УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2017. Т. 13. Вып. 4

А. М. Камачкин[1], *Г. М. Хитров*[1], *В. Н. Шамберов*[2]

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ*

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2] Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

Предлагается метод построения неособенных линейных преобразований нелинейных систем автоматического регулирования и управления, включая и многомерные системы. Метод позволяет в определенных случаях свести исследование динамики к изучению поведения их подсистем, допускающих строгий анализ (иными словами, проводить декомпозицию исходной системы). Матрица неособенного преобразования строится в виде произведения двух матриц, одна из которых постоянная, другая состоит из элементов, зависящих от вводимых параметров. Данная параметрическая матрица отражает неоднозначность выбора преобразования, приводящего матрицу линейной части системы к первой естественной нормальной форме или жордановой нормальной форме. Параметрическая матрица дает возможность при условии ее неособенности увеличить число декомпозиционных вариантов в пространстве параметров исходной системы. В случае первой естественной нормальной формы матрицы до 4-го порядка включительно построены параметрические матрицы. Указан метод получения таких матриц в любых случаях, когда порядок матриц больше четырех. Введение этих матриц, как параметрического сомножителя, позволяет во многих случаях приводить исходную систему уравнений к управляемой или наблюдаемой форме. В случае жордановой нормальной формы для любого порядка матриц указан общий вид параметрической матрицы и матрицы, ей обратной. Вид параметрической матрицы при этом зависит от собственных чисел матрицы линейной части исходной системы. Рассмотрены все возможные случаи, включая случай кратных комплексных собственных чисел. Перечислены все этапы преобразования исходной системы. Таким образом, задачу построения неособенного декомпозиционного преобразования в случае жордановой формы матрицы можно считать решенной. Библиогр. 29 назв.

Ключевые слова: многомерная нелинейная динамическая система, пространство состояний, пространство параметров, неособенное линейное преобразование, первая естественная нормальная форма матрицы, жорданова нормальная форма матрицы, декомпозиция системы.

Камачкин Александр Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; a.kamachkin@spbu.ru

Хитров Геннадий Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент; chitrov@gmail.ru

Шамберов Владимир Николаевич — кандидат технических наук, доцент; shamberov@mail.ru

Kamachkin Alexander Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; a.kamachkin@spbu.ru

Chitrov Gennadiy Mikhailovich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; chitrov@gmail.ru

Shamberov Vladimir Nikolaevich — PhD of technical sciences, associate professor; shamberov@mail.ru

* Представленный материал основан на докладах, сделанных на Международной конференции «Устойчивость и управление процессами (SCP–2015)», посвященной памяти В. И. Зубова (5–9 октября 2015 г., Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет), и Международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова (22–27 мая 2017 г., Международный математический институт им. Л. Эйлера. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет).

https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408

A. M. Kamachkin[1], *G. M. Chitrov*[1], *V. N. Shamberov*[2]

NORMAL MATRIX FORMS TO DECOMPOSITION AND CONTROL PROBLEMS FOR MANYDIMENTIONAL SYSTEMS

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] St. Petersburg State Marine Technical University, Lotsmanskaya ul., 3, St. Petersburg, 190121, Russian Federation

We wish to bring attention to the method of construction of nonsingular linear transformation in non-linear control systems. This method allows us to combine the system's dynamics' investigation of their subsystems' behavior with an admissible robust analysis. The nonsingular linear transformation matrix is the product of two matrices: one is constant and the other consists of the parameters dependent elements. The parameter's matrix reflects ambiguity of the choice of transformations and allows to increase a number of decomposition variants. Refs 29.

Keywords: many-dimensional nonlinear dynamical system, state space, state variables, nonsingular linear transformation, first natural normal form of the matrix, Jordan normal form of the matrix, decomposition of the system.

Введение. Впервые для нелинейных задач теории автоматического регулирования каноническое преобразование специального вида было предложено А. И. Лурье в 1949 г. [1]. В основе этого преобразования лежало разложение элементов передаточной функции линейной части системы на простые дроби [2]. В 1957 г. В. А. Троицкий расширил преобразование на случай наличия кратных корней в характеристическом уравнении преобразуемой линейной части системы [3]. Оно было обобщено в методе сечений пространства параметров, разработанном в 1967 г. Р. А. Нелепиным [4]. Известен также метод редукции пространства параметров, в котором матрица преобразования строится на основе матрицы Вандермонда [5]. Зарубежные авторы в основном шли теми же путями, что и отечественные ученые, это отражено, например, в монографии [6], где описаны различные методы нахождения матрицы канонического преобразования.

Постановка задачи. ***Каноническое преобразование.*** Воспользуемся неоднозначностью неособенных преобразований. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A} \cdot x(t) + \mathbf{B} \cdot \{N\,[y(t)] + \psi(t)\}\,, \quad x(0) = x_0, \;\; y(t) = \mathbf{C} \cdot x(t), \tag{1}$$

в которой $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — вещественные матрицы размерности соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$; $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $y(t)$ — векторы переменных размерности n, n и m (при этом $n \geqslant m$) соответственно; $\psi\,(t)$ — вектор внешнего возмущающего воздействия размерности m. Нелинейная часть системы представлена вектором нелинейных функций $N\,[y(t)]$ размерности m; $\cdot \equiv d/dt$ — символ дифференцирования по времени.

Считаем, что элементы матрицы $\mathbf{A}$ заранее определены, а элементы матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ выступают в качестве параметров настройки и могут изменяться в задаваемых пределах для придания системе требуемых свойств.

Каноническим преобразованием $x(t) = \mathbf{T} \cdot z(t)$ исходная система (1) приводится к эквивалентной системе относительно $z(t)$

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A_T} \cdot z(t) + \mathbf{B_T} \cdot \{N\,[y(t)] + \psi(t)\}\,, \;\; z(0) = x_0, \;\; y(t) = \mathbf{C_T} \cdot z(t), \tag{2}$$

в которой $\mathbf{A_T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$; $\mathbf{B_T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B}$; $\mathbf{C_T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$.

Приравниванием к нулю определенных элементов матриц $\mathbf{B_T}$ и $\mathbf{C_T}$ можно добиться расщепления преобразованной системы на подсистемы более низкой (чем n)

размерности, допускающих их полное аналитическое исследование [7–27]. Возникает задача получения преобразования, приводящего систему (1) к системе (2) с наперед заданными свойствами.

Известно, что матрица преобразования $\mathbf{T}$, с помощью которой матрица $\mathbf{A}$ приводится к первой естественной нормальной или к жордановой форме $\mathbf{A_T}$, определяется неоднозначно. Неоднозначность выбора матрицы $\mathbf{T}$ можно описать как $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$, в которой $\mathbf{S}$ — некоторая матрица такая, что $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{A_T}$, а $\mathbf{Q}$ — невырожденная матрица, описывающая неоднозначность выбора матрицы $\mathbf{T}$.

Теорема. *Пусть неособенная матрица* $\mathbf{Q}$ *обладает свойством* $\mathbf{A_T} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A_T}$, *в котором* $\mathbf{A_T}$ *— первая естественная нормальная или жорданова нормальная форма матрицы* $\mathbf{A}$, *тогда матрица преобразования будет иметь вид* $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$, *здесь* $\mathbf{S}$ *— одна из возможных постоянных матриц, приводящих матрицу* $\mathbf{A}$ *к первой естественной нормальной или к жордановой нормальной форме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{A_T}$ и матрица $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$. Тогда очевидно, что

$$\mathbf{A_T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \left(\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}\right) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A_T} \cdot \mathbf{Q},$$

откуда получаем $\mathbf{A_T} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A_T}$. Следовательно, $\mathbf{Q}$ — любая невырожденная матрица, перестановочная с матрицей $\mathbf{A_T}$.

Равенство

$$\mathbf{A_T} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A_T} \tag{3}$$

позволяет определять элементы матрицы $\mathbf{Q}$, которые можно использовать как переменные множители в элементах матриц $\mathbf{B_T}$ и $\mathbf{C_T}$.

Чаще всего [6] в качестве $\mathbf{A_T}$ используется матрица в жордановой нормальной форме, т. е. $\mathbf{A_T} = \mathbf{A_j}$, где $\mathbf{A_j}$ — матрица в жордановой форме, тогда $\mathbf{S}$ — одна из возможных постоянных матриц, приводящих $\mathbf{A}$ к виду $\mathbf{A_j}$. Матрица $\mathbf{S}$ при этом состоит из собственных и дополнительных векторов матрицы $\mathbf{A}$. В этом случае далее будем обозначать $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} = M$.

Хорошо известно, что, например, разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью с помощью замены переменных приводится к виду

$$x(k+1) = \mathbf{A_n} \cdot x(k) + \mathbf{B} \cdot F(k), \;\; y(k) = \mathbf{C} \cdot x(k), \tag{4}$$

здесь $x(k)$, $x(k+1)$ — мерный вектор, $\mathbf{A_n}$ — постоянная $(n \times n)$-матрица в форме Фробениуса, или, иначе, в первой естественной нормальной форме, $F(k)$ — дискретная входная переменная, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — $(n \times 1)$-матрица, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ — $(1 \times n)$-матрица.

Аналогично действуем для получения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Система (4) полностью наблюдаема.

Если выход одномерной системы n-го порядка с управлением v в правой части является взвешенной суммой производных текущих переменных до порядка m включительно, то после соответствующей замены переменных приходим к системам типа

$$\dot{x} = A_n \cdot x + B \cdot v, \;\; y = \langle C, x \rangle + d_0 \cdot v, \;\; d_0 \in R, \;\; n = m; \tag{5}$$

$$\dot{x} = A_n \cdot x + B \cdot v, \;\; y = \langle C, x \rangle, \;\; n > m. \tag{6}$$

Тогда системы (5), (6) всегда полностью управляемы по входу v.

Поставленная задача состоит в том, чтобы построить матрицы вида $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^{-1}$, зависящие от параметров, так, чтобы можно было воспользоваться преимуществами, которые дает приведение к системе (2) с указанными выше матрицами $\mathbf{A_T}$, т. е. $\mathbf{A_T} = \mathbf{A_j}$ и $\mathbf{A_T} = \mathbf{A_n}$. Во втором случае $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_n}$, где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q_n}$ — невырожденные матрицы, такие, что $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{A_n}$, $\mathbf{Q_n}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q_n} = \mathbf{A_n}$.

Приведение к первой естественной нормальной форме [28]. Не всякая матрица $\mathbf{A}$ приводится к первой нормальной естественной форме. Достаточные условия приводимости матрицы $\mathbf{A}$ к такой форме: если матрица $[\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, λ — числовой параметр, имеет инвариантные многочлены $f_{\mathrm{r}}(\lambda)$, $f_{\mathrm{r}+1}(\lambda), \ldots, f_{\mathrm{n}}(\lambda)$ ненулевой степени, то матрица $\mathbf{A}$ подобна квазидиагональной матрице

$$\mathbf{L} = \operatorname{diag}\left[\mathbf{L}(f_r), \;\mathbf{L}(f_{r+1}), \;..., \;\mathbf{L}(f_n)\right].$$

Каждый многочлен $f_k(\lambda)$ — многочлен степени k ($k = r, \;\; r+1, \;\; ..., \;\; n$) с коэффициентом 1 при старшей степени, $\mathbf{L}(f_k)$ — сопровождающая матрица для многочлена $f_k(\lambda)$ [29]. Сумма степеней инвариантных многочленов $f_r(\lambda)$, $f_{r+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ матрицы $[\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равна n.

Задача состоит в том, чтобы найти такую матрицу $\mathbf{T}$ канонического преобразования, при котором матрица $\mathbf{A}$ системы (1) приводится к первой естественной нормальной форме и при этом переменные величины, входящие в $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_n}$, позволяют варьировать параметры настройки системы (1) при приведении ее к канонической или какой-либо другой интегрируемой форме.

Пусть матрица $\mathbf{A}$ линейной части системы (1) такова, что существует невырожденная матрица $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_n}$ такая, что преобразование $x(t) = \mathbf{T} \cdot z(t)$ приводит матрицу $\mathbf{A}$ к виду $\mathbf{A_n} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, здесь $\mathbf{A_n}$ — первая естественная нормальная форма матрицы $\mathbf{A}$.

Матрица $\mathbf{T}$ при этом выбирается неоднозначно. Пусть $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_n}$, где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q_n}$ — невырожденные матрицы такие, что $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{A_n}$, а $\mathbf{Q_n}$ — матрица, описывающая неоднозначность выбора матрицы $\mathbf{T}$, определяется из условия $\mathbf{A_n} = \mathbf{Q_n}^{-1} \cdot \mathbf{A_n} \cdot \mathbf{Q_n}$, т. е. выполняется равенство (3).

Таким образом, в преобразованной системе (2) $\mathbf{B_T} = \mathbf{Q_n}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{B}$, $\;\mathbf{C_T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_n}$. Расщепление преобразованной системы (2) на подсистемы более низкой размерности, чем n, можно получить приравниванием к нулю выражений для определенных элементов матриц $\mathbf{B_T}$ и $\mathbf{C_T}$.

Обозначим P_n множество невырожденных матриц $\mathbf{Q_n}$, которые при преобразовании подобия оставляют матрицу $\mathbf{A_n}$ неизменной, т. е. таких, что $\mathbf{Q_n}^{-1} \cdot \mathbf{A_n} \cdot \mathbf{Q_n} = \mathbf{A_n}$. Очевидно, что такие матрицы $\mathbf{Q_n}$ образуют группу относительно операции перемножения этих матриц.

Следовательно, P_n — группа, которую можно назвать группой автоморфизмов матрицы $\mathbf{A_n}$. При этом группа P_n является подгруппой группы невырожденных матриц n-го порядка.

Установим конструкцию матриц $\mathbf{Q_n}$ и $\mathbf{Q_n}^{-1}$.

1. Рассмотрим полином $f(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. Для него сопровождающей матрицей будет матрица $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ (характеристический полином матрицы $\mathbf{A_2}$ будет равен $f(\lambda)$, т. е. $\det[\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}] = f(\lambda)$).

Найдем в явном виде группу P_2, для чего решим систему уравнений $\mathbf{A_2} \cdot \mathbf{Q_2} = \mathbf{Q_2} \cdot \mathbf{A_2}$ относительно неизвестных элементов матрицы $\mathbf{Q_2}$ — элементов $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$, т. е. решим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

В качестве решения системы (7) получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x + y & -a_2 x \\ x & y \end{bmatrix},$$

где $x,\ y$ — произвольные переменные, подчиненные требованию $a_1 \cdot x \cdot y + y^2 + a_2 \cdot x^2 \neq 0$ (требование невырожденности матрицы $\mathbf{Q_2}$, т. е. требование условия $\det \mathbf{Q_2} \neq 0$).

2. Рассмотрим сопровождающую матрицу $\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$ и ее группу автоморфизмов P_3, т. е. множество невырожденных матриц $\mathbf{Q_3}$ таких, что $\mathbf{Q_3^{-1}} \cdot \mathbf{A_3} \cdot \mathbf{Q_3} = \mathbf{A_3}$.

Положим, что матрица $\mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$.

Для отыскания матрицы $\mathbf{Q_3}$, как и выше, будем решать систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Перемножая матрицы в (8) и расписывая построчно равенство элементов матриц произведений слева и справа, получим систему девяти линейных однородных уравнений с девятью неизвестными в обычном виде. Матрица коэффициентов этой системы, где неизвестные $x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ расположены в указанном порядке, будет иметь размерность (9×9).

Решая методом Гаусса систему уравнений с этой матрицей коэффициентов, приводим данную систему к системе с более наглядной матрицей коэффициентов

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 - a_3^2 & -a_2 a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & -a_1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Если определитель подматрицы $\begin{bmatrix} -a_3 - a_3^2 & -a_2 \cdot a_3 \\ a_3 & -a_3 \end{bmatrix}$ матрицы (9) отличен от нуля, т. е. если $a_3^2(1 + a_2 + a_3) \neq 0$, то ранг матрицы (9) будет равен 8, и фундаментальная система решений системы уравнений с матрицей (9) будет состоять из одного решения. В таком случае имеем, что $z_1 = z_2 = 0$. Полагая $z_3 = x$, находим, что $x_1 = y_2 = x$, $x_2 = x_3 = y_1 = y_3 = 0$, т. е. $\mathbf{Q_3} = x \cdot \mathbf{E}$. Из требований невырожденности $\mathbf{Q_3}$ необходимо потребовать, чтобы $x \neq 0$. Таким образом, группа автоморфизмов P_3 матрицы $\mathbf{A_3}$ при условии $a_3^2(1 + a_2 + a_3) = 0$ будет состоять из матриц $\mathbf{Q_3} = x \cdot \mathbf{E}$, где $x \neq 0$.

Пусть $a_3^2(1 + a_2 + a_3) = 0$. Это возможно, когда либо $a_3 = 0$, либо $1 + a_2 + a_3 = 0$, либо последние два условия выполнены одновременно.

i). Пусть $a_3 = 0$. Подставим данное значение в матрицу (9).

Полагая $z_1 = x$, $z_2 = y$, $z_3 = z$, находим

$$x_1 = a_2x + a_1y + z,\ \ x_2 = x_3 = 0,\ \ y_1 = a_1x + y,\ \ y_2 = a_1y + z,\ \ y_3 = -a_2y.$$

В таком случае матрица $\mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} a_2x + a_1y + z & 0 & 0 \\ a_1x + y & a_1y + z & -a_2y \\ x & y & z \end{bmatrix}$.

Условие невырожденности матрицы $\mathbf{Q_3}$ будет следующим:

$$(a_2 \cdot x + a_1 \cdot y + z)(a_2 \cdot y^2 + a_1 \cdot y \cdot z + z^2) \neq 0.$$

ii). Пусть $a_3 = -1,\ 0_2 = 0$. Подставим эти значения в матрицу (9).

Предположив, что $z_1 = z_2 = x$, $z_3 = y$, получим $x_1 = a_1x + y$, $x_2 = x_3 = x$, $y_1 = a_1x + x$, $y_2 = a_1x + y$, $y_3 = x$,

$$\mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} a_1x + y & x & x \\ a_1x + x & a_1x + y & x \\ x & x & y \end{bmatrix},\ \det \mathbf{Q_3} = (2 - a_1) \cdot x^3 + (a_1^2 - a_1 - 3) \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot a_1 \cdot x \cdot y^2 + y^3.$$

Условие невырожденности матрицы $\mathbf{Q_3}$ в данном случае сводится к требованию

$$(2 - a_1) \cdot x^3 + (a_1^2 - a_1 - 3) \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot a_1 \cdot x \cdot y^2 + y^3 \neq 0.$$

3. Пусть $f(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_3 \cdot \lambda + a_4$, тогда для $\mathbf{L}(f) = \mathbf{A_4}$ из условия (3) получаем группу P_4, т. е. семейство матриц $\mathbf{Q_4}$. При $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ либо $a_1 = 0$ и $a_2 \cdot a_3 \neq 0$ группа P_4 будет трехпараметрической.

Например, при $a_1 = 0$ и $a_2 \cdot a_3 \neq 0$ находим, что

$$\mathbf{Q_4} = \begin{bmatrix} a_3 \cdot \alpha + \gamma & -a_4 \cdot \alpha & 0 & -a_4 \cdot \beta \\ a_2 \cdot \alpha + \beta & \gamma & -a_4 \cdot \alpha & -a_3 \cdot \beta \\ 0 & \beta & \gamma & -a_4 \cdot \alpha - a_2 \cdot \beta \\ \alpha & 0 & \beta & \gamma \end{bmatrix},\ \det \mathbf{Q_4} \neq 0.$$

При $a_2 = 0$ или $a_3 = 0$ группа P_4 будет четырехпараметрической. Так, при $a_2 = a_3 = 0$ получаем, что

$$\mathbf{Q_4} = \begin{bmatrix} a_1\cdot\gamma+\varsigma & -a_4\cdot\alpha & -a_4\cdot\beta & -a_4\cdot\gamma \\ a_1\cdot\beta+\gamma & a_1\cdot\gamma+\varsigma & -a_4\cdot\alpha & -a_4\cdot\beta \\ a_1\cdot\alpha+\beta & a_1\cdot\beta+\varsigma & a_1\cdot\gamma+\varsigma & -a_4\cdot\alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \varsigma \end{bmatrix}, \ \det\mathbf{Q_4}\neq 0.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=0$ $\quad\mathbf{Q_4}=\varsigma\cdot\mathbf{E}$. Остальные случаи — трехпараметрических и четырехпараметрических групп автоморфизмов P_4 — рассматриваются аналогично. Процесс построения групп автоморфизмов P_n может быть продлен при $n\geqslant 5$.

Пример 1. Для решения задачи преобразования необходимо рассмотреть системы линейных уравнений $\mathbf{B_T}=\mathbf{Q_n}^{-1}\cdot\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{C_T}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{Q}$ относительно элементов матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из описания (1). Матрицы $\mathbf{B_T}$, $\mathbf{C_T}$ — числовые, задаваемые из условий задачи преобразования, матрица $\mathbf{S}$ — известная числовая, матрица $\mathbf{Q_n}$ зависит от параметров при условии $\det\mathbf{Q_n}\neq 0$. Для решения системы относительно $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ можно фиксировать любые параметры матрицы $\mathbf{Q_n}$ так, чтобы $\det\mathbf{Q_n}\neq 0$.

Пусть

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}, \ n=3,$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}=\left[s_{11}c_{11}+s_{21}c_{12}+s_{31}c_{13} \quad s_{12}c_{11}+s_{22}c_{12}+s_{32}c_{13} \quad s_{13}c_{11}+s_{23}c_{12}+s_{33}c_{13}\right].$$

Если необходимо принять, как в (4), то приходим к системе

$$\begin{cases} s_{11}\cdot c_{11}+s_{21}\cdot c_{12}+s_{31}\cdot c_{13}=1, \\ s_{12}\cdot c_{11}+s_{22}\cdot c_{12}+s_{32}\cdot c_{13}=0, \\ s_{13}\cdot c_{11}+s_{23}\cdot c_{12}+s_{33}\cdot c_{13}=0. \end{cases} \tag{10}$$

Эти уравнения при известной матрице $\mathbf{S}$ — условия на выбор матрицы $\mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{Q_3}$ — трехпараметрическая матрица, как в п. i), $\det\mathbf{Q_3}\neq 0$, тогда $\mathbf{C_T}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{Q_n}$, и вместо системы (10) для определения элементов c_{11}, c_{12}, c_{13} получаем систему

$$\begin{cases} [s_{11}(a_2x+a_1y+z)+s_{12}(a_1x+y)+s_{13}x]\cdot c_{11}+ \\ \qquad +[s_{21}(a_2x+a_1y+z)+s_{22}(a_1x+y)+s_{23}x]\cdot c_{12}+ \\ \qquad\qquad +[s_{31}(a_2x+a_1y+z)+s_{32}(a_1x+y)+s_{33}x]\cdot c_{13}=1, \\ [s_{12}(a_1y+z)+s_{13}y]\,c_{11}+[s_{22}(a_1y+z)+s_{23}y]\,c_{12}+ \\ \qquad\qquad\qquad +[s_{22}(a_1y+z)+s_{33}y]\,c_{13}=0, \\ [s_{12}(-a_2y)+s_{13}z]\,c_{11}+[s_{22}(-a_2y)+s_{23}z]\,c_{12}+\ [s_{33}(-a_2y)+s_{33}z]\,c_{13}=0. \end{cases} \tag{11}$$

В (11) $x,\ y,\ z$ — параметры, которые выбираются с учетом условия $\det\mathbf{Q_3}\neq 0$.

Очевидно, что введение матрицы $\mathbf{Q_3}$ существенно расширяет множество выбора матрицы $\mathbf{C}$.

Приведение к жордановой нормальной форме [28].

Рассмотрим различные случаи матрицы $\mathbf{A_j}$.

1.
$$\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix},$$
здесь λ_i — различные вещественные собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$.

Тогда
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{bmatrix},$$
здесь α_i — любые вещественные числа, отличные от нуля.

В таком случае введение матрицы $\mathbf{Q}$ не влияет на процесс декомпозиции, т. е. не увеличивает число декомпозиционных вариантов, и при любой матрице $\mathbf{S}$ количество декомпозиций $d = n^2 \cdot n!$ (при $n = m$) и $d = n^2 \cdot m^2$ (при $n > m$).

Действительно, в данном случае $\mathbf{Q}$ — элементарная матрица масштабирования, т. е.
$$\mathbf{B_m} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{C_m} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}.$$

2.
$$\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot \mathbf{E_{r_1}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot \mathbf{E_{r_2}} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_\mathbf{k} \cdot \mathbf{E_{r_\mathit{k}}} \end{bmatrix}.$$

В отличие от предыдущего случая числа λ_i разбиты на k групп равных чисел, λ_j различны $(j = 1,\ 2,\ ...,\ k)$, а $\mathbf{E_{r_\mathit{j}}}$ — единичные матрицы порядка r (при этом $\sum_{i=1}^{k} r_j = n$).

Тогда
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \mathbf{Q}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 \cdot \mathbf{Q}_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_k \cdot \mathbf{Q}_k \end{bmatrix},$$
где α_j — любые вещественные числа, отличные от нуля; $\mathbf{Q_j}$ — неособые квадратные матрицы порядков r_j.

Если выбрать $\mathbf{Q_j}$ единичными, то параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ не влияют на процесс декомпозиции. Таким образом, надо положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_k = 1$, а элементы матриц $\mathbf{Q_j}$ принять за параметры, которые и будут входить в элементы матриц $\mathbf{B_m}$ и $\mathbf{C_m}$. Например, пусть
$$\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } \mathbf{E_{r_1}} \text{ — } (1 \times 1)\text{-матрица}, \mathbf{E_{r_2}} \text{ — } (2 \times 2)\text{-матрица.}$$

С матрицей $\mathbf{A_j^0} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ коммутативна любая неособенная матрица $\mathbf{Q}_0 =$

$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$, где $q_{11} \cdot q_{22} - q_{12} \cdot q_{21} \neq 0$. Теперь все q_{ij} — параметры и при этом $\mathbf{A_j^0} \cdot \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{A_j^0}$. Тогда $\mathbf{Q}$ примет вид $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{bmatrix}$, $\alpha_0 \neq 0$ — параметр, $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_0^{-1} \end{bmatrix}$. Если $\mathbf{S}$ известна, то $\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}$ и параметры q_{ij} входят в элементы матриц $\mathbf{B_m}$ и $\mathbf{C_m}$.

3.

$$\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \Lambda_k \end{bmatrix},$$

где Λ_i — блочно-диагональные матрицы порядка r_i с блоками, являющимися жордановыми клетками $\mathbf{K}_{ij}$, отвечающими одному и тому же числу λ_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ k)$, $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ (r_i — кратность числа λ_i).

Тогда

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mathbf{Q_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{Q_k} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{Q_i}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ также являются блочно-диагональными матрицами, блоки которых $\mathbf{Q_{ij}}$ имеют размерности блоков $\mathbf{K_{ij}}$.

Для полного восстановления вида блоков $\mathbf{Q_{ij}}$ рассмотрим произвольную жорданову клетку $\mathbf{K_{ij}}$ порядка q, соответствующую числу λ_i. То есть

$$\mathbf{K_{ij}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Клетку $\mathbf{K_{ij}}$ можно записать и по-другому: $\mathbf{K_{ij}} = \lambda_i \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — матрица вида

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующий блок $\mathbf{Q_{ij}}$ будет иметь вид

$$\mathbf{Q_{ij}} = \alpha_0 \cdot \mathbf{E} + \alpha_1 \cdot \mathbf{H} + \alpha_2 \cdot \mathbf{H}^2 + ... + \alpha_{q-1} \cdot \mathbf{H}^{q-1}.$$

Коммутативность блоков $\mathbf{K_{ij}}$ и $\mathbf{Q_{ij}}$ при умножении очевидна, следовательно, матрицы $\Lambda_\mathbf{i}$ и построенные указанным образом матрицы $\mathbf{Q_i}$ коммутируются между собой. А значит, коммутируются между собой и матрицы $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{Q}$.

Пусть, например, матрица $\mathbf{A_j}$ — жорданова клетка, отвечающая вещественному собственному числу, тогда матрица $\mathbf{Q}$ ищется в виде

$$\mathbf{Q} = \alpha_0 \cdot \mathbf{E} + \alpha_1 \cdot \mathbf{E} + ... + \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{H}^{n-1},$$

где $\mathbf{H}$ — матрица с единичной наддиагональю, а все остальные элементы — нули; α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ — ненулевые параметры. В этом случае при декомпозиции параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ не влияют на последнюю строку матрицы $\mathbf{B_m}$ и первый столбец матрицы $\mathbf{C_m}$.

4. Матрица $\mathbf{A}$ имеет q пар комплексно-сопряженных собственных чисел и $(n-2q)$ вещественных чисел. Тогда матрица $\mathbf{A_j}$ будет блочно-диагональной: $\mathbf{A_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{JC}} & 0 \\ 0 & \mathbf{A_{JR}} \end{bmatrix}$. Перестановочная с ней матрица $\mathbf{Q}$ также будет блочно-диагональной: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q_C} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q_R} \end{bmatrix}$. Причем матрица $\mathbf{Q_C}$ будет перестановочна с матрицей $\mathbf{A_{JC}}$, а матрица $\mathbf{Q_R}$ — с матрицей $\mathbf{A_{JR}}$. Поскольку вид матриц $\mathbf{A_{JR}}$ и соответствующий им вид матриц $\mathbf{Q_R}$ описаны в случаях 1–3, то сосредоточим внимание на матрице $\mathbf{A_{JC}}$ и перестановочной с ней матрице $\mathbf{Q_C}$.

Прежде всего обратим внимание на то, что матрица $\mathbf{A_{JC}}$ имеет четный порядок $2{\cdot}q$. Любую квадратную матрицу четного порядка можно рассматривать как блочную, составленную из матриц-блоков второго порядка. То есть «блочный» порядок такой матрицы будет равен q. Будем рассматривать в качестве блоков второго порядка матрицы вида $\begin{bmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{bmatrix}$, соответствующие комплексно-сопряженным числам $\mu \pm i{\cdot}\gamma$. Сформулированные рассуждения 1–3 для матриц $\mathbf{A_{JR}}$ можно перенести на блочные матрицы $\mathbf{A_{JC}}$, составленные из указанных выше блоков второго порядка.

Пример 2. Пусть $\mathbf{A}$ — (4×4)-матрица, $\mathbf{B}$ — (4×2)-матрица, $\mathbf{C}$ — (2×4)-матрица, $\mathbf{A}$ имеет две пары одинаковых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2,3,4} = \mu \pm i\cdot\gamma$. Тогда существует матрица $\mathbf{S}$ такая, что

$$\mathbf{A_j} = \mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mu & -\gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & \mu \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1-й способ. Ищем матрицу $\mathbf{Q}$ в виде $\mathbf{Q} = \alpha_0\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} + \alpha_1\cdot\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Здесь α_0 и α_1 — параметры, тогда $\mathbf{Q}^{-1} = \beta_0\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} + \beta_1\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, здесь значения β_0 и β_1 получаем из условия $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{E}$ — (4×4)-матрица: $\beta_0 = \alpha_0^{-1}$, $\beta_1 = -\alpha_1\cdot\alpha_0^{-2}$, в котором $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{m} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{C_m}\cdot\mathbf{Q}$, при этом α_0 и α_1 влияют на решение уравнений $\bar{c}_{m_{13}} = 0 = \alpha_1\cdot c_{m_{11}} + \alpha_0\cdot c_{m_{13}}$, $\bar{c}_{m_{14}} = 0$, $\bar{c}_{m_{23}} = 0$, $\bar{c}_{m_{24}} = 0$, где $\mathbf{C_m} = \{c_{m_{ij}}\}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\bar{\mathbf{C}}_m = \{\bar{c}_{m_{ij}}\}$. Аналогично $\bar{\mathbf{B}}_\mathbf{m} = \mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{B_m}$, параметры α_0 и α_1 входят в уравнения $\bar{b}_{m_{11}} = 0,\ \bar{b}_{m_{12}} = 0,\ \bar{b}_{m_{21}} = 0,\ \bar{b}_{m_{22}} = 0$.

2-й способ. Имеем

$$\mathbf{A}_j^0 = \begin{bmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{bmatrix}, \;\; A_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j^0 & \mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{A}_j^0 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} q & -p \\ p & q \end{bmatrix},$$

где p, q — любые вещественные числа такие, что $p^2 + q^2 \neq 0$, $\mathbf{Q}_1$ коммутативна с $\mathbf{A}_j^0$ и $\mathbf{Q}_1^{-1} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{bmatrix} q & p \\ -p & q \end{bmatrix}$.

Полагаем, что $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, и ищем в блочном виде $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$.

При этом $\mathbf{Q}$ зависит от параметров p и q: $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{Q}_1^{-1} \end{bmatrix}$, где

$$\mathbf{L} = \frac{1}{(p^2+q^2)^2} \begin{bmatrix} p^2-q^2 & -2\cdot p\cdot q \\ 2\cdot p\cdot g & p^2-q^2 \end{bmatrix}.$$

В данной матрице $\mathbf{Q}^{-1}$ в 2 раза больше элементов, зависящих от параметров, чем в матрице $\mathbf{Q}^{-1}$, найденной 1-м способом, т. е. увеличивается число декомпозиционных вариантов.

Вернемся к преобразованию, из которого следует, что кроме матрицы $\mathbf{M} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{Q}$ нужно знать матрицу $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{S}^{-1}$, причем матрицу $\mathbf{Q}^{-1}$ необходимо получить в явном виде, т. е. иметь формулу для ее вычисления. Для случая 2 было показано, что при полном описании блочно-диагональной матрицы достаточно определить представление ее блоков

$$\mathbf{Q_{ij}} = \alpha_0\cdot\mathbf{E} + \alpha_1\cdot\mathbf{H} + \alpha_2\cdot\mathbf{H}^2 + ... + \alpha_{q-1}\cdot\mathbf{H}^{q-1}.$$

Следовательно, для представления матрицы $\mathbf{Q}^{-1}$ достаточно знать $\mathbf{Q_{ij}^{-1}}$. Но $\mathbf{Q_{ij}^{-1}} = \beta_0\cdot\mathbf{E} + \beta_1\cdot\mathbf{H} + \alpha_2\cdot\mathbf{H}^2 + ... + \beta_{q-1}\cdot\mathbf{H}^{q-1}$, где β_j находятся из системы уравнений, получаемой из равенства $\mathbf{Q_{ij}}\cdot\mathbf{Q_{ij}^{-1}} = \mathbf{E}$ с учетом того, что $\mathbf{H}^q = 0$.

Заключение. В случае первой естественной нормальной формы матрицы до 4-го порядка включительно получены параметрические матрицы. Указан метод получения таких матриц в любых случаях, когда порядок матриц больше четырех. Введение этих матриц, как параметрического сомножителя, позволяет во многих случаях приводить исходную систему уравнений к управляемой или наблюдаемой форме. Задачу построения неособенного декомпозиционного преобразования в случае $\mathbf{A_j}$ можно считать решенной. Решение состоит из следующих этапов:

1) строим матрицу $\mathbf{S}$, состоящую из собственных (модальных) векторов и дополнительных векторов матрицы $\mathbf{A}$;

2) получаем матрицу $\mathbf{A_j} = \mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{S}$;

3) из условия $\mathbf{A_j}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{A_j}$ находим невырожденную матрицу $\mathbf{Q}$ так, что матрица преобразования $\mathbf{M} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{Q}$ приводит систему (1) к системе уравнений относительно $z(t)$ с матрицами соответственно $\mathbf{A_j} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}$, $\mathbf{B_m} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{C_m} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{M}$;

4) приводим матрицы $\mathbf{B_m}$, $\mathbf{C_m}$ к нужному блочному виду, варьируя элементы матрицы $\mathbf{Q}$, исключая случаи, когда $\det(\mathbf{Q}) = 0$;

5) решив систему относительно $z(t)$, возвращаемся к системе относительно $x(t)$, используя преобразование $x(t) = \mathbf{M}\cdot z(t)$.

Изложенный подход к декомпозиции систем вида (1) был с успехом применен и дополняется исследованиями ее подсистем первого и второго порядков [7–27].

Литература

1. *Лурье А. И.* Современные проблемы механики. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 216 с.

2. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 483 с.

3. *Троицкий В. А.* О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования при наличии кратных корней // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 4. С. 574–577.

4. *Нелепин Р. А., Камачкин А. М., Туркин И. И., Шамберов В. Н.* Алгоритмический синтез нелинейных систем управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 240 с.

5. *Петров В. В., Гордеев А. А.* Нелинейные сервомеханизмы. М.: Машиностроение, 1979. 471 с.

6. *Derusso P. M., Rob J. R., Close C. M., Desrochers A. A.* State Variables for Engineers. 2nd ed. New York: Wiley – Interscience, 1998. 575 p.

7. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Декомпозиция многомерных нелинейных систем со сложными структурами // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (STAB–2012): Тез. докл. XII Междунар. конференции. Москва, ИПУ РАН, 5–8 июня 2012 г. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2012. С. 162–163.

8. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Метод декомпозиции в многомерных динамических системах // Устойчивость и процессы управления: Всерос. конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В. И. Зубова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. С. 69.

9. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Существование и устойчивость периодических решений неавтономных многомерных нелинейных систем // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ–2014): сб. трудов VII Междунар. науч. конференции. Воронеж, 14–21 сентября 2014 г. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. С. 175–177.

10. *Kamachkin A. M., Shamberov V. N.* The Decomposition Method of Research into the Nonlinear Dynamical Systems' Space of Parameters // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, N 81. P. 4009–4018.

11. *Аунг П. В., Шамберов В. Н.* Вынужденные колебания в системе с сухим трением, находящейся под внешним гармоническим воздействием // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. № 4(58). С. 4–6.

12. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Существование периодических движений в неавтономных многомерных нелинейных системах // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. № 1(59). С. 16–19.

13. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Определение бифуркационной структуры пространства параметров методом декомпозиции // Системы управления и информационные технологии. М.; Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. № 4(50). С. 11–13.

14. *Камачкин А. М., Согонов С. А., Шамберов В. Н.* Вынужденные периодические решения нелинейных многосвязных систем // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. № 1(55). С. 8–12.

15. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Параметрическая декомпозиция в задачах исследования динамического поведения нелинейных систем // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ–2015): сб. трудов VIII Междунар. науч. конференции. Воронеж, 21–26 сентября 2015 г. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. С. 169–172.

16. *Потапов Д. К.* Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами // Труды ин-та математики и механики Урал. отд. РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 190–200.

17. *Евстафьева В. В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 20–27.

18. *Kamachkin A. M., Shamberov V. N.* The method of parametrical decomposition. Base subsystems and their state space // 2016 Intern. Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2016. P. 7541190. DOI: 10.1109/stab.2016.7541190

19. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. Journal of Differential Equations, 2016. N 4. P. 1–8.

20. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. Journal of Differential Equations, 2016. N 124. P. 1–9.

21. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Intern. Journal of Robust Nonlinear Control. 2017. Vol. 27, N 2. P. 204–211.

22. *Yevstafyeva V. V.* On existence conditions for a two-point oscillating periodic solution in an non-autonomous relay system with a Hurwitz matrix // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76, N 6. P. 977–988.

23. *Potapov D. K.* Continuous approximation for a 1D analog of the Gol'dshtik model for separated flows of an incompressible fluid // Numerical Anal. and Applicat. 2011. Vol. 4, N 3. P. 234–238.

24. *Potapov D. K.* Sturm—Liouville's problem with discontinuous nonlinearity // Differential Equations. 2014. Vol. 50, N 9. P. 1272–1274.

25. *Potapov D. K.* Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a "separating" set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity // Differential Equations. 2015. Vol. 51, N 7. P. 967–972.

26. *Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. Journal of Differential Equations. 2014. N 221. P. 1–6.

27. *Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N.* Special Matrix Transformations of

Essentially Nonlinear Control Systems // 2017 Intern. Conference “Constructive nonsmoth analysis and related topics” to the memory of V. F. Demyanov (CNSA–2017). IEEE. 2017. P. 138–140. DOI: 10.1109/CSNA.2017.7973966

28. *Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N.* Algebraical aspects of parametrical decomposition method // 2015 Intern. Conference “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP–2015). IEEE. 2015. P. 52–54. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342056

29. *Ланкастер П.* Теория матриц / пер. с англ. М.: Наука, 1978. 280 с. (*Lancaster P.* Theory of matrices. New York; London: Academic Press, 1969. 326 p.)

Для цитирования: *Камачкин А. М., Хитров Г. М., Шамберов В. Н.* Нормальные формы матриц в задачах декомпозиции и управления многомерных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 417–430. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408

References

1. Lur’e A. I. *Sovremennye problemy mehaniki. Nekotorye nelinejnye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovanija* [*Modern mechanics problems. Certain nonlinear tasks of the automatic control theory*]. Moscow, State Publ. techn.-theor. lit., 1951, 216 p. (In Russian)

2. Letov A. M. *Ustojchivost’ nelinejnyh reguliruemykh sistem. 2 izd.* [*Stability of nonlinear control systems*]. 2nd ed. Moscow, State Publ. phys.-math. lit., 1962, 483 p. (In Russian)

3. Troitskij V. A. O kanonicheskikh preobrazovanijakh uravnenij teorii avtomaticheskogo regulirovanija pri nalichii kratnykh kornej [About canonical transformations of equations of the automatic control theory in the presence of the multiple roots]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1957, vol. 21, iss. 4, pp. 574–577. (In Russian)

4. Nelepin R. A., Kamachkin A. M., Turkin I. I., Shamberov V. N. *Algoritmicheskij sintez nelinejnykh sistem upravleniya* [*Algorithmic synthesis of the nonlinear control systems*]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1990, 240 p. (In Russian)

5. Petrov V. V., Gordeev A. A. *Nelinejnye servomehanizmy* [*Nonlinear servomechanisms*]. Moscow, Machinostroenie Publ., 1979, 471 p. (In Russian)

6. Derusso P. M., Rob J. R., Close C. M., Desrochers A. A. *State Variables for Engineers.* 2nd ed. New York, Wiley – Interscience Press, 1998, 575 p.

7. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Dekompozitsiya mnogomernykh nelinejnykh sistem so slozhnymi strukturami [Decomposition of multy-space nonlinear systems with complicated structures]. *Book of Abstracts of XII Inter. Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control systems” (Pyatnitskiy’s conference, STAB–2012).* Moscow, IPU RAS Publ., 2012, pp. 162–163. (In Russian)

8. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Metod dekompozitsii v mnogomernykh dinamicheskikh sistemakh [Decomposition method to the manydimensional dynamical systems]. *Stability and control processes. Vseross. Konferentsiya, posvyashchennaya 80-letiyu so dnya rozhdeniya V. I. Zubova.* Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2010, p. 69. (In Russian)

9. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Sushchestvovanie i ustojchivost’ periodicheskikh reshenij neavtonomnykh mnogomernykh nelinejnykh system [Existens and stability of the periodical solutions for the nonautonomous manydimensional nonlinear systems]. *Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravlenija i komp’juternykh tehnologij (PMTUKT–2014). Sb. Trudov VII Mezhdunar. Nauch. Konferentsii* [*Modern methods of applied mathematics, theory of management and computer’s technology* (*PMTUKT–2014*)*, Coll. works of VII Intern. Scientific Conference*]. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2014, pp. 175–177. (In Russian)

10. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. The Decomposition Method of Research into the Nonlinear Dynamical Systems’ Space of Parameters. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 81, pp. 4009–4018.

11. Aung P. V., Shamberov V. N. Vynuzhdennye kolebaniya v sisteme s suhim treniem, nahodyashkhejsya pod vneshnim garmonicheskim vozdejstviem [Forced oscillations into the system with dry friction under the external harmonic action]. *Control systems and information technologies.* Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2014, no. 4(58), pp. 4–6. (In Russian)

12. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Sushchestvovanie periodicheskikh dvizhenij v neavtonomnykh mnogomernykh nelinejnykh sistemakh [Existence of the periodical motions for the nonautonomous manydimentional nonlinear systems]. *Control systems and information technologies.* Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2015, no. 1(59), pp. 16–19. (In Russian)

13. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Opredelenie bifurkatsionnoj struktury prostranstva parametrov metodom dekompozitsii [Defenition of the bifurcation structure into the parametric space by means of the decomposition method]. *Control systems and information technologies.* Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2012, no. 4(50), pp. 11–13. (In Russian)

14. Kamachkin A. M., Sogonov S. A., Shamberov V. N. Vynuzhdennye periodicheskie resheniya nelinejnykh mnogosvyaznykh system [Forced periodical solutions of the nonlinear multiply connected systems]. *Control systems and information technologies.* Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2014, no. 1(55), pp. 8–12. (In Russin)

15. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. Parametricheskaya dekompozitsiya v zadachakh issledovaniya dinamicheskogo povedeniya nelinejnykh system [Parametric decomposition for problems of research of the dynamic behavior of nonlinear systems]. *Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravlenija i komp'uternykh tehnologij (PMTUKT–2015), Sb. Trudov VIII Mezhdunar. Nauch. Konferentsii* [*Modern methods of applied mathematics, theory of management and computer's technology* (*PMTUKT–2015*)*, Coll. works of VIII Intern. Scientific Conference*]. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2015, pp. 169–172. (In Russian)

16. Potapov D. K. Upravlenie spektral'nymi zadachami dlja uravnenij s razryvnymi operatorami [Control of spectral problems for equations with discontinuous operators]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural. otd. RAS* [*Works of a Institute of mathematics and mechanics Ural. department RAS*], 2011, vol. 17, no. 1, pp. 190–200. (In Russian)

17. Yevstafyeva V. V. O neobhodimykh usloviyakh sushchestvovaniya periodicheskikh reshenij v dinamicheskoj sisteme s razryvnoj nelinejnost'yu i vneshnim periodicheskim vozdejstviem [On recessary conditions for existens of periodic solutions in a dynamic system with discontinuous nonlinearity and an external periodic influence]. *Ufa Math. Journal*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 20–27. (In Russian)

18. Kamachkin A. M., Shamberov V. N. The method of parametrical decomposition. Base subsystems and their state space. *Intern. Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference)*, IEEE, 2016, pp. 7541190. DOI: 10.1109/stab.2016.7541190

19. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity. *Electron. Journal of Differential Equations*, 2016, no. 4, pp. 1–8.

20. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side. *Electron. Journal of Differential Equations*, 2016, no. 124, pp. 1–9.

21. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence. *Intern. Journal of Robust Nonlinear Control*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 204–211.

22. Yevstafyeva V. V. On existence conditions for a two-point oscillating periodic solution in an non-autonomous relay system with a Hurwitz matrix. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 6, pp. 977–988.

23. Potapov D. K. Continuous approximation for a 1D analog of the Gol'dshtik model for separated flows of an incompressible fluid. *Numerical Anal. and Applicat.*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 234–238.

24. Potapov D. K. Sturm-Liouville's problem with discontinuous nonlinearity. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1272–1274.

25. Potapov D. K. Existence of solutions, estimates for the differential operator, and a "separating" set in a boundary value problem for a second-order differential equation with a discontinuous nonlinearity. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 967–972.

26. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side. *Electron. Journal of Differential Equations*, 2014, no. 221, pp. 1–6.

27. Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Special Matrix Transformations of Essentially Nonlinear Control Systems. *Intern. Conference "Constructive nonsmoth analysis and related topics" to the memory of V. F. Demyanov (CNSA–2017)*, IEEE, 2017, pp. 138–140. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973966

28. Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Algebraical aspects of parametrical decomposition method. *2015 Intern. Conference "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov (SCP–2015)*, IEEE, 2015, pp. 52–54. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342056

29. Lancaster P. *Theory of matrices.* New York, London, Academic Press, 1969, 326 p. (Russ. ed.: Lancaster P. *Teoriya matrits.* Moscow, Nauka Publ., 1978, 280 p.)

For citation: Kamachkin A. M., Chitrov G. M., Shamberov V. N. Normal matrix forms to decomposition and control problems for manydimensional systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 417–430. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.408

Статья поступила в редакцию 16 августа 2017 г.

Статья принята к печати 12 октября 2017 г.