ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ В L_p

А. А. Шабозова

Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

В статье найдено точное значение верхней грани отклонения в метрике L_p кривых Γ , заданных параметрическими уравнениями в m -мерном евклидовом пространстве от вписанных в них интерполяционных ломаных на классе $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$, заданном как произвольными, так и выпуклыми модулями непрерывности $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. Решена задача отыскания верхних граней отклонения параметрических заданных кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}$, координатные функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) которых соответственно принадлежат классу $H^{\omega_i}[0, L]$ ($i = \overline{1, m}$) и пересекаются в N ($N \geq 2$) точках разбиения отрезка $[0, L]$. Полученные результаты являются обобщением результата В. Ф. Сторчая о приближении непрерывных функций интерполяционными ломаными в метрике пространства $L_p[0, L]$ ($1 \leq p \leq \infty$). Библиогр. 16 назв.

Ключевые слова: экстремальные задачи, теория приближения, параметрически заданные кривые, интерполяционные ломаные, модуль непрерывности, выпуклые модули непрерывности.

В работе [1] рассмотрен вопрос о точной верхней оценке погрешности приближения кривых Γ , заданных параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \leq t \leq L, \quad (1)$$

в m -мерном евклидовом пространстве R^m от вписанных в них интерполяционных ломаных на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности в метрике пространства $C[0, L]$. В [2] найдены точные оценки погрешности приближения производных координатных функций кривых от их соответствующих производных интерполяционных ломаных в R^m для указанных классов функций. Полученные в [1] и [2] результаты являются своеобразным распространением хорошо известных результатов В. Н. Малоземова [3, 4] на случай приближения параметрически заданных кривых из R^m .

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и изучим аналогичную задачу в норме пространства $L_p[0, L]$, $1 \leq p \leq \infty$. Отметим, что вопрос аппроксимации кривых интерполяционными ломаными и сплайн-функциями ранее рассматривался, например, в работах [5–11], а также в монографиях [12, 13].

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $H^\omega[a, b]$ — класс функций $f \in C[a, b]$, для любых двух точек $t', t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \leq \omega(|t' - t''|),$$

где $\omega(t)$ — заданный на отрезке $[0, b - a]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0, b - a]$ функция, в нуле равная нулю. Если $\omega(t) = Kt^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$, класс $H^\omega[a, b]$ называют классом Липшица порядка α с константой K и пишут $H^\omega[a, b] = KH^\alpha[a, b]$.

Через $H^{\omega_1, \dots, \omega_m} := H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ обозначим класс кривых Γ в R^m , заданных параметрическими уравнениями (1) и таких, у которых координатные функции

$\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$ ($i = \overline{1, m}$). В случае, когда $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$, $i = \overline{1, m}$, соответствующий класс функций обозначим $H^{m, \omega}$.

Обозначим через $L_p[0, L]$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство суммируемых на $[0, L]$ в p -й ($1 \leq p < \infty$) степени или измеримых существенно ограниченных ($p = \infty$) на $[0, L]$ функций $f(t)$ с конечной нормой соответственно

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[0, L]} = \left(\int_0^L |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty[0, L]} = \operatorname{vraisup}_{0 \leq t \leq L} |f(t)| \quad (p = \infty).$$

Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями (1), а кривая G — параметрическими уравнениями $y_i = \psi_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leq t < L$, причем $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0, L]$, $1 \leq p < \infty$. Определим расстояние между кривыми Γ и G одним из следующих равенств:

$$\rho_1(\Gamma, G)_p = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$\rho_2(\Gamma, G)_p = \sum_{i=1}^m \left(\int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$\rho_3(\Gamma, G)_p = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $\Delta_N : 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq L$ — произвольное разбиение отрезка $[0, L]$ и для координатных функций кривых Γ и G выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k), \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Если $P(t) \equiv P(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \in \Gamma$, $Q(t) \equiv Q(\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)) \in G$ — точки, определяемые одним и тем же значением параметра t , то точки $P(t_k) := P(\varphi_1(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) \in \Gamma$ и $Q(t_k) := Q(\psi_1(t_k), \dots, \psi_m(t_k)) \in G$, $k = \overline{1, N}$, при выполнении равенства (2) совпадают, и кривые Γ и G в точках разбиения $t_k, k = \overline{1, N}$, пересекаются. Равномерное разбиение отрезка $[0, L]$ обозначим через $\bar{\Delta}_N = \{\bar{t}_k : \bar{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$, а через Δ_N° обозначим разбиение отрезка $[0, L]$ точками $t_k^\circ = (2k-1)L/(2N), k = \overline{1, N}$.

Если $\rho(\Gamma, G; \Delta_N)$ — одно из расстояний $\rho_i(\Gamma, G; \Delta_N), i = \overline{1, 3}$, между кривыми $\Gamma, G \in R^m$, для которых выполняются равенства (2), то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho)_p = \inf_{\Delta_N} \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \Delta_N; \rho)_p, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \Delta_N; \rho)_p = \sup\{\rho(\Gamma, G; \Delta_N)_p : \Gamma, G \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}\}. \quad (4)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Каковы бы ни были модули непрерывности $\omega_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$, $0 \leq t \leq L$), при всех $1 \leq p < \infty$ имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho_1)_p = \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N^\circ; \rho_1)_p = 2(2N)^{1/p} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho_2)_p = \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N^\circ; \rho_2)_p = 2(2N)^{1/p} \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}, \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho_3)_p = \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N^\circ; \rho_3)_p = 2(2N)^{1/p} \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, приводим доказательство равенства (6), поскольку доказательства (5) и (7) проводятся по аналогичной схеме. Пользуясь условиями (2) и неравенством Минковского для интегралов (см., например, [14, с. 394])

$$\left\{ \int_0^L |f(t) + g(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_0^L |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} + \left\{ \int_0^L |g(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

для произвольных кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ получаем

$$\begin{aligned} \rho_2(\Gamma, G; \Delta_N) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L |[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)] + [\psi_i(t_k) - \psi_i(t)]|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)|^p dt \right\}^{1/p} + \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L |\psi_i(t) - \psi_i(t_k)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L \omega_i^p(|t - t_k|) dt \right\}^{1/p}. \quad (8) \end{aligned}$$

Так как неравенство (8) верно для любого $t_k \in \Delta_N$, то в силу того, что модули непрерывности $\omega_i(\tau)$ являются непрерывными и неубывающими на отрезке $[0, L]$ функциями, запишем

$$\min_k \omega_i^p(|t - t_k|) = \omega_i^p(\min_k |t - t_k|), \quad p \geq 1,$$

а потому имеем

$$\rho_2(\Gamma, G; \Delta_N)_p \leq 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L \omega_i^p(\min_k |t - t_k|) dt \right\}^{1/p}.$$

Последняя оценка точна на классе кривых $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$, в чем легко убедиться, если рассмотреть кривые Γ_0 и G_0 из этого класса с координатами соответственно

$$\varphi_{i0}(t) = -\psi_{i0}(t) = \omega_i(\min_k |t - t_k|), \quad 0 \leq t \leq L, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N, \rho_2)_p &= \rho_2(\Gamma_0, G_0; \Delta_N)_p = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^L \omega_i^p(\min_k |t - t_k|) dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $\varphi_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) — неубывающие и неотрицательные на отрезке $[0, b - a]$ функции. При фиксированном $N \in \mathbb{N}$ разбиению

$$\delta_N := \{\tau_k : a \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N \leq b\}$$

сопоставим функции

$$\mu_i(\delta_N, t) = \varphi_i(\min_k |t - \tau_k|), \quad i = \overline{1, m}, \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда при любом $1 \leq p < \infty$ справедливы неравенства

$$\int_a^b \mu_i^p(\delta_N, t) dt \geq \int_a^b \mu_i^p(\bar{\delta}_N, t) dt, \quad i = \overline{1, m}, \quad (10)$$

где

$$\bar{\delta}_N := \{\tau_k^\circ : \tau_k^\circ = a + (2k - 1)(b - a)/(2N), \quad k = \overline{1, N}\}.$$

Доказательство. Отметим, что сформулированная лемма является несложной модификацией леммы 8.2.9 из [14, с. 369], но мы, ради полноты, приведем ее доказательство. Если полагать $z_0 = a, z_k = (\tau_k^\circ + \tau_{k+1}^\circ)/2, k = \overline{1, N-1}, z_N = b$, то в силу монотонности функции μ_i^p имеем

$$\mu_i^p(\bar{\delta}_N, t) = \varphi_i^p(|t - \tau_k^\circ|), \quad z_{k-1} \leq t \leq z_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Простые вычисления приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu_i^p(\bar{\delta}_N, t) dt &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varphi_i^p(|t - \tau_k^\circ|) dt = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_{k-1}}^{\tau_k^\circ} \varphi_i^p(\tau_k^\circ - t) dt + \int_{\tau_k^\circ}^{z_k} \varphi_i^p(t - \tau_k^\circ) dt \right) = 2N \int_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

С другой стороны, из определения функций $\mu_i^p(\delta_N, t)$ следует, что произвольному разбиению δ_N можно сопоставить наборы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2N}$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2N} = b - a$ и

$$\int_a^b \mu_i^p(\delta_N, t) dt = \sum_{\nu=1}^{2N} \Phi_i(\alpha_\nu), \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

где $\Phi_i(t) = \int_0^t \varphi_i^p(u) du$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leq t \leq b - a$, $1 \leq p < \infty$.

Покажем, что $\Phi_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) являются выпуклыми вниз на отрезке $[0, b - a]$ функциями. В самом деле, для любых двух точек $t', t'' \in [0, b - a]$ таких, что $t' < t''$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_i(t') + \Phi_i(t'') - 2\Phi_i\left(\frac{t' + t''}{2}\right) &= \int_{(t' + t'')/2}^{t''} \varphi_i^p(u) du - \int_{t'}^{(t' + t'')/2} \varphi_i^p(u) du \geq \\ &\geq \varphi_i^p\left(\frac{t' + t''}{2}\right) \cdot \frac{t'' - t'}{2} - \varphi_i^p\left(\frac{t' + t''}{2}\right) \cdot \frac{t'' - t'}{2} = 0. \end{aligned}$$

В силу неравенства Йенсена для выпуклых вниз функций (см., напр., [15, с. 92]) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{2N} \Phi_i(\alpha_\nu) \geq 2N \Phi_i\left(\frac{1}{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} \alpha_\nu\right) = 2N \Phi_i\left(\frac{b-a}{2N}\right) = 2N \int_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(u) du. \quad (13)$$

Из равенства (12) в силу неравенства (13) получаем

$$\int_a^b \mu_i^p(\delta_N, t) dt \geq 2N \int_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(u) du,$$

а последнее соотношение в связи с (11) эквивалентно требуемому неравенству (10), откуда и вытекает утверждение леммы.

Применяя доказанную лемму к правой части (9), сразу получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho_2)_p &= \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \bar{\Delta}_N, \rho_2)_p = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \left\{ 2N \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p} = 2(2N)^{1/p} \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое равенство (6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливы равенства

$$\mathcal{E}_N(H^{m, \omega}; \rho_1)_p = 2 \left(2Nm \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_2)_p = 2m \left(2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_3)_p = 2 \left(2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p}.$$

Следующая теорема в определенном смысле является обобщением и распространением известного результата В. Ф. Сторчая [16] об отклонении ломаных в метрике $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике $L_p[0, L]$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. Пусть Γ_N — вписанная в кривой $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ ломаная с вершинами в точках $P_k := P(\varphi_1(kh), \dots, \varphi_m(kh))$, $k = \overline{0, N}$, $h = L/N$, соответствующих разбиению $\bar{\Delta}_N = \{\bar{t}_k : \bar{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$ отрезка $[0, L]$. В предположении, что $\omega_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$, $0 \leq t \leq L$) — выпуклые модули непрерывности, справедливы равенства

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \bar{\Delta}_N; \rho_1)_p = \left(2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad (14)$$

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \bar{\Delta}_N; \rho_2)_p = \sum_{i=1}^m \left(2N \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad (15)$$

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \bar{\Delta}_N; \rho_3)_p = \max_{1 \leq i \leq m} \left(2N \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}. \quad (16)$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности, приводим доказательство только соотношения (14). Очевидно, параметрическое уравнение звена ломаной Γ_N , соединяющей точки P_k и P_{k+1} , имеет вид

$$l(\varphi_i; t) = \varphi_i(\bar{t}_k) + (t - \bar{t}_k)h^{-1}[\varphi_i(\bar{t}_{k+1}) - \varphi_i(\bar{t}_k)], \quad i = \overline{1, m}, \quad (17)$$

где $\bar{t}_k \leq t \leq \bar{t}_{k+1}$. Используя представление (17), для $t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$ запишем

$$\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t) = (\bar{t}_{k+1} - t)h^{-1}[\varphi_i(t) - \varphi_i(\bar{t}_k)] + (t - \bar{t}_k)h^{-1}[\varphi_i(t) - \varphi_i(\bar{t}_{k+1})]. \quad (18)$$

В [16] доказано, что при любом $t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$\int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t)|^p dt \leq 2 \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (19)$$

Пользуясь неравенством (19), получаем

$$\begin{aligned} \rho_1(\Gamma, \Gamma_N; \bar{\Delta}_N)_p &= \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t)|^p dt \right\}^{1/p} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \left\{ 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}. \quad (20) \end{aligned}$$

Докажем, что существует кривая $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$, для которой неравенство (20) обращается в равенство. Пусть Γ^* — кривая, координатные функции которой определены на отрезке $[0, L]$ равенствами

$$\varphi_i^*(t) = \begin{cases} \omega_i(t - \bar{t}_k), & \bar{t}_k \leq t \leq \bar{t}_k + L/(2N), \\ \omega_i(\bar{t}_{k+1} - t), & \bar{t}_k + L/(2N) \leq t \leq \bar{t}_{k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $\omega_i(t)$ — выпуклые вверх модули непрерывности на отрезке $[0, L]$. Очевидно, что кривая $\Gamma^* \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$. Поскольку $\varphi_i^*(\bar{t}_k) = 0$, $k = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{1, m}$, то $l(\varphi_i^*, \bar{t}_k) = 0$, $k = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{1, m}$, а потому имеем

$$\begin{aligned} \rho_1(\Gamma^*, \Gamma_N^*; \bar{\Delta}_N)_p &= \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i^*(t) - l(\varphi_i^*, \bar{t}_k)|^p dt \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i^*(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i^*(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \left\{ 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (14), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(H^{m, \omega}; \rho_1)_p &= \left\{ 2mN \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p}, \\ \mathcal{E}_N(H^{m, \omega}; \rho_2)_p &= m \left\{ 2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p}, \\ \mathcal{E}_N(H^{m, \omega}; \rho_3)_p &= \left\{ 2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

В частности, если $\omega(t) = Kt^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$, то при всех $1 \leq p < \infty$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_N(KH^{m, \alpha}; \rho_1)_p = \frac{K(mL)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1}} \left(\frac{L}{2N} \right)^\alpha,$$

$$\mathcal{E}_N(KH^{m,\alpha}; \rho_2)_p = \frac{mK(L)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1}} \left(\frac{L}{2N} \right)^\alpha,$$

$$\mathcal{E}_N(KH^{m,\alpha}; \rho_3)_p = \frac{K(L)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1}} \left(\frac{L}{2N} \right)^\alpha.$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

Литература

1. Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. Приближение кривых ломаными // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 2. С. 68–76.
2. Шабозова А. А. К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ // Известия ТулГУ. 2015. № 4. С. 107–112.
3. Малоземов В. Н. Об отклонении ломаных // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 1966. Вып. 2. С. 150–153.
4. Малоземов В. Н. К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 5. С. 537–540.
5. Мартынюк В. Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. мат. журнал. 1976. Т. 28, № 1. С. 87–92.
6. Мартынюк В. Т. Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей. В кн.: Теория приближения функций. М.: Наука, 1987. С. 282–287.
7. Назаренко Н. А. О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Геометрическая теория функций и топология. Киев: ИМ АН УССР. 1981. С. 55–62.
8. Вакарчук С. Б. О приближении кривых, заданных в параметрическом виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. мат. журнал. 1983. Т. 35, № 3. С. 352–355.
9. Вакарчук С. Б. Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Изв. вузов. Матем. 1988. № 2. С. 14–19.
10. Корнейчук Н. П. Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журнал. 1988. Т. 40, № 6. С. 737–743.
11. Корнейчук Н. П. Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. мат. журнал. 1989. Т. 41, № 4. С. 492–499.
12. Сендов Б. Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.
13. Завъялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
14. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
15. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. литературы, 1948. 456 с.
16. Сторчай В. Ф. Об отклонении ломаных в метрике L_p // Матем. заметки. 1969. Т. 5, № 1. С. 21–25.

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Шабозова Адолат Авзамовна — adolat@mail.ru

APPROXIMATION OF CURVES BY BROKEN LINES IN L_p

Adolat A. Shabozova

Tajik National University, pr. Rudaki, Dushanbe, 17, Tajikistan; adolat@mail.ru

In this paper was found the exact values of upper bounds deviation in $L_p[0, L]$ ($1 \leq p < \infty$) metrics of curve Γ , defined by parametric equations in n -dimensional space of inscribed in its at the points $t_k = kL/N$, $k = \overline{0, N}$ a broken line on the $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ class given both as an arbitrary or convex modulus of continuity $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. The problem of finding the upper bounds of deviation of parametric given curves $\Gamma, G \in H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}$ coordinate functions $\varphi_i(t)$ and $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) of which respectively belong to the class $H^{\omega_i}[0, L]$ ($i = \overline{1, m}$) intersect in N ($N \geq 2$) points of the partition to the segment $[0, L]$.

The obtained results are generalizations of the result of V. F. Storchai on the approximation of continuous functions by interpolation polygonal lines in the metric of the space $L_p[0, L]$ ($1 \leq p \leq \infty$). Refs 16.

Keywords: extreme problems, approximation theory, parametrically defined curves, interpolation polygonal lines, modulus of continuity, convex moduli of continuity.

References

1. Shabozov M.Sh., Shabozova A.A., “Approximation of curves by broken lines”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, issue 2, 68–76 (2013) [in Russian].
2. Shabozova A. A., “About the polygonal interpolation of curves in $\mathbb{R}^m$ space”, *Collection of scientific papers, Proceedings of the TSU* (4), 107–112 (2015) [in Russian].
3. Malozemov V.N., “On the deviation of broken lines”, *Vestnik Leningrad. Univ. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 150–153 (1966) [in Russian].
4. Malozemov V.N., “Polygonal interpolation”, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **1**(5), 355–357 (1967). <https://doi.org/10.1007/BF01094071>
5. Martynyuk V.T., “Approximation by polygonal lines of curves given by parametric equations in the Hausdorff metric”, *Ukr. Math. J.* **28**(1), 68–72 (1976). <https://doi.org/10.1007/BF01559232>
6. Martynyuk V.T., *Some questions of approaching lines and surfaces*. In: *Theory of approximation of functions* (Nauka Publ., Moscow, 1987, 282–287) [in Russian].
7. Nazarenko N. A., *On the approximation of plane curves by parametric Hermitian splines*. In: *Geometric theory of functions and topology* (Institute of Mathematics of the Ukrainian SSR, Kiev, 1981, 55–62) [in Russian].
8. Vakarchuk S. B., “Approximation by spline-curves of curves given in parametric form”, *Ukr. Math. J.* **35**(3), 303–306 (1983). <https://doi.org/10.1007/BF01092180>
9. Vakarchuk S. B., “The exact constants of the approximation of plane curves by polynomial curves and broken lines”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)* **32**(2), 19–26 (1988).
10. Korneichuk N. P., “On optimal coding of vector functions”, *Ukr. Math. J.* **40**(6), 621–627 (1988). <https://doi.org/10.1007/BF01057180>
11. Korneichuk N. P., “Approximation and optimal coding of smooth plane curves”, *Ukr. Math. J.* **41**(4), 492–499 (1989) [in Russian].
12. Sendov B., *Hausdorff approximations* (Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1979, 372 p.) [in Russian].
13. Zavyalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L., *Methods of spline functions* (Nauka Publ., Moscow, 1980, 352 p.) [in Russian].
14. Korneichuk N. P., *Exact constant in theory approximations* (Nauka Publ., Moscow, 1987, 424 p.) [in Russian].
15. Hardy G. G., Littlewood J. E., Polya G., *Inequality* (Cambridge University Press, 1948, 456 p.).
16. Storchay V. F., “On the deviation of polygonal lines in the L_p metric”, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **5**(1), 21–25 (1969). <https://doi.org/10.1007/BF01098710>

Для цитирования: Шабозова А. А. Приближение кривых ломаными в L_p // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 622–630. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.410>

For citation: Shabozova A. A. Approximation of curves by broken lines in L_p . *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 622–630. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.410>