. Например, песчаный профиль с заданным фиксированным наклоном или разрушаемый эрозией берег реки с неизменным направлением выноса размытых масс. Для рассмотрения таких систем будем вводить анизотропию следующим образом: пусть константа $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, определяющий выбранное направление (направление наклона). Тогда любой вектор можно разложить на компоненты, ортогональные и параллельные к $\boldsymbol{n}$. В частности, для d-мерной горизонтальной координаты $\boldsymbol{x}$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{n}x_\parallel$, где $\boldsymbol{x}_\perp \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Производную в полном d-мерном $\boldsymbol{x}$ пространстве можно обозначить как $\partial = \partial/\partial x_i$, где $i = 1, \ldots, d$, и производную в подпространстве, ортогональном к $\boldsymbol{n}$, как $\partial_\perp = \partial/\partial x_{\perp i}$, где $i = 1, \ldots, d-1$. Тогда производная вдоль параллельного направления будет записываться как $\partial_\parallel = \boldsymbol{n} \cdot \partial$.

Модель СОК. Феномен СОК заключается в возникновении скейлинга в открытых неравновесных системах с диссипативным переносом [23–25]. В отличие от равновесных систем они не имеют управляющих параметров (т. е. параметров вроде температуры в фазовых переходах второго рода) и достигают критичности за счёт своей внутренней динамики [26]. В работе [27] была предложена непрерывная модель СОК, описывающая некоторый профиль (например, песчаный). С учётом влияния турбулентного перемешивания эта модель была рассмотрена в работе [28], а в связи с эрозией ландшафтов она обсуждалась в работах [1, 3, 4].

Рассматриваемая в этом разделе модель СОК задаётся стохастическим дифференциальным уравнением для поля высоты $h(x) = h(t, x)$ [27]:

$$\partial_t h = \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h - \partial_\parallel h^2/2 + f \tag{43}$$

со статическим шумом f (2). Здесь $\nu_{\perp 0}$ и $\nu_{\parallel 0}$ — коэффициенты вязкости.

Задача (43) эквивалентна квантовополевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия:

$$S(\Phi) = h' D_0 h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h - \partial_\parallel h^2/2 \right\}. \tag{44}$$

Затравочные пропагаторы в частотно-импульсном представлении имеют вид

$$\langle h h' \rangle_0 = \langle h' h \rangle_0^* = \left\{ -i\omega + \nu_\parallel k_\parallel^2 + \nu_\perp k_\perp^2 \right\}^{-1}, \ \langle h h \rangle_0 = 2 D_0 2\pi \delta(\omega) / \left\{ \nu_\parallel k_\parallel^2 + \nu_\perp k_\perp^2 \right\}^2 \tag{45}$$

При анализе канонических размерностей помимо временно́го масштаба следует рассматривать также два независимых импульсных масштаба, соответствующих направлениям, перпендикулярному и параллельному вектору $\boldsymbol{n}$, с соответствующими размерностями $d_F^\perp$ и $d_F^\parallel$:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L_\perp]^{-d_F^\perp} [L_\parallel]^{-d_F^\parallel},$$

где $L_\perp$ и $L_\parallel$ — масштабы длины в соответствующих подпространствах.

Итоговая импульсная размерность может быть найдена из соотношения $d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$, после чего полная каноническая размерность вводится по обычному правилу $d_F = d_F^k + 2 d_F^\omega$. При этом используются стандартные условия нормировки:

$$d_{k_\perp}^\perp = -d_{\boldsymbol{x}_\perp}^\perp = 1, \ d_{k_\perp}^\parallel = -d_{\boldsymbol{x}_\perp}^\parallel = 0, \ d_{k_\perp}^\omega = d_{k_\parallel}^\omega = 0, \ d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1.$$

Канонические размерности полей и параметров в модели (44) приведены в табл. 3, из которой видно, что $d = 6$ — верхнее критическое значение размерности пространства.

Связь константы взаимодействия g_0 и её ренормированного аналога g с параметрами D_0 и D также определяется из соображений размерности и задаётся соотношениями:

$$D_0 = g_0 \nu_{\parallel 0}^{3/2} \nu_{\perp 0}^{5/2}, \ D = Z_g Z_{\nu_\parallel}^{3/2} Z_{\nu_\perp}^{5/2} g \nu_\parallel^{3/2} \nu_\perp^{5/2} \mu^\varepsilon,$$

где $\varepsilon = 4 - d$, μ — ренормировочная масса.

Таблица 3

Канонические размерности полей и параметров в модели (44)

F	h'	h	$\nu_{\perp 0}$	$\nu_{\parallel 0}$	D_0	g_0	g	μ
d_F^{ω}	-1	1	0	0	4	0	0	0
$d_F^{\parallel}$	2	-1	0	-2	-3	0	0	0
$d_F^{\perp}$	$d-1$	0	-2	0	$1-d$	$6-d$	0	1
d_F	$d-1$	1	0	0	$6-d$	$6-d$	0	1

Из табл. 3 и выражения (6) получаем реальный индекс расходимости для 1-неприводимых функций Грина модели (44):

$$\delta'_{\Gamma} = 6 - 6N_{h'} - N_h. \tag{46}$$

Анализ данного выражения приводит к выводу, что поверхностные УФ-расходимости в модели (44) содержатся только в 1-неприводимых функциях $\langle h'hh\rangle_{1\text{-н}}$ и $\langle h'h\rangle_{1\text{-н}}$, в то время как функция $\langle h'h'\rangle_{1\text{-н}}$ имеет отрицательный индекс сходимости даже с учётом дельта-функции от внешней частоты, содержащейся в её диаграммах. Также следует учесть тот факт, что функция $\langle h'h\rangle_{1\text{-н}}$ не содержит контрчленов к члену действия с производной $\partial_\perp^2$, так как поле h' всегда входит в функции Грина только в форме производной $\partial_\parallel h$. Таким образом, модель (44) мультипликативно ренормируема с функционалом действия:

$$S_R(\Phi) = h'Dh' + h'\left\{-\partial_t h + \nu_\perp \partial_\perp^2 h + Z_1 \nu_\parallel\, \partial_\parallel^2 h - Z_2 \partial_\parallel h^2/2\right\}. \tag{47}$$

Отсюда получаем выражения, связывающие нумерованные константы с константами перенормировки полей и параметров модели:

$$Z_g = Z_1^{-3/2} Z_2^2,\ Z_{\nu_\parallel} = Z_1,\ Z_{\nu_\perp} = 1,\ Z_h = Z_{h'}^{-1} = Z_2. \tag{48}$$

Константы Z_1 и Z_2 вычисляются непосредственно из требования сокращения расходимостей в диаграммных представлениях функций Грина перенормированной модели (47). В данном разделе для вычисления констант ренормировки используется та же схема вычитаний, что и для модели КПЗ выше.

Однопетлевой расчёт даёт следующие выражения для констант ренормировки:

$$Z_1 = 1 - 2\left(1 - \frac{2}{d}\right)\frac{\tilde g}{\varepsilon} = 1 - \frac{4\tilde g}{3\varepsilon},\ Z_2 = 1 + \frac{2\tilde g}{d\varepsilon} = 1 + \frac{\tilde g}{3\varepsilon},$$

где для удобства сделана замена $\tilde g = S_d/(2\pi)^d$.

Отсюда, а также из определения (13) получаем явное выражение для β функции:

$$\beta_g = \tilde g(-\varepsilon + 8\tilde g/3).$$

Его анализ показывает, что в модели (44) присутствуют две неподвижных точки:
1) гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g^* = 0,\ \partial\beta/\partial g|_{g^*} = -\varepsilon;$$

2) неподвижная точка:

$$g^* = 3\varepsilon/8,\ \partial\beta/\partial g|_{g^*} = \varepsilon. \tag{49}$$

Вторая точка является ИК-притягивающей в физически интересной размерности пространства $d = 2$, что предполагает скейлинговое поведение функций Грина модели (44) с универсальными критическими показателями.

В анизотропном случае критическая размерность Δ_F некоторой ИК-существенной величины F даётся соотношением (с нормировочным условием $\Delta_{k_\perp} = 1$) [15]:

$$\Delta_F = d_F^\perp + d_F^\parallel \Delta_\parallel + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \tag{50}$$

где

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma^*_{\nu_\perp},\ \Delta_\parallel = 1 + \gamma^*_{\nu_\parallel}/2. \tag{51}$$

Пользуясь данными определениями, в однопетлевом приближении находим:

$$\Delta_h = 1,\ \Delta_{h'} = d - 1,\ \Delta_\omega = 2,\ \Delta_\parallel = 1 \tag{52}$$

для гауссовой неподвижной точки и

$$\Delta_h = 1 - \varepsilon,\ \Delta_{h'} = d - 1 + 5\varepsilon/4,\ \Delta_\omega = 2,\ \Delta_\parallel = 1 + \varepsilon/4 \tag{53}$$

для ИК-притягивающей неподвижной точки (49).

Бесконечнозарядная модель эрозии. Для эрозии поверхности с заданным средним наклоном полуфеноменологическая модель была предложена в работе [1]. В отличие от более ранних моделей, описывающих эрозию уравнением диффузии с разными типами шумов [29–33], и по аналогии с моделью СОК Хуа—Кардара [27] эта модель содержит нелинейный вклад и является анизотропной. Однако в существующей формулировке она не является мультипликативно ренормируемой и должна быть обобщена [3]. В связи с этим в дальнейшем рассмотрении под моделью эрозии будет пониматься модифицированная модель:

$$\partial_t h = \nu_\perp\, \partial_\perp^2 h + \nu_\parallel\, \partial_\parallel^2 h + \partial_\parallel^2 V(h) + f \tag{54}$$

с $f(x)$ — статическим шумом (2); $V(h)$ задаётся рядом Тейлора (23).

Эта задача эквивалентна квантовополевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия (D_0 убирается путём перемасштабирования):

$$S(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h + \partial_\parallel^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!} \right\}. \tag{55}$$

Канонические размерности полей и параметров модели приведены в табл. 4. Их анализ совпадает с проведённым выше анализом и приводит к выводу, что расходимости, требующие устранения путём перенормировки, возникают во всех функциях

Таблица 4

Канонические размерности полей и параметров в модели (55)

F	h'	h	$\nu_{\perp 0}$	$\nu_{\parallel 0}$	λ_{n0}	g_0	g	μ
d_F^ω	1	-1	1	1	n	0	0	0
$d_F^\parallel$	1/2	1/2	0	-2	$-(n+3)/2$	0	0	0
$d_F^\perp$	$(d-1)/2$	$(d-1)/2$	-2	0	$(d-1)((1-n)/2)$	$(1-n)(d-4)/2$	0	1
d_F	$d/2+2$	$d/2-2$	0	0	$(1-n)(d-4)/2$	$(1-n)(d-4)/2$	0	1

Грина, содержащих одно поле h' и любое число полей h. Кроме того, здесь, как и в модели (44), не возникает контрчленов к члену действия с производной $\partial_\perp^2$, поскольку поле h' всегда входит в функции Грина только в форме производной $\partial_\| h$. Таким образом, модель (55) является мультипликативно ренормируемой, а верхним критическим значением размерности пространства является $d = 4$. Ренормированное действие может быть записано в форме

$$S_R(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_\perp \partial_\perp^2 h + Z_\| \nu_\| \, \partial_\|^2 h + \partial_\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n}{n!} \right\}. \qquad (56)$$

Затравочные заряды g_{n0} и полностью безразмерные ренормированные заряды g_n выражаются через затравочные параметры λ_{n0} и ренормированные параметры λ_n следующим образом:

$$\lambda_{n0} = g_{n0} \nu_{\|0}^{(n+3)/4} \nu_{\perp 0}^{3(n-1)/4}, \; \lambda_n = g_n \nu_\|^{(n+3)/4} \nu_\perp^{3(n-1)/4} \mu^{\varepsilon(n-1)/2}, \qquad (57)$$

где $\varepsilon = 4 - d$, μ — ренормировочная масса.

Действуя так же, как для бесконечнозарядной модели роста, получаем для функции $D^{(hh)}(x, x)$ следующее выражение:

$$D^{(hh)}(x, x) = \int \int \frac{d\omega d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{4\pi\delta(\omega)}{(\nu_\perp k_\perp^2 + (\nu_\| + V')k_\|^2)^2} = \\ = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{(\nu_\perp(\nu_\| + V'))}} + \ldots \qquad (58)$$

Как следствие, для расходящейся части $\Gamma_1(\Phi)$ с нужной точностью получаем

$$\Gamma_1(\Phi) = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \int dx \frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_\perp(\nu_\| + V'(h(x)))}} \, \partial^2 h'(x). \qquad (59)$$

Введя представление

$$\frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_\perp(\nu_\| + V'(h(x)))}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\varepsilon(n+1)/2} \nu_\perp^{(n-1)/4} \nu_\|^{(n+3)/4} \frac{r_n h^n}{n!} \qquad (60)$$

и воспользовавшись изложенным выше требованием сокращения расходимостей, получаем константы ренормировки в однопетлевом приближении:

$$Z_\| = 1 - \frac{r_1 S_d}{(2\pi)^d \varepsilon}, \; Z_n = 1 - \frac{r_n}{g_n} \frac{S_d}{(2\pi)^d \varepsilon}, \qquad (61)$$

где явные выражения для первых четырёх коэффициентов r_n следующие:

$$r_1 = g_3 - \frac{1}{2} g_2^2,$$
$$r_2 = g_4 - \frac{3}{2} g_2 g_3 + \frac{3}{4} g_2^3,$$
$$r_3 = g_5 - 2 g_2 g_4 - \frac{3}{2} g_3^2 + \frac{9}{2} g_2^2 g_3 - \frac{15}{8} g_2^4,$$
$$r_4 = g_6 - \frac{5}{2} g_2 g_5 + \frac{15}{2} g_2^2 g_4 - 5 g_3 g_4 + \frac{45}{4} g_2 g_3^2 - \frac{75}{4} g_2^3 g_3 + \frac{105}{16} g_2^5.$$

Для ренормгрупповых функций получаем:

$$\gamma_{\|} = a(2g_3 - g_2^2), \tag{62}$$

$$\beta_2 = -\frac{\varepsilon}{2}\, g_2 + a\left(-g_4 + \frac{11}{2}\, g_2 g_3 - \frac{11}{4}\, g_2^3\right),$$

$$\beta_3 = -\varepsilon g_3 + a\left(-2g_5 + 4g_2 g_4 + 6g_3^2 - \frac{21}{2}\, g_2^2 g_3 + \frac{15}{4}\, g_2^4\right),$$

$$\beta_4 = -\frac{3\varepsilon}{2}\, g_4 + a\left(-2g_6 + 5g_2 g_5 + \frac{27}{2}\, g_4 g_3 - \frac{67}{4}\, g_4 g_2^2 - \frac{45}{2}\, g_3^2 g_2 + \frac{75}{2}\, g_2^3 g_3 - \frac{105}{8}\, g_2^5\right), \tag{63}$$

где $a \equiv S_d/2(2\pi)^d$.

Также для внутренней согласованности приближения было положено $g_n \sim g_2^{(n-1)}$.

Явная форма β-функций (63) показывает, что мы можем выбрать координаты g_{2*} и g_{3*} произвольно, тогда как все g_{n*} с $n \geqslant 4$ будут однозначно определяться через них. Это значит, что в бесконечномерном пространстве констант взаимодействия $g \equiv \{g_n\}$ РГ-уравнения (12) имеют двумерную поверхность неподвижных точек, параметризованную значениями g_{2*} и g_{3*}.

Диагональные элементы ω_{nn} матрицы $\omega_{nm} = \partial\beta_n/\partial g_m|_{g_*}$ следующие:

$$\omega_{22} = -\frac{\varepsilon}{2} + a\left[\frac{11}{2}\, g_{3*} - \frac{33}{4}\, g_{2*}^2\right],$$

$$\omega_{33} = -\varepsilon + a\left[12 g_{3*} - \frac{21}{2}\, g_{2*}^2\right],$$

и для $n \geqslant 4$ имеем

$$\omega_{nn} = -\varepsilon\frac{n-1}{2} + a\frac{(n+1)^2+2}{2}\, g_{3*} - \frac{a}{4}\,(n(3n+4)+3)g_{2*}^2.$$

Существует область, где все эти величины положительны. Это означает, что, как и для бесконечнозарядной модели роста, в рассматриваемом случае выполняется необходимое условие существования областей ИК-устойчивости на поверхности неподвижных точек g_*. В свою очередь, возможное существование таких областей означает, что модель может проявлять ИК-скейлинг с неуниверсальными критическими размерностями.

Как и прежде, для поля h имеем точный результат $2\Delta_h = d - 1 + \Delta_{\|} - \Delta_\omega$; из (62) находим в однопетлевом приближении: $\Delta_{\|} = 1 + a(2g_{3*} - g_{2*}^2)/2$, $\Delta_h = a(2g_{3*} - g_{2*}^2)/4$.

Заключение. При помощи стандартной квантовополевой ренормгруппы были изучены четыре модели неравновесного критического поведения. Среди них были модель случайного роста границы раздела фаз Кардара—Паризи—Занга (3), её бесконечнозарядная модификация (22), модель самоорганизованной критичности Хуа—Карадара (43) и бесконечнозарядная модель эрозии (54). Во всех задачах использовался «замороженный» (не зависящий от времени) случайный шум (2). Оказалось, что все модели могут быть переформулированы как ренормируемые квантовополевые модели.

Для модели Кардара—Паризи—Занга (3) были установлены два режима критического (инфракрасного асимптотического) поведения с критическими размерностями (19) и (20). В физически интересном случае двумерного пространства, однако, нетривиальный режим поведения недостижим (соответствующая неподвижная точка оказывается в нефизической области параметров), что характерно для этой модели [16].

Модель Хуа—Кардара (43) также демонстрирует два режима критического поведения с критическими размерностями (52) и (53).

Для обеих бесконечнозарядных моделей (модифицированной модели Кардара—Паризи—Занга (22) и модели эрозии (54)) были получены явный вид однопетлевого контрчлена и двумерная поверхность неподвижных точек, которая, вероятно, содержит область или области ИК-устойчивых точек. Если это так, то модели проявляют скейлинговое поведение с неуниверсальными критическими размерностями. Неуниверсальность проявляется в том, что область устойчивости содержит множество неподвижных точек, в каждую из которых может попасть фазовая траектория констант связи. Таким образом, при одних и тех же значениях глобальных параметров (например, размерности пространства), но при разных начальных данных будет наблюдаться критическое поведение с разными критическими размерностями. Этот факт хорошо согласуется с экспериментом: действительно, в случае эрозии разные ландшафты демонстрируют поведение с разными критическими индексами (см. обсуждение в работе [1]). В работе [4] при помощи метода функциональной ренормгруппы также показано, что эрозия ландшафта не обладает универсальностью.

Для неуниверсальных критических размерностей моделей (22) и (54) найдены точные соотношения. Полученные в работе [4] критические размерности удовлетворяют точному соотношению для эрозии ландшафтов.

Стоит отметить, что в настоящей работе изучаемые модели считались динамическими. Это приводило к дополнительному интегралу по времени в первом члене функционала действия, соответствующего стохастической задаче (модели). Вместо этого можно было рассматривать статические задачи, считая поля не зависящими от времени. Сложностью такого подхода является необходимость заново строить эквивалентную теорию поля. Тем не менее оба подхода приводят к одним результатам. Динамический подход, однако, предпочтителен, так как при изучении влияния на критическое поведение, например, турбулентного движения среды, статическим подходом не обойтись.

Литература

1. *Pastor-Satorras R., Rothman D. H.* Scaling of a slope: The erosion of tilted landscapes // J. Stat. Phys. 1998. Vol. 93, N 3–4. P. 477–500.

2. *Dotsenko V. S.* Critical phenomena and quenched disorder // Advances in Physical Sciences. 1995. Vol. 38, N 5. P. 457.

3. *Antonov N. V., Kakin P. I.* Scaling in erosion of landscapes: renormalization group analysis of a model with turbulent mixing // J. Phys. (A). 2017. Vol. 50. 085002.

4. *Duclut C., Delamotte B.* Nonuniversality in the erosion of tilted landscapes // Phys. Rev. (E). 2017. Vol. 96. 012149.

5. *Krug J., Spohn H.* Kinetic roughening of growing surfaces // Solids far from equilibrium / ed. by C. Godreche. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 479–582.

6. *Halpin-Healy T., Zhang Y.-C.* Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics // Phys. Rep. 1995. Vol. 254. P. 215–414.

7. *Barabási A.-L., Stanley H. E.* Fractal concepts in surface growth. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

8. *Krug J.* Origins of scale invariance in growth processes // Adv. Phys. 1997. Vol. 46. P. 139–282.

9. *Lässig M.* On growth, disorder, and field theory // J. Phys.: Cond. Matt. 1998. Vol. 10. P. 9905.

10. *Eden M.* A two-dimensional growth process // Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Cambridge University Press, 1961. Vol. 4. P. 223.

11. *Edwards S. F., Wilkinson D. R.* The surface statistics of a granular aggregate // Proc. Roy. Soc. London (A). 1982. Vol. 381. P. 17.

12. *Kim J. M., Kosterlitz J. M., Ala-Nissila T.* Surface growth and crossover behaviour in a restricted solid-on-solid model // J. Phys. (A). 1991. Vol. 24. P. 5569.

13. *Penrose M. D.* Growth and Roughness of the Interface for Ballistic Deposition // J. Stat. Phys. 2008. Vol. 131. P. 247–268.

14. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.

15. *Vasiliev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

16. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic Scaling of Growing Interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 889.

17. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. 1977. Vol. 16. P. 732.

18. *Frey E., Täuber U. C.* 2-loop renormalization-group analysis of the Burgers—Kardar—Parisi—Zhang equation // Phys. Rev. (E). 1994. Vol. 50. P. 1024–1045.

19. *Lässig M.* On the renormalization of the Kardar—Parisi—Zhang equation // Nucl. Phys. (B). 1995. Vol. 448. P. 559.

20. *Wiese K., J.* Critical discussion of the 2-loop calculations for the KPZ equation // Phys. Rev. (E). 1997. Vol. 56. P. 5013.

21. *Pavlik S. I.* Scaling for a growing phase boundary with nonlinear diffusion // J. Exp. Theor. Phys. 1994. Vol. 79. P. 303–306.

22. *Antonov N. V., Vasil'ev A. N.* The quantum-field renormalization group in the problem of a growing phase boundary // J. Exp. Theor. Phys. 1995. Vol. 81. P. 485–489.

23. *Tang C., Bak P.* Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60, N 23. P. 2347–2350.

24. *Bak P., Sneppen K.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, N 24. P. 4083–4086.

25. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59, N 4. P. 381–384.

26. *Bak P.* How Nature works: The Science of self-organised criticality. New York: Copernicus Press, 1996. 212 p.

27. *Hwa T., Kardar M.* Dissipative transport in open systems: An investigation of self-organized criticality // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62, N 16. P. 1813–1816.

28. *Antonov N. V., Kakin P. I.* Effects of random environment on a self-organized critical system: Renormalization group analysis of a continuous model // EPJ Web of Conferences. 2016. Vol. 108. 02009.

29. *Giacometti A., Maritan A., Banavar J. R.* Continuum model for river networks // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 577–580.

30. *Banavar J. R., Colaiori F., Flammini A.* Sculpting of a fractal river basin // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4522–4525.

31. *Somfai E., Sander L. M.* Scaling and river networks: A Landau theory for erosion // Phys. Rev. (E). 1997. Vol. 56 P. R5–R8.

32. *Kramer S., Marder M.* Evolution of river networks // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 205–208.

33. *Sornette D., Zhang Y.-Ch.* Non-linear Langevin model of geomorphic erosion processes // Geoph. J. Intern. 1993. Vol. 113, N 2. P. 382–386.

34. *Kardar M., Zhang Y.-C.* Scaling of Directed Polymers in Random Media // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2087.

35. *Lässig M.* Quantized scaling of growing surfaces // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 2366.

36. *Canet L., Chaté H., Delamotte B., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group for the Kardar—Parisi—Zhang equation // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. 150601.

37. *Kloss T., Canet L., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group for the stationary Kardar—Parisi—Zhang equation: scaling functions and amplitude ratios in $1 + 1$, $2 + 1$, and $3 + 1$ dimensions // Phys. Rev. (E). 2012. Vol. 86. 051124.

References

1. Pastor-Satorras R., Rothman D. H. Scaling of a slope: The erosion of tilted landscapes. *J. Stat. Phys.*, 1998, vol. 93, no 3–4, pp. 477–500.

2. Dotsenko V. S. Critical phenomena and quenched disorder. *Advances in Physical Sciences*, 1995, vol. 38, no 5, pp. 457.

3. Antonov N. V., Kakin P. I. Scaling in erosion of landscapes: renormalization group analysis of a model with turbulent mixing. *J. Phys. (A)*, 2017, vol. 50, 085002.

4. Duclut C., Delamotte B. Nonuniversality in the erosion of tilted landscapes. *Phys. Rev. (E)*, 2017, vol. 96, 012149.

5. Krug J., Spohn H. Kinetic roughening of growing surfaces. *Solids far from equilibrium.* Ed. by C. Godreche. Cambridge, Cambridge University Press, 1990, pp. 479–582.

6. Halpin-Healy T., Zhang Y.-C. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.*, 1995, vol. 254, pp. 215–414.

7. Barabási A.-L., Stanley H. E. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge, Cambridge University Press, 1995.

8. Krug J. Origins of scale invariance in growth processes. *Adv. Phys.*, 1997, vol. 46, pp. 139–282.

9. Lässig M. On growth, disorder, and field theory. *J. Phys.: Cond. Matt.*, 1998, vol. 10, pp. 9905.

10. Eden M. A two-dimensional growth process. *Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* Cambridge University Press, 1961, vol. 4, pp. 223.

11. Edwards S. F., Wilkinson D. R. The surface statistics of a granular aggregate. *Proc. Roy. Soc. London (A)*, 1982, vol. 381, pp. 17.

12. Kim J. M., Kosterlitz J. M., Ala-Nissila T. Surface growth and crossover behaviour in a restricted solid-on-solid model. *J. Phys. (A)*, 1991, vol. 24, pp. 5569.

13. Penrose M. D. Growth and Roughness of the Interface for Ballistic Deposition. *J. Stat. Phys.*, 2008, vol. 131, pp. 247–268.

14. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena.* Oxford, Clarendon, 1989.

15. Vasiliev A. N. *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics.* Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004.

16. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C. Dynamic Scaling of Growing Interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 889.

17. Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J. Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid. *Phys. Rev.*, 1977, vol. 16, pp. 732.

18. Frey E., Täuber U. C. 2-loop renormalization-group analysis of the Burgers—Kardar—Parisi—Zhang equation. *Phys. Rev. (E)*, 1994, vol. 50 P. 1024–1045.

19. Lässig M. On the renormalization of the Kardar—Parisi—Zhang equation. *Nucl. Phys. (B)*, 1995, vol. 448, pp. 559.

20. Wiese K., J. Critical discussion of the 2-loop calculations for the KPZ equation. *Phys. Rev. (E)*, 1997, vol. 56, pp. 5013.

21. Pavlik S. I. Scaling for a growing phase boundary with nonlinear diffusion. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1994, vol. 79, pp. 303–306.

22. Antonov N. V., Vasil'ev A. N. The quantum-field renormalization group in the problem of a growing phase boundary. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1995, vol. 81, pp. 485–489.

23. Tang C., Bak P. Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, vol. 60, no 23, pp. 2347–2350.

24. Bak P., Sneppen K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no 24, pp. 4083–4086.

25. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, vol. 59, no 4, pp. 381–384.

26. Bak P. *How Nature works: The Science of self-organised criticality.* New York, Copernicus Press, 1996. 212 p.

27. Hwa T., Kardar M. Dissipative transport in open systems: An investigation of self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 62, no 16, pp. 1813–1816.

28. Antonov N. V., Kakin P. I. Effects of random environment on a self-organized critical system: Renormalization group analysis of a continuous model. *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 108, 02009.

29. Giacometti A., Maritan A., Banavar J. R. Continuum model for river networks. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 75, pp. 577–580.

30. Banavar J. R., Colaiori F., Flammini A. Sculpting of a fractal river basin. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, pp. 4522–4525.

31. Somfai E., Sander L. M. Scaling and river networks: A Landau theory for erosion. *Phys. Rev. (E)*, 1997, vol. 56 P. R5–R8.

32. Kramer S., Marder M. Evolution of river networks. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 68, pp. 205–208.

33. Sornette D., Zhang Y.-Ch. Non-linear Langevin model of geomorphic erosion processes. *Geoph. J. Intern.*, 1993, vol. 113, no 2, pp. 382–386.

34. Kardar M., Zhang Y.-C. Scaling of Directed Polymers in Random Media. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, vol. 58, pp. 2087.

35. Lässig M. Quantized scaling of growing surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 80, pp. 2366.

36. Canet L., Chaté H., Delamotte B., Wschebor N. Nonperturbative renormalization group for the Kardar—Parisi—Zhang equation. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, 150601.

37. Kloss T., Canet L., Wschebor N. Nonperturbative renormalization group for the stationary Kardar—Parisi—Zhang equation: scaling functions and amplitude ratios in $1+1$, $2+1$, and $3+1$ dimensions. *Phys. Rev. (E)*, 2012, vol. 86, 051124.

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2017 г.

Контактная информация

Лебедев Никита Михайлович — аспирант; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Какинь Полина Игоревна — аспирантка; e-mail: p.kakin@spbu.ru

Lebedev Nikita Mihailovich — post-graduate student; e-mail: nikita.m.lebedev@gmail.com
Kakin Polina Igorevna — post-graduate student; e-mail: p.kakin@spbu.ru