

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.19

MSC 70F15

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ
В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ****В. В. Пашкевич*

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65 (корп. 1)

В данной работе изучается вращательное движение Луны в релятивистском приближении, в котором учитывались наиболее существенные из релятивистских возмущений во вращательном движении Луны — геодезические возмущения. Численными и аналитическими методами исследуются невязки сравнения между численными и полуаналитическими решениями задачи о вращательном движении Луны относительно неподвижной эклиптики эпохи J2000. В результате впервые в релятивистском приближении получаются высокоточные ряды вращения Луны MRS2016. Остаточные невязки сравнения численного интегрирования с рядами MRS2016 в возмущающих членах физической либрации Луны не превосходят 64 миллисекунд дуги на интервале времени 2000 лет и 8 секунд дуги на интервале времени 6000 лет. Библиогр. 21 назв. Ил. 4. Табл. 1.

Ключевые слова: вращение Луны, эфемерида, численные и полуаналитические решения, релятивистское приближение.

Введение. С давних времен человечество интересовалось исследованиями Луны. Особенно с появлением оптических инструментов исследования Луны приобрели систематический характер. С помощью своего телескопа Галилео Галилей в 1637 году [1] открыл явление оптической либрации Луны. Центр масс Луны движется по геоцентрической орбите неравномерно, таким образом, полушарие Луны, обращенное к Земле, совершает видимые периодические колебания, которые позволяют наблюдателю на Земле периодически обзирать дополнительные области Луны с восточной и западной сторон с углом раствора $\sim \pm 7.9^\circ$. Ян Гевелий в 1647 году в своей книге [2] детально описал это явление, получившее название *оптической либрации Луны в долготе*. В 1693 году Жан Доминик Кассини установил три эмпирических закона движения Луны [3]:

а) Луна вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью; период вращения Луны равен среднему сидерическому периоду ее орбитального движения вокруг Земли;

*Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках сотрудничества между Польской и Российской академиями наук (тема № 34) и персонального гранта Александра Бжезиньского (№ DEC-2012/05/B/ST10/02132).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

б) угол наклона лунного экватора к эклиптике является постоянным ($I \sim 1^\circ 32'$);
в) восходящий узел лунной орбиты на эклиптике совпадает с нисходящим узлом лунного экватора на эклиптике.

Из этих законов следует, что плоскости лунного экватора, лунной орбиты и эклиптики пересекаются между собой по одной линии узлов лунной орбиты. Из-за наклона плоскости экватора Луны к плоскости ее орбиты на угол $I \sim 6^\circ 41'$ наблюдателю на Земле удастся периодически обозревать дополнительные области Луны с северной и южной сторон с углом раствора $\sim \pm 6.85^\circ$. Это явление получило название *оптической либрации Луны в широте*. Таким образом, тремя законами Жан Доминик Кассини полностью обосновал явление оптической либрации Луны.

Из-за неравномерного вращения Луны, вызванного гравитационными воздействиями возмущающих тел (Земли, Солнца и планет), законы Кассини не являются точными. Явление, связанное с отклонением от этих законов, называется *физической либрацией Луны*.

Вторую половину двадцатого столетия можно охарактеризовать началом космической эры, стремительным развитием высокоточных технологий и вычислительной техники, появлением новых высокоточных наблюдений, таких как лазерная локация Луны, запусков космических аппаратов к Луне. Эти обстоятельства способствовали необходимости и появлению множества новых более точных теорий вращательного движения Луны. Среди них отметим полуаналитическое решение основной задачи МР500 вращения Луны [4] для коэффициентов до 3-й степени возмущающей функции (C_{j0} для $j = 2, 3$ и C_{22}, C_{3k}, S_{3k} для $k = 1, 2, 3$), дополнительное решение [5] для коэффициентов 4-й степени возмущающей функции (C_{40}, C_{4k}, S_{4k} для $k = 1, \dots, 4$), решение, учитывающее влияние эффектов планетных возмущений [6], исследование влияния эффектов сжатия Земли на вращение Луны [7].

Исследование вращательного движения Луны аналитическими методами в релятивистском приближении впервые было проведено Брумбергом. В 1972 году [8] им была получена величина геодезической прецессии в угле долготы узла Луны $1''.91$ в столетие.

В наших предыдущих исследованиях [9, 10] были вычислены в ньютоновом приближении долгосрочные высокоточные полуаналитические решения задачи о вращательном движении Луны MRS2011B и MRS2014 соответственно.

В данной работе аналитическими и впервые численными методами проводилось изучение вращательного движения Луны в релятивистском приближении, в котором учитывались наиболее существенные из релятивистских возмущений во вращательном движении Луны — геодезические возмущения (систематические — геодезическая прецессия и периодические — геодезическая нутация) в возмущающих членах физической либрации Луны.

Как было показано в нашей работе [11], геодезические возмущения для Луны являются существенными и должны учитываться при построении долгосрочных высокоточных теорий ее вращательного движения. В частности, при обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

Основными целями данного исследования, являются:

а) исследование численными и аналитическими методами невязок сравнения между численными и полуаналитическими решениями задачи о вращательном движении Луны относительно неподвижной эклиптики эпохи J2000;

б) вычисление в релятивистском приближении высокоточных рядов вращения Луны MRS2016A и MRS2016B динамически согласованных с эфемеридой JPL DE422/LE422 [12] на интервалах времени 2000 лет и 6000 лет соответственно.

Для достижения поставленных целей данного исследования необходимо модифицировать математическую модель задачи, которая была описана в наших предыдущих исследованиях [9, 10].

Математическая модель задачи. Численное решение задачи получается из решения дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода для вращения абсолютно твердого небесного тела относительно неподвижной эклиптики и равноденствия эпохи J2000 [13]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее точка над буквами обозначает дифференцирование по времени; L — функция Лагранжа; в качестве обобщенных координат q_i принимаются параметры Родрига—Гамильтона λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), которые описывают вращение небесного тела вокруг собственного центра масс и связаны с углами Эйлера ψ, θ и ϕ следующими соотношениями [14]:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \phi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \phi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \phi}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Выражения, связывающие возмущающие члены физической либрации Луны с углами Эйлера [15], определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \phi + \psi - 180^\circ - L_C \\ \varrho &= \theta - I \\ \sigma &= \psi - \Omega \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Здесь ψ — угол долготы нисходящего узла эпохи J2000 лунного экватора; θ — угол наклона лунного экватора к неподвижной эклиптике J2000; ϕ — угол собственного вращения Луны между нисходящим узлом эпохи J2000 и главной осью минимального момента инерции Луны; I — постоянный угол наклона лунного экватора к неподвижной эклиптике J2000 ($I \sim 1^\circ 32'$); L_C — средняя долгота Луны; Ω — средняя долгота восходящего узла ее орбиты; τ , ϱ и σ — возмущающие члены физической либрации для неподвижной эклиптики эпохи J2000 в долготе, в наклоне и в долготе узла соответственно.

Параметры Родрига—Гамильтона — ограниченные переменные, определяющие ориентацию главных осей инерции относительно неподвижной эклиптики и точки весеннего равноденствия Луны эпохи J2000.0. Дифференциальные уравнения вращательного движения небесного тела в углах Эйлера содержат аналитическую особенность вида $\sin^{-1} \theta$, ограничивающую выбор координатной системы. Использование параметров Родрига—Гамильтона в качестве переменных задачи позволяет устранить эту особенность.

В результате подстановки (3) в (2), были получены четыре ньютоновых параметра Родрига—Гамильтона, связанные с возмущающими членами физической либрации Луны τ , ϱ и σ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\cos \frac{\varrho + I}{2} \sin \frac{\tau + L_C}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\varrho + I}{2} \sin \left(\frac{\tau + L_C}{2} - \sigma - \Omega \right), \\ \lambda_2 &= -\sin \frac{\varrho + I}{2} \cos \left(\frac{\tau + L_C}{2} - \sigma - \Omega \right), & \lambda_3 &= \cos \frac{\varrho + I}{2} \cos \frac{\tau + L_C}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция Лагранжа в (1) имеет вид [13]

$$L = T + U, \quad (5)$$

где T — кинетическая энергия вращательного движения Луны; U — силовая функция гравитационного взаимодействия небесного тела с возмущающими телами (Землей, Солнцем и большими планетами). Силовая функция U разлагается по сферическим гармоникам и учитывает только члены с коэффициентами C_{j0} при $j = 2, \dots, 4$, C_{22}, C_{3k}, S_{3k} при $k = 1, 2, 3$ и C_{4k}, S_{4k} при $k = 1, \dots, 4$. Орбитальное движение возмущающих тел определяется эфемеридой DE422/LE422. В наших предыдущих исследованиях [9, 10] кинетическая энергия вращательного движения Луны в ньютоновом приближении определялась следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2). \quad (6)$$

Здесь $\vec{H} = A\omega_1 \vec{i}_1 + B\omega_2 \vec{i}_2 + C\omega_3 \vec{i}_3$ — вектор углового момента Луны, называемый так же вектором кинетического момента вращательного движения Луны; A, B и C — главные моменты инерции Луны ($A < B < C$); $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ — единичные векторы — орты, направленные вдоль осей главных моментов инерции Луны; ω_1, ω_2 и ω_3 — проекции ньютонового вектора угловой скорости вращения Луны $\vec{\omega}$ на оси ее главных моментов инерции.

Функцию Лагранжа в релятивистском приближении можно записать следующим образом [16]:

$$L = T + U + \Delta L, \quad (7)$$

где ΔL — дополнительная релятивистская часть функции Лагранжа.

Релятивистские возмущения, порождаемые вращением тела вокруг собственного центра масс, обычно называют геодезическими. Вывод дополнительной части функции Лагранжа, порождающей геодезические возмущения, производился в соответствии с методикой, изложенной в [17]. В результате была выведена дополнительная часть функции Лагранжа, порождающая геодезические возмущения во вращательном движении исследуемого тела [16]:

$$\begin{aligned} \Delta L &= -\frac{1}{c^2} \sum_{j \neq C} \frac{Gm_j}{|\vec{R}_C - \vec{R}_j|^3} \left\{ \vec{H} \cdot \left[(\vec{R}_C - \vec{R}_j) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{R}}_C - 2\dot{\vec{R}}_j \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \{ (C - B)\omega_1 [(Z_C - Z_j)(\dot{Y}_C - \dot{Y}_j) + (Y_C - Y_j)(\dot{Z}_C - \dot{Z}_j)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A - C)\omega_2[(X_C - X_j)(\dot{Z}_C - \dot{Z}_j) + (Z_C - Z_j)(\dot{X}_C - \dot{X}_j)] + \\
& + (B - A)\omega_3[(Y_C - Y_j)(\dot{X}_C - \dot{X}_j) + (X_C - X_j)(\dot{Y}_C - \dot{Y}_j)] - \\
& - \frac{(\vec{R}_C - \vec{R}_j) \cdot \dot{\vec{R}}_j}{|\vec{R}_C - \vec{R}_j|^2} [(C - B)\omega_1(Z_C - Z_j)(Y_C - Y_j) + \\
& + (A - C)\omega_2(X_C - X_j)(Z_C - Z_j) + (B - A)\omega_3(X_C - X_j)(Y_C - Y_j)] \}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь c — скорость света в вакууме; G — гравитационная постоянная; m_j — масса j -го возмущающего тела; $\vec{R}_C, \dot{\vec{R}}_C, \vec{R}_j, \dot{\vec{R}}_j$ — барицентрические векторы положений и скоростей Луны и j -го возмущающего тела соответственно; $X_q, Y_q, Z_q, \dot{X}_q, \dot{Y}_q, \dot{Z}_q$ ($q = C, j$) — компоненты этих векторов. Символ \times обозначает векторное произведение; индекс C относится к обозначению Луны; индекс j относится к обозначению Земли, Солнца и больших планет. Члены в первой строке выражения (8) являются преобладающими, так как остальные члены содержат множителями малые величины — разности моментов инерции. Преобладающие члены выражения (8) можно представить в виде скалярного произведения вектора кинетического момента вращательного движения Луны и вектора ее угловой скорости геодезического вращения $\vec{H} \cdot \vec{\sigma}$. Вектор угловой скорости геодезического вращения Луны, который является наиболее существенным релятивистским компонентом вращательного движения Луны вокруг собственного центра масс, определяется следующим образом [18]:

$$\vec{\sigma} = -\frac{1}{c^2} \sum_{j \neq C} \frac{Gm_j}{|\vec{R}_C - \vec{R}_j|^3} \left\{ (\vec{R}_C - \vec{R}_j) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{R}}_C - 2\dot{\vec{R}}_j \right) \right\}. \quad (9)$$

Следует заметить, что в предыдущей статье автора [11] в выражении вектора угловой скорости геодезического вращения для любых тел солнечной системы (1) была допущена опечатка со знаком, поэтому оно отличается знаком от выражения (9) данной статьи.

В результате элементарных преобразований, объединяя выражения (6) для кинетической энергии вращательного движения с членами $\vec{H} \cdot \vec{\sigma}$, содержащимися в первой строке (8), и пренебрегая малыми членами, зависящими от скорости света со степенями меньше c^{-2} , получаем выражение для кинетической энергии вращательного движения Луны для релятивистского приближения данного исследования:

$$T = \frac{1}{2} \vec{H}_* \cdot \vec{\omega}_* = \frac{1}{2} (A\omega_{*1}^2 + B\omega_{*2}^2 + C\omega_{*3}^2), \quad (10)$$

где $\vec{\omega}_* = \vec{\omega} + \vec{\sigma}$ — релятивистский вектор угловой скорости вращения Луны, включающий геодезическое вращение; $\vec{H}_* = A\omega_{*1}\vec{i}_1 + B\omega_{*2}\vec{i}_2 + C\omega_{*3}\vec{i}_3$ — релятивистский вектор кинетического момента вращательного движения Луны; ω_{*1}, ω_{*2} и ω_{*3} — проекции релятивистского вектора угловой скорости вращения Луны $\vec{\omega}_*$ на оси ее главных моментов инерции.

Связь между компонентами релятивистского вектора угловой скорости вращения Луны и ньютоновыми параметрами Родрига—Гамильтона осуществляется следу-

ющим матрично-векторным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{*1} \\ \omega_{*2} \\ \omega_{*3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 + \sigma_1 \\ \omega_2 + \sigma_2 \\ \omega_3 + \sigma_3 \end{pmatrix} = 2K \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} + KK \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$K = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$KK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 0 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ 0 & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — проекции вектора $\vec{\sigma}$ на главные оси инерции Луны; $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ — проекции вектора $\vec{\sigma}$ на оси неврашающейся неподвижной эклиптикальной координатной системы Луны эпохи J2000.0. Первое слагаемое в (11) представляет матричный вид проекций ньютонового вектора угловой скорости [14] на оси главных моментов инерции. Матрица KK , выраженная через ньютоновы параметры Родрига—Гамильтона [14], является матрицей преобразования от неподвижной эклиптикальной системы координат эпохи J2000 к луноцентрической координатной системе [16].

Для того чтобы получить в параметрах Родрига—Гамильтона дифференциальные уравнения вращательного движения Луны в релятивистском приближении, необходимо в качестве обобщенных координат q_i в (1) принять релятивистские параметры Родрига—Гамильтона:

$$\begin{aligned} \lambda_{*0} &= -\cos \frac{\varrho_* + I}{2} \sin \frac{\tau_* + LC}{2}, & \lambda_{*1} &= \sin \frac{\varrho_* + I}{2} \sin \left(\frac{\tau_* + LC}{2} - \sigma_* - \Omega \right), \\ \lambda_{*2} &= -\sin \frac{\varrho_* + I}{2} \cos \left(\frac{\tau_* + LC}{2} - \sigma_* - \Omega \right), & \lambda_{*3} &= \cos \frac{\varrho_* + I}{2} \cos \frac{\tau_* + LC}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

которые связаны с возмущающими релятивистскими членами физической либрации Луны τ_* , ϱ_* и σ_* : $\tau_* = \tau - \Delta\tau$, $\varrho_* = \varrho - \Delta\varrho$, $\sigma_* = \sigma - \Delta\sigma$, где τ , ϱ и σ — возмущающие члены физической либрации Луны в ньютоновом приближении, $\Delta\tau$, $\Delta\varrho$ и $\Delta\sigma$ — релятивистские члены геодезического вращения Луны.

Таким образом, выражение (11) для компонентов релятивистского вектора угловой скорости вращения Луны в релятивистских параметрах Родрига—Гамильтона осуществляется следующим матрично-векторным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{*1} \\ \omega_{*2} \\ \omega_{*3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 + \sigma_1 \\ \omega_2 + \sigma_2 \\ \omega_3 + \sigma_3 \end{pmatrix} = 2K_* \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_{*0} \\ \dot{\lambda}_{*1} \\ \dot{\lambda}_{*2} \\ \dot{\lambda}_{*3} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$K_* = \begin{pmatrix} -\lambda_{*0} & -\lambda_{*1} & -\lambda_{*2} & -\lambda_{*3} \\ -\lambda_{*1} & \lambda_{*0} & \lambda_{*3} & -\lambda_{*2} \\ -\lambda_{*2} & -\lambda_{*3} & \lambda_{*0} & \lambda_{*1} \\ -\lambda_{*3} & \lambda_{*2} & -\lambda_{*1} & \lambda_{*0} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В результате дифференцирования выражения (15) были получены дифференциальные уравнения, определяющие вращение Луны в релятивистском приближении:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\lambda}_{*0} \\ \ddot{\lambda}_{*1} \\ \ddot{\lambda}_{*2} \\ \ddot{\lambda}_{*3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} K_*^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \omega_*^2 \\ \dot{\omega}_{*1} \\ \dot{\omega}_{*2} \\ \dot{\omega}_{*3} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$K_*^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_{*0} & -\lambda_{*1} & -\lambda_{*2} & -\lambda_{*3} \\ -\lambda_{*1} & \lambda_{*0} & -\lambda_{*3} & \lambda_{*2} \\ -\lambda_{*2} & \lambda_{*3} & \lambda_{*0} & -\lambda_{*1} \\ -\lambda_{*3} & -\lambda_{*2} & \lambda_{*1} & \lambda_{*0} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь $\omega_*^2 = (\vec{\omega} + \vec{\sigma})^2$.

Выражения для первых производных компонент угловой скорости вращения Луны определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{*1} &= -\alpha \omega_{*2} \omega_{*3} + \frac{1}{A} \sum_{j \neq C} \left(z_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial y_{*j}} - y_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial z_{*j}} \right), \\ \dot{\omega}_{*2} &= \beta \omega_{*1} \omega_{*3} + \frac{1}{B} \sum_{j \neq C} \left(x_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial z_{*j}} - z_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial x_{*j}} \right), \\ \dot{\omega}_{*3} &= -\gamma \omega_{*1} \omega_{*2} + \frac{1}{C} \sum_{j \neq C} \left(y_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial x_{*j}} - x_{*j} \frac{\partial U_j}{\partial y_{*j}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\alpha = (C - B)/A$, $\beta = (C - A)/B$, $\gamma = (B - A)/C$; A, B, C — главные моменты инерции Луны; x_{*j}, y_{*j}, z_{*j} — проекции релятивистского луноцентрического вектора j -го возмущающего тела \vec{r}_{*j} на главные оси инерции Луны.

Как уже отмечалось ранее, орбитальное движение возмущающих тел определяется эфемеридой DE422/LE422. Преобразование геоцентрического вектора j -го возмущающего тела $\vec{r}_j^{422}(x_j^{422}, y_j^{422}, z_j^{422})$ (система координат эфемериды DE422/LE422) к релятивистскому луноцентрическому вектору j -го возмущающего тела $\vec{r}_{*j}(x_{*j}, y_{*j}, z_{*j})$ осуществляется в два этапа.

Первый этап. Редукция компонент вектора j -го возмущающего тела от геоцентрической системы координат эфемериды DE422/LE422 к луноцентрической координатной системе, когда задача решается в ньютоновом приближении, осуществляется с помощью следующих матричных преобразований:

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = Mp(\varepsilon_0)r(\Delta) \begin{pmatrix} x_j^{422} \\ y_j^{422} \\ z_j^{422} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\Delta = -0''.05295$; $\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.40928$; $x_j^{422}, y_j^{422}, z_j^{422}$ — компоненты геоцентрического вектора j -го возмущающего тела, вычисляемые из эфемериды DE422/LE422; x_j, y_j, z_j — компоненты луноцентрического вектора j -го возмущающего тела в ньютоновом приближении. Матрицы поворота на угол a определяются формулами [19]

$$r(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad M = [KK]_{11}. \quad (21)$$

Алгебраическое дополнение элемента kk_{11} матрицы KK определяется следующим образом:

$$[KK]_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Первые две матрицы в преобразованиях (20) производят перевод от геоцентрической системы координат эфемериды DE422/LE422 на неподвижную эклиптикальную систему координат эпохи J2000 [20]:

— первая матрица осуществляет поворот на угол $\Delta = -0''.05294$ вдоль неподвижного экватора Земли эпохи J2000 от точки весеннего равноденствия в геоцентрической системе координат эфемериды DE422/LE422 к точке весеннего равноденствия Земли эпохи J2000;

— вторая матрица осуществляет поворот вокруг новой оси абсцисс на угол $\varepsilon_0 = 84381''.40928$ от неподвижного экватора Земли эпохи J2000 к неподвижной эклиптике эпохи J2000.

Третья матрица производит перевод от неподвижной эклиптикальной системы координат эпохи J2000 к луноцентрической координатной системе [16].

Второй этап. Преобразование ньютонового луноцентрического вектора j -го возмущающего тела $\vec{r}_j(x_j, y_j, z_j)$ к релятивистскому луноцентрическому вектору j -го возмущающего тела $\vec{r}_{*j}(x_{*j}, y_{*j}, z_{*j})$ производится в результате геодезического вращения:

$$\vec{r}_{*j} = \vec{r}_j - \int_{t_{1969}}^t \vec{\sigma} \times \vec{r}_j dt, \quad (23)$$

где $t_{1969} = \text{JD}2440400.5$ (1969, 28 июня, 0 часов ЕТ) является начальной эпохой рядов вращения Луны. Поскольку данное преобразование является преобразованием вращения, следовательно $|\vec{r}_{*j}| = |\vec{r}_j|$. Преобразование (23) получается в результате интегрирования соотношения между временным изменением вектора \vec{r}_j относительно двух координатных систем, одна из которых вращается относительно другой с угловой скоростью $\vec{\sigma}$ на интервале времени $[t_{1969}, t]$:

$$\frac{d\vec{r}_{*j}}{dt} = \frac{d\vec{r}_j}{dt} - \vec{\sigma} \times \vec{r}_j. \quad (24)$$

В данном исследовании использовался итерационный алгоритм, который подробно описан в нашем предыдущем исследовании [10]. Численное интегрирование выполнялось с постоянным шагом, равным 8 суткам, от начальной эпохи 28 июня 1969 года (JD=2440400.5).

Начальные значения численного интегрирования для первой итерации алгоритма вычисляются из составленной полуаналитической теории вращения Луны MRS2016₀, которая включает полуаналитическое решение вращения Луны в ньютоновом приближении (MRS2011B [9] для исследования на 2000-летнем интервале времени или MRS2014 [10] для исследования на 6000-летнем интервале времени) и наиболее существенных членов геодезического вращения Луны (табл. 1) [11]:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{MRS2016_0} &= \tau_{MRS2011B \text{ or } MRS2014} - \Delta\tau \\ \varrho_{MRS2016_0} &= \varrho_{MRS2011B \text{ or } MRS2014} - \Delta\varrho \\ I\sigma_{MRS2016_0} &= I\sigma_{MRS2011B \text{ or } MRS2014} - \Delta(I\sigma) \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Таблица 1. Наиболее существенные члены геодезического вращения Луны

	Систематические члены	Периодические члены
$\Delta\tau$ (μs)	$19494124.5437T$ $+12.3515T^2$ $-565.0947T^3$	$(-34.279 - 7.559T + \dots) \sin \lambda_3 +$ $(-149.201 + 5.683T + \dots) \cos \lambda_3 +$ $(30.212 - 0.001T + \dots) \sin D +$ $(0.001 + 0.001T + \dots) \cos D + \dots$
$\Delta\rho$ (μs)	$300.5067T$ $+1780.4437T^2$ $+3126.0421T^3$	$(-9 \cdot 10^{-4} - 0.008T + \dots) \sin \lambda_3 +$ $(-3 \cdot 10^{-4} - 0.025T + \dots) \cos \lambda_3 +$ $(-0.004 + 0.010T + \dots) \sin D +$ $(0.005 + 0.007T + \dots) \cos D + \dots$
$\Delta(I\sigma)$ (μs)	$-6544.4452T$ $+36212.8892T^2$ $-27286.6251T^3$	$(0.013 - 0.111T + \dots) \sin \lambda_3 +$ $(0.052 - 0.496T + \dots) \cos \lambda_3 +$ $(-0.016 + 0.093T + \dots) \sin D +$ $(-0.006 + 0.004T + \dots) \cos D + \dots$

В табл. 1: $\Delta\tau = \tau - \tau_*$, $\Delta\rho = \rho - \rho_*$, $\Delta(I\sigma) = I(\sigma - \sigma_*)$; $\tau, \rho, \sigma, \tau_*, \rho_*, \sigma_*$ — возмущающие члены физической либрации в ньютоновом и релятивистском (геодезическом) приближениях; $D = \lambda_{10} - \lambda_3 + 180^\circ$; λ_3 — средняя долгота Земли; λ_{10} — средняя геоцентрическая долгота Луны; T — динамическое барицентрическое время (Dynamical Barycentric Time) (TDB) измеряется в юлианских тысячелетиях (tjy) (365250 дней) от эпохи J2000. Средние долготы Земли и Луны взяты из работы [21].

Производилось сравнение численного и полуаналитического решений данной задачи. В результате численной интерполяции, применяемой в используемых методах численного интегрирования, в возмущающих членах физической либрации Луны были получены невязки сравнения с шагом, равным 1 суткам.

Результаты. Исследование вращательного вращения Луны проводилось с использованием эфемериды DE422/LE422 на интервалах времени 2000 и 6000 лет. Невязки сравнения в возмущающих членах физической либрации Луны между численным и полуаналитическим решениями задачи о вращении Луны исследовались с помощью итеративного алгоритма [10].

А. Исследование вращательного движения Луны на 2000-летнем интервале времени. На рис. 1 в возмущающих членах физической либрации Луны изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическими MRS2011B решениями предыдущего исследования [9] в ньютоновом приближении.

Данное исследование вращательного движения Луны производилось в релятивистском приближении. Условие сходимости итеративного алгоритма было достигнуто после 1-й итерации для ряда MRS2016A₁. Таким образом, на данной итерации процесс выполнения итерационного алгоритма был завершен. В результате

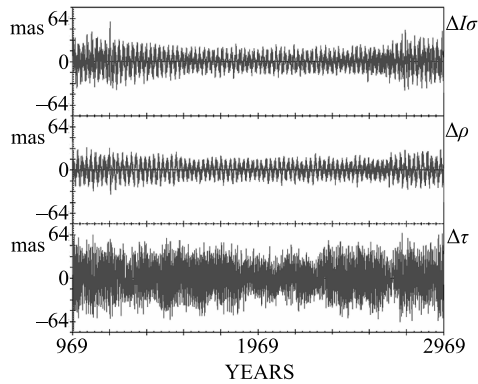


Рис. 1. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим MRS2011B решениями задачи о вращении Луны в ньютоновом приближении [9].

данного исследования были получены новые высокоточные ряды вращения Луны MRS2016A, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422, на интервале времени 2000 лет.

Поведение невязок сравнения между новыми численным и полуаналитическим MRS2016A решениями вращения Луны в релятивистском приближении изображено на рис. 2.

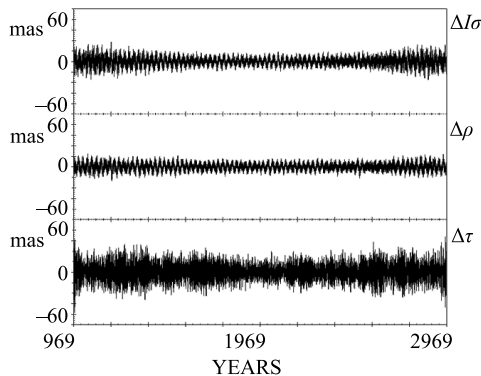


Рис. 2. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим MRS2016A решениями задачи о вращении Луны в релятивистском приближении.

Остаточные невязки сравнения, представленные на рис. 2, меньше невязок предыдущего исследования (рис. 1), и не превосходят на интервале времени 2000 лет: 64 миллисекунд дуги для $\Delta\tau$, 40 миллисекунд дуги для $\Delta(I\sigma)$, 20 миллисекунд дуги для $\Delta\rho$.

Б. Исследование вращательного движения Луны на 6000-летнем интервале времени. На рис. 3 в возмущающих членах физической либрации Луны изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическими MRS2014 решениями предыдущего исследования [10] в ньютоновом приближении.

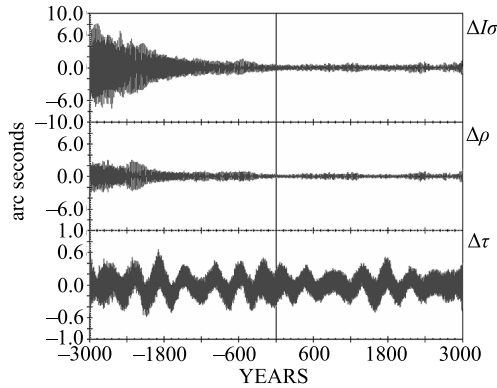


Рис. 3. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим MRS2014 решениями задачи о вращении Луны в ньютоновом приближении [10].

В данном исследовании вращательного движения Луны в релятивистском приближении выполнение итерационного алгоритма было завершено по достижению условия сходимости после 1-й итерации для ряда MRS2016B₁. В результате были получены новые высокоточные ряды вращения Луны MRS2016B, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422, на интервале времени 6000 лет.

Поведение невязок сравнения между новыми численным и полуаналитическим MRS2016B решениями вращения Луны в релятивистском приближении изображено на рис. 4.

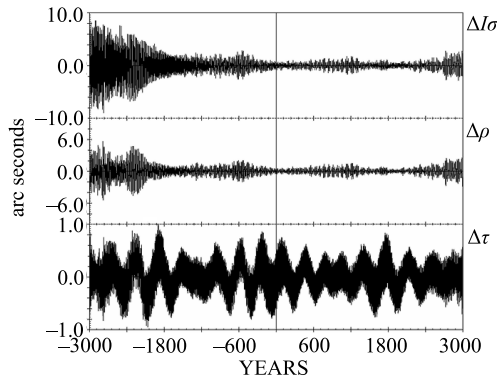


Рис. 4. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим MRS2016B решениями задачи о вращении Луны в релятивистском приближении.

Остаточные невязки сравнения, представленные на рис. 3 и 4, похожи друг на друга и не превосходят на интервале времени 6000 лет: 1 секунды дуги для $\Delta\tau$, 8 секунд дуги для $\Delta(I\sigma)$, 4 секунд дуги для $\Delta\rho$.

Заключение. В данном исследовании впервые в релятивистском приближении были получены новые высокоточные ряды вращения Луны MRS2016A и MRS2016B, динамически согласованные с эфемеридой JPL DE422/LE422 на интервалах време-

ни 2000 и 6000 лет соответственно. MRS2016 включают 1520 периодических членов. Остаточные невязки сравнения численного интегрирования с рядами MRS2016 в возмущающих членах физической либрации Луны не превосходят 64 миллисекунд дуги на интервале времени 2000 лет и 8 секунд дуги на интервале времени 6000 лет.

Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при обработке результатов лазерной локации Луны.

Благодарность. Исследования проводились в Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук (РАН) и в Центре космических исследований Польской академии наук (ПАН).

Автор выражает благодарность рецензентам за полезные советы и рекомендации.

Литература

1. *Arago F.* Biographies of Distinguished Scientific Men. Boston: Ticknor and Fields, 1859; Moscow, Izhevsk: RKhD Publ., 2000. Vol. 1.
2. *Hevelii J.* Selenographia, sive Lunae descriptio. Gedani edita. 1647.
3. *Cassini J. D.* Traité de l'origine et du progrès de l'Astronomie. Paris. 1693.
4. *Moons M.* Physical Libration of the Moon // *Celestial Mechanics*. 1982. Vol. 26, issue 2. P. 131–142. <https://doi.org/10.1007/BF01230875>
5. *Eckhardt D. H.* Theory of Libration of the Moon // *The Moon and the planets*. 1981. Vol. 25, issue 1. P. 3–49. <https://doi.org/10.1007/BF00911807>
6. *Moons M.* Planetary Perturbations on the Libration of the Moon // *Celestial Mechanics*. 1984. Vol. 34, issue 1–4. P. 263–273. <https://doi.org/10.1007/BF01235808>
7. *Pesek I.* An Effect of the Earth's Flattening on the Rotation of the Moon // *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1982. Vol. 33, N 3. P. 176–179.
8. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972. 384 с.
9. *Pashkevich V. V., Eroshkin G. I.* Construction of the new high-precision Moon rotation series at a long time intervals // *Artificial Satellites*. 2011. Vol. 46, N 2. P. 63–73. <https://doi.org/10.2478/v10018-011-0013-3>
10. *Пашкевич В. В.* RERS2014 и MRS2014: новые высокоточные решения для вращения Земли и Луны на больших интервалах времени // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2015. Т. 2(60), вып. 2. С. 302–310.
11. *Пашкевич В. В.* Геодезическое (релятивистское) вращение тел Солнечной системы // *Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2016. Т. 3(61), вып. 3. С. 506–516. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.319>
12. *Folkner W. F.* Planetary and Lunar Ephemerides: Export Information. JPL, 2011.
13. *Смарт У. М.* Небесная механика / пер. с англ. М.: Изд-во Мир, 1965.
14. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Москва, Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
15. *Пашкевич В. В., Ерошкин Г. И.* Построение полуаналитического и численного решений задачи о вращательном движении Луны // *Астрономический вестник*. 2013. Т. 47, № 1. С. 70–73.
16. *Eroshkin G. I., Pashkevich V. V.* Numerical simulation of the rotation motion of the Earth and Moon // *Proc. of IAU Colloquium 165. Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies* / Eds I. M. Wytrzyszczak, J. H. Lieske, R. A. Feldman. 1997. P. 275–280.
17. *Ландау Л. Д., Луифилиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
18. *Eroshkin G. I., Pashkevich V. V.* Geodetic rotation of the Solar system bodies // *Artificial Satellites*. 2007. Vol. 42, N 1. P. 59–70.
19. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 1979. 448 с.
20. *Bretagnon P., Francou G., Rocher P., Simon J. L.* SMART97: A new solution for the rotation of the rigid Earth // *Astron. Astrophys.* 1998. Vol. 329, N 1. P. 329–338.
21. *Brumberg V. A., Bretagnon P.* Kinematical Relativistic Corrections for Earth's Rotation Parameters // *Proc. of IAU Colloquium 180* / Eds K. Johnston, D. McCarthy, B. Luzum and G. Kaplan. U. S. Naval Observatory. 2000. P. 293–302.

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2016 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

INVESTIGATION OF THE MOON ROTATION IN THE RELATIVISTIC APPROXIMATION

Vladimir V. Pashkevich

Pulkovo Observatory of RAS, Pulkovskoe shaussee, 65-1, St. Petersburg, 196140, Russian Federation; apeks@gao.spb.ru

The Moon rotation problem for the relativistic approximation, in which the geodetic perturbations (the most essential relativistic perturbations) in the Moon rotation are taken into account is studied. The discrepancies of the comparison between the high-precision numerical solutions and the semi-analytical solutions the Moon rotation problem are investigated by the numerical and analytical methods with respect to the fixed ecliptic of epoch J2000. As the result of this research in the first time are constructed the high-precision Moon Rotation Series MRS2016 in the relativistic approximation. The residuals between the numerical integration and MRS2016 in the perturbing terms of the physical librations do not surpass 64 mas over 2000 and 8 arc seconds over 6000 years. Refs 21. Figs 4. Table 1.

Keywords: the Moon rotation, ephemeris, the numerical and the semi-analytical solutions, the relativistic approximation.

References

1. Arago F., *Biographies of Distinguished Scientific Men 1* (Ticknor and Fields, Boston, 1859; RKHD Publ., Moscow, Izhevsk, 2000).
2. Hevelii J., *Selenographia, sive Lunae descriptio* (Gedani edita, 1647).
3. Cassini J. D., *Traité de l'origine et du progrès de l'Astronomie* (Paris, 1693) [in French].
4. Moons M., "Physical Libration of the Moon", *Celestial Mechanics* **26**, issue 2, 131–142 (1982). <https://doi.org/10.1007/BF01230875>
5. Eckhardt D. H., "Theory of Libration of the Moon", *The Moon and the planets* **25**, issue 1, 3–49 (1981). <https://doi.org/10.1007/BF00911807>
6. Moons M., "Planetary Perturbations on the Libration of the Moon", *Celestial Mechanics* **34**, issue 1–4, 263–273 (1984). <https://doi.org/10.1007/BF01235808>
7. Pesek I., "An Effect of the Earth's Flattening on the Rotation of the Moon", *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* **33**(3), 176–179 (1982).
8. Brumberg V. A., *Relativistic celestial mechanics* (Nauka Publ., Moscow, 1972, 384 p.) [in Russian].
9. Pashkevich V. V., Eroshkin G. I., "Construction of the new high-precision Moon rotation series at a long time intervals", *Artificial Satellites* **46**(2), 63–73 (2011). <https://doi.org/10.2478/v10018-011-0013-3>
10. Pashkevich V. V., "RERS2014 AND MRS2014: New high-precision solutions for the Earth and the Moon rotation at long time intervals", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1* **2**(60), issue 2, 302–310 (2015) [in Russian].
11. Pashkevich V. V., "Geodetic (relativistic) rotation of the solar system bodies", *Vestnik St. Petersburg Univ. Series 1* **3**(61), issue 3, 506–516 [in Russian]. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.319>
12. Folkner W. F., *Planetary and Lunar Ephemerides: Export Information* (JPL, 2011).
13. Smart W. M., *Celestial mechanics* (Longmans, Green and Co, London, New York, Toronto, 1953).
14. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Dynamics of rigid body* (PKHD Publ., Moscow, Izhevsk, 2001) [in Russian].
15. Pashkevich V. V., Eroshkin G. I., "Construction of the semi-analytical and numerical solutions to the problem of rotational motion of the moon", *Sol. Syst. Res.* **47**, issue 1, 66–69 (2013). <https://doi.org/10.1134/S003809461301005X>
16. Eroshkin G. I., Pashkevich V. V., "Numerical simulation of the rotation motion of the Earth and Moon", *Proc. of IAU Colloquium 165, Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, 275–280 (eds I. M. Wytrzyszczak, J. H. Lieske, R. A. Feldman, 1997).
17. Landau L. D., Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields* (Nauka Publ., Moscow, 1967) [in Russian].
18. Eroshkin G. I., Pashkevich V. V., "Geodetic rotation of the Solar system bodies", *Artificial Satellites* **42**(1), 59–70 (2007).
19. Abalakin V. K., *Basis of ephemerical astronomy* (Nauka Publ., Moscow, 1979) [in Russian].
20. Bretagnon P., Francou G., Rocher P., Simon J. L., "SMART97: A new solution for the rotation of the rigid Earth", *Astron. Astrophys* **329**(1), 329–338 (1998).

21. Brumberg V. A., Bretagnon P., “Kinematical Relativistic Corrections for Earth’s Rotation Parameters”, *Proc. of IAU Colloquium 180*, 293–302 (eds K. Johnston, D. McCarthy, B. Luzum and G. Kaplan, U. S. Naval Observatory, 2000).

Для цитирования: Пашкевич В. В. Исследование вращательного движения Луны в релятивистском приближении // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 681–694. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.416>

For citation: Pashkevich V. V. Investigation of the Moon rotation in the relativistic approximation. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 681–694. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.416>

ХРОНИКА

26 апреля 2017 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН был заслушан доклад д-ра физ.-мат. наук, профессора М. П. Юшкова и студентов К. М. Фазлыевой, Т. С. Шугайло (Санкт-Петербургский государственный университет) на тему «Гашение колебаний двухмассовой системы с помощью применения обобщенного принципа Гаусса».

Краткое содержание доклада:

Рассматривается движение двухмассовой системы с пружиной вдоль горизонтальной прямой. С помощью принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса отыскиваются управляющие силы, переводящие за указанное время систему из начального состояния покоя в конечное состояние покоя. Задача решается в главных безразмерных координатах. Проводится сравнение результатов, полученных указанными выше методами.

24 мая 2017 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН был заслушан доклад д-ра физ.-мат. наук, профессора М. П. Юшкова и студента В. В. Додонова (Санкт-Петербургский государственный университет) на тему «Исследование движения ИСЗ с постоянным ускорением на основе использования обобщенного принципа Гаусса».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассматривается движение спутника Земли после закрепления величины его ускорения, имеющегося в заданный момент времени. Тем самым рассматривается задача движения после наложения линейной неголономной связи третьего порядка, которую следует рассматривать как программную. Задача решается с помощью применения двух теорий движения неголономных систем со связями высокого порядка. В первой из них строится совместная система дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат и множителей Лагранжа, а вторая базируется на применении обобщенного принципа Гаусса. Приводятся результаты численных расчетов.