УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 26D15

ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К НЕРАВЕНСТВУ ГЁЛЬДЕРА. II

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Установлено, что если множество «резонансных» точек каждой из этих функций не пусто и выполнено «нерезонансное» условие (понятия, введенные автором для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$), то справедливо неравенство

$$\sup_{a,b \in R^1} \left| \int_a^b \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, а $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, — это некоторые специально построенные нормированные пространства.

Кроме того, дано условие ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^1$. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера.

Введение. Предлагаемая статья представляет собой вторую, заключительную часть работы автора [1]. Она содержит формулировку и доказательство основной теоремы, анонсированной в [1] и посвященной вопросу ограниченности интеграла от произведения функций.

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^1$ — множество положительной меры Лебега, $m \geqslant 2$, числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(D), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(D)$. Если

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

то согласно неравенству Гёльдера (см., например, [2, с. 232]) можем записать

$$\left| \int_D \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(D)}. \tag{1}$$

Если же

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1, \tag{2}$$

и $\operatorname{mes} D < +\infty$, то, очевидно, выполняется неравенство, аналогичное неравенству (1). В настоящей статье предполагается, что $\operatorname{mes} D = \infty$.

Основное утверждение работы (теорема 3.2) состоит в следующем. Если числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in$

 https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.407

$L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, «резонансные» множества (определение 2.1) этих функций не пусты и выполнено «нерезонансное» условие (опеределение 3.1), то

$$\sup_{a,b\in R^1}\left|\int\limits_a^b\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]\,d\tau\right|\leqslant C\prod_{k=1}^m\|\gamma_k+\Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},\tag{3}$$

где константа $C>0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k\in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, а $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)\subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ — это пространства со специально определенной нормой, состоящие из тех элементов $L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, множество резонансных точек которых лежит в заранее выбранной окрестности множества резонансных точек соответствующей функции γ_k, $1\leqslant k\leqslant m$.

Также рассмотрен вопрос (теорема 3.3) об ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по произвольному множеству $D\subset\mathbb{R}^1$, $\operatorname{mes}D=+\infty$.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

- $\widetilde{\mathbb{R}}^1=\mathbb{R}^1\cup\{\infty\}$;
- $\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$;
- $\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;
- $0\notin\sum\limits_{k=1}^m\mathcal{R}_k$ — нерезонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ приводится);
- $V(\mathcal{R}_k,\delta)$ — δ-окрестность множества $\mathcal{R}_k$;
- $V(\mathcal{R}_k,\delta,\Delta)$ — множество $V(\mathcal{R}_k\cap\mathbb{R}^1,\delta)\cup(-\infty,-\Delta)\cup(\Delta,+\infty)$;
- $V(\mathcal{R}_k)$ — общее обозначение для $V(\mathcal{R}_k,\delta)$ и $V(\mathcal{R}_k,\delta,\Delta)$.

Приведем некоторые обозначения и утверждения из первой части работы. Для удобства сохранена нумерация цитированных формул и теорем.

Пусть функция $u\in L^1(\mathbb{R}^1)$. Обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{-iy\tau}u(\tau)\,d\tau.\tag{4}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v\in L^1(\mathbb{R}^1)$ будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно имеет вид

$$\widetilde{v}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{iy\tau}v(y)\,dy.$$

Обозначим также через $S(\mathbb{R}^1)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^1)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p\in[1,+\infty]$ и $\gamma\in L^p(\mathbb{R}^1)$, тогда, как известно, функционал

$$(\gamma,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\overline{\gamma(t)}\varphi(t)\,dt,\qquad\varphi\in S(\mathbb{R}^1),$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^1)$.

Известно также, что *преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции* f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^1)$, обозначаемый в соответствии с (4), $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f,φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f},\widehat{\varphi}) = 2\pi(f,\varphi)$.

В силу введенных выше обозначений, известные формулы принимают вид

$$\{\gamma_1(\tau)*\gamma_2(\tau)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y), \quad \{\widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y)\}\widetilde{\ }(\tau) = \gamma_1(\tau)*\gamma_2(\tau),$$

$$2\pi\{\gamma_1(\tau)\gamma_2(\tau)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\gamma}_1(y)*\widehat{\gamma}_2(y),$$

где $\gamma_1,\gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$.

Теорема 1.1. *Пусть* $p \in (1,+\infty]$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любой функции* $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$ *такой, что* $\operatorname{supp}\widehat{\gamma} \cap (-\varepsilon,\varepsilon) = \varnothing$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \int\limits_0^t \gamma(\tau)\,d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{1/q}} \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$, где $a,b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$.

Пусть числа $p_1, p \in (1,+\infty]$.

Определение 2.1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется *нерезонансной точкой* функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются *резонансными точками* функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 2.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 2.1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Пример 2.1. Пусть $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k\tau}$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p \in (1,+\infty]$ имеем

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^n \{\lambda_k\}. \tag{5}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $p_1, p \in (1,+\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. *Тогда* $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *в том и только том случае, когда* $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Пусть $\delta > 0$ и $D \subset \mathbb{R}^1$. Обозначим через $V(D,\delta)$ δ-окрестность множества D.

Теорема 2.2. *Пусть* $p_1, p \in (1,+\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, *резонансное множество* $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$ *и* $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *можно указать такую функцию* $F(\tau) = F(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, *что справедливы условия:*

1) $F \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{F}(y) = 1$, *если* $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/4)$, *и* $\widehat{F}(y) = 0$, *если* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$;

2) $\gamma(\tau) = A(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma,\delta) + a(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma,\delta)$, *где* $A(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma,\delta) = \gamma(\tau)*F(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\gamma,\mathcal{R}_\gamma,\delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\delta)}$ *и* $a(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma,\delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau)*F(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Пусть $\delta, \Delta > 0$ и $D \subset \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Обозначим

$$V(D, \delta, \Delta) = V(D \cap \mathbb{R}^1, \delta) \cup (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty).$$

Теорема 2.3. *Пусть $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\infty \in \mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}}$, и числа $\delta, \Delta > 0$ таковы, что $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)} \subsetneq \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Тогда существует функция $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $G \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{G}(y) = 0$, если $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/2, \Delta)$, и $\widehat{G}(y) = 1$, если $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$;

2) $\gamma(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) + a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, где $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)}$.

Далее, в § 3, если это не будет приводить к путанице, вместо $V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$ и $V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$ будем писать $V(\mathcal{R}_\gamma)$.

Замечание 2.1. *Из доказательств теорем 2.2 и 2.3 видно, что функции $F(\tau)$ и $G(\tau)$, удовлетворяющие условиям теорем, могут быть построены не единственным способом и не обязательно с использованием функции Ω.*

§ 3. Оценка интеграла от произведения функций. Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству (2), и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. В этом параграфе для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$ при $p \in (1, +\infty]$ вводится понятие «нерезонансного» условия (определение 3.1), являющееся (замечание 3.1) аналогом соответствующего понятия из классической теории резонанса. Затем с использованием этого термина формулируется теорема 3.1 об условиях ограниченности интеграла

$$\int_0^t \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau.$$

Далее по функциям γ_k строятся нормированные пространства $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и доказывается (теорема 3.2) неравенство (3). В завершение параграфа рассматривается вопрос (теорема 3.3) об ограниченности интеграла при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^1$.

Введем некоторые обозначения и определения. Положим

$$\frac{1}{s} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}, \quad \frac{1}{s_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{p_j}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$f(\tau) = \prod_{j=1}^m \gamma_j(\tau), \quad f_k(\tau) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \gamma_j(\tau), \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Тогда $s, s_1, \ldots, s_m \in (1, +\infty]$ и можем записать

$$\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^1)} \leqslant \prod_{j=1}^m \|\gamma_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}, \tag{6}$$

$$\|f_k\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^1)} \leqslant \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \|\gamma_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{7}$$

Определим на $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ операцию сложения следующим образом. Суммой элементов $\omega_1, \omega_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ будем называть элемент из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, обозначаемый $\omega_1 + \omega_2$ и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

1) выражение $\infty + \infty$ не определено;

2) $\omega + \infty = \infty, \quad \omega \in \mathbb{R}^1$.

Введенную таким образом операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем трех слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащее более одного символа ∞, считать не имеющим смысла.

Для $A, B, \ldots, C \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^1$ обозначим

$$A + B + \ldots + C = \{x \,|\, x = a + b + \ldots + c,\ a \in A,\ b \in B\ ,\ldots,\ c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Лемма 3.1. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), $\varepsilon > 0$, множества $W_1, \ldots, W_m \subset \widetilde{\mathbb{R}}^1$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку и*

$$\varepsilon \leqslant \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^{m} W_k\right], \tag{8}$$

а функции $x_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, x_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ таковы, что $\operatorname{supp} \widehat{x}_k \subseteq W_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда

$$\left| \int_0^t \prod_{k=1}^{m} x_k(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{1/r}} \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}, \tag{9}$$

где $\frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}$ и $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s}$.

Доказательство. Обозначим $\gamma(\tau) = \prod\limits_{k=1}^{m} x_k(\tau)$. Тогда в силу (6) будем иметь

$$\|\gamma\|_{L^s(\mathbb{R}^1)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}, \quad \frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}.$$

А так как [3, с. 69] $\operatorname{supp} \widehat{\gamma} = \operatorname{supp}\{\widehat{x}_1 * \ldots * \widehat{x}_m\} \subseteq \overline{\sum_{k=1}^{m} W_k}$, то из (8) получаем, что $\operatorname{supp} \widehat{f} \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing$, откуда по теореме 1.1 и следует утверждение леммы. $\square$

При каждом $k = 1, 2, \ldots, m$ обозначим $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$.

Определение 3.1. Будем говорить, что для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\ldots$, $\gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ выполнено *нерезонансное условие*, если хотя бы одно из множеств $\mathcal{R}_k = \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, или, если все резонансные множества не пусты, не более одного содержит бесконечную точку и выполнено нерезонансное соотношение

$$0 \notin \sum_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k. \tag{10}$$

Замечание 3.1. Если γ_1 и γ_2 — это тригонометрические многочлены, то нерезонансное соотношение превращается в соответствии с результатом из примера 2.1 в арифметическое соотношение между частотами этих многочленов, фигурирующее в классической теории резонанса.

Пусть резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, не более чем одно из них содержит бесконечную точку и выполнено нерезонансное соотношение (10). Обозначим $d = \operatorname{dist}[0, \sum_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k]$. Тогда $d > 0$ и можно указать такие $\delta = \delta(d) > 0$ и $\Delta = \Delta(d) > 0$, что для $V(\mathcal{R}_k)$-окрестностей резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2} d \leqslant \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^{m} V(\mathcal{R}_k)\right]. \tag{11}$$

Функции $A(t,\gamma)$, $a(t,\gamma)$, найденные в теоремах 2.2, 2.3, будем для $\delta(d)$ и $\Delta(d)$ обозначать через $A(t,\gamma,d)$ и $a(t,\gamma,d)$ соответственно. Таким образом, согласно теоремам 2.2, 2.3 при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ будет выполняться включение $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\gamma_k,d) \subset V(\mathcal{R}_k)$.

Теорема 3.1. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2); функции $\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$; резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку; выполнено нерезонансное соотношение (10), $d = \operatorname{dist}[0, \sum_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k]$, а $V(\mathcal{R}_k)$-окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, выбраны так, что выполняется (11). Тогда*

$$\left|\int_0^t \prod_{k=1}^{m} \gamma_k(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\} \times \\ \times \prod_{k=1}^{m}\left\{\|A(\tau,\gamma_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,\gamma_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,\gamma_k,d)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}\right\}, \tag{12}$$

где $\frac{1}{s} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j}$, $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s}$ и $\frac{1}{r_k} = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{1}{p_j}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Замечание 3.2. Если существует $k \in \{1, \ldots, n\}$, при котором $\mathcal{R}_k = \varnothing$, то оценка интеграла от произведения функций производится с помощью неравенства Гёльдера.

Доказательство. При сделанных выше обозначениях и предположениях имеем $\gamma_k(\tau) = A(\tau,\gamma_k,d) + a(\tau,\gamma_k,d)$, где $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\gamma_k,d) \subset V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Обозначив для упрощения записи $A_k(\tau) = A(\tau,\gamma_k,d)$ и $a_k(\tau) = a(\tau,\gamma_k,d)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, получаем

$$\left|\int_0^t \left[\prod_{k=1}^{m} \gamma_k(\tau)\right] d\tau\right| \leqslant \left|\int_0^t \prod_{k=1}^{m} A_k(\tau)\, d\tau\right| + \sum_{\alpha=1}^{m}\left|\int_0^t \left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} A_j(\tau)\right] a_\alpha(\tau)\, d\tau\right| + \\ + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{m}\left|\int_0^t \left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha,\beta}}^{m} A_j(\tau)\right] a_\alpha(\tau) a_\beta(\tau)\, d\tau\right| + \ldots + \left|\int_0^t \prod_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(\tau)\, d\tau\right|. \tag{13}$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (13). Рассмотрим первое слагаемое. Согласно теоремам 2.2, 2.3 функция $A_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, причем $\operatorname{supp}\widehat{A}_k(y) \subset V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. А так как множества $V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, удовлетворяют (11), то по лемме 3.1 выполняется неравенство (9) при $x_k(\tau) = A_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ и $\varepsilon = d/2$:

$$\left|\int_0^t \prod_{k=1}^{m} A_k(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \frac{1}{(d/2)^{1/r}} \prod_{k=1}^{m} \|A_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}. \tag{14}$$

Оценим слагаемые, входящие в первую сумму из правой части (13). Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} A_j(\tau)\Bigg] a_\alpha(\tau)\, d\tau.$$

Обозначим $f_\alpha(\tau) = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} A_j(\tau)$. В силу (7) можем записать

$$\|f_\alpha\|_{L^{s_\alpha}(\mathbb{R}^1)} \leqslant \prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \|A_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)},$$

где $\frac{1}{s_\alpha} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \frac{1}{p_j}$. При этом функция $a_\alpha \in L^{r_\alpha}(\mathbb{R}^1)$, где $\frac{1}{r_\alpha} = 1 - \frac{1}{s_\alpha}$. Следовательно, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\Bigg|\int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} A_j(\tau)\Bigg] a_\alpha(\tau)\, d\tau\Bigg| \leqslant \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \|A_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}\Bigg] \|a_\alpha\|_{L^{r_\alpha}(\mathbb{R}^1)}, \tag{15}$$

где $\frac{1}{r_\alpha} = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \frac{1}{p_j}$.

Оценим слагаемые из второй суммы, стоящей в правой части (13). Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha,\beta}}^{m} A_j(\tau)\Bigg] a_\alpha(\tau) a_\beta(\tau)\, d\tau.$$

Так как согласно теоремам 2.2, 2.3 функция $a_\alpha \in L^{p_\alpha}(\mathbb{R}^1),\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m$, то в силу (7) и неравенства Гёльдера будем иметь

$$\Bigg|\int\limits_0^t \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha,\beta}}^{m} A_j(\tau)\Bigg] a_\alpha(\tau) a_\beta(\tau)\, d\tau\Bigg| \leqslant \Bigg[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \|A_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}\Bigg] \|a_\alpha\|_{L^{p_\alpha}(\mathbb{R}^1)} \|a_\beta\|_{L^{r_\beta}(\mathbb{R}^1)}, \tag{16}$$

где $\frac{1}{r_\beta} = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\beta}}^{m} \frac{1}{p_j}$.

Аналогично оцениваются остальные слагаемые, причем для последнего слагаемого получаем

$$\Bigg|\int\limits_0^t \prod_{j=1}^{m} a_j(\tau)\, d\tau\Bigg| \leqslant \Bigg[\prod_{j=1}^{m-1} \|a_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}\Bigg] \|a_m\|_{L^{r_m}(\mathbb{R}^1)}, \tag{17}$$

где $\frac{1}{r_m} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p_j}$. Так как при всех $1 \leqslant j \leqslant m$ имеем

$$\|a_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)},\ \|a_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|a_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)} + \|a_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^1)},$$

то в силу (13)–(17) неравенство (12) выполняется. $\square$

Рассмотрим вопрос о допустимых в нерезонансном случае возмущениях $\Delta\gamma_1, \ldots, \Delta\gamma_m$ функций $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ соответственно, при которых возмущенный интеграл

$$\int\limits_0^t \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau$$

допускает оценку, аналогичную (12).

С этой целью по каждой функции $\gamma_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, построим нормированное пространство следующим образом. Для функции γ_k найдем множество $\mathcal{R}_k$. Если $\mathcal{R}_k$ ограничено, то, выбрав произвольное $\delta > 0$, построим (см. теорему 2.2) функцию $F_k(\tau) = F_k(\tau, \mathcal{R}_k, \delta)$, которая удовлетворяет условиям $F_k(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} \widehat{F}_k(y) \subset V(\mathcal{R}_k, \delta)$. Далее, используя $F_k(\tau)$, напишем для произвольной функции $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ разложение

$$x(\tau) = A(\tau, x) + a(\tau, x),$$

где $A(\tau, x) = x(\tau) * F_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $a(\tau, x) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ и $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, x) \subset V(\mathcal{R}_k, \delta)$.

Если $\mathcal{R}_k$ неограничено и $\mathcal{R}_k \neq \widetilde{\mathbb{R}}^1$, то, выбрав произвольные $\delta, \Delta > 0$ так, чтобы $\overline{V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)} \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^1$, построим (см. теорему 2.3) функцию $G_k(\tau) = G_k(\tau, \mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$, которая удовлетворяет условиям $G_k(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} [1 - \widehat{G}_k(y)] \subset V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$. Затем, используя функцию $G_k(\tau)$, напишем для произвольной функции $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ разложение

$$x(\tau) = A(\tau, x) + a(\tau, x),$$

где $a(\tau, x) = x(\tau) * G_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $A(\tau, x) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ и $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, x) \subset V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$.

Далее, записав $V(\mathcal{R}_k)$ вместо $V(\mathcal{R}_k, \delta)$ или $V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$, будем подразумевать, что δ, Δ при всех $1 \leqslant k \leqslant m$ одни и те же.

Обозначим через $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ множество всех таких функций $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, для которых $\|a(\tau, x)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)} < +\infty$, где $\frac{1}{r_k} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{p_j}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ и, если $x \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, то резонансное множество $\mathcal{R}\{x, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$ функции x располагается в $V(\mathcal{R}_k)$.

Зададим в $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ норму следующим образом:

$$\|x\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)} = \|A(\tau, x)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau, x)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau, x)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}, \quad x \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1). \quad (18)$$

Теорема 3.2. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку, выполнено нерезонансное соотношение (10),*

$$d = \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k\right],$$

а окрестности $V(\mathcal{R}_k)$ выбраны так, что

$$\frac{d}{2} \leqslant \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^m V(\mathcal{R}_k)\right].$$

Тогда для любых $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *справедливо неравенство*

$$\sup_{a,b\,\in\mathbb{R}^1}\left|\int\limits_a^b\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]d\tau\right|\leqslant 2\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r}+1\right\}\prod_{k=1}^m\|\gamma_k+\Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},\quad(19)$$

где $\frac{1}{s}=\sum_{k=1}^m\frac{1}{p_k}$ *и* $\frac{1}{r}=1-\frac{1}{s}$.

Доказательство. По заданному d в зависимости от ограниченности или неограниченности множества $\mathcal{R}_k$ выберем при каждом $1\leqslant k\leqslant m$ числа δ, $\Delta>0$, построим функцию F_k или G_k соответственно и запишем для $\gamma_k\in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ и произвольной функции $\Delta\gamma_k\in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ разложения (см. теоремы 2.2 и 2.3):

$$\gamma_k(\tau)=A(\tau,\gamma_k)+a(\tau,\gamma_k),\qquad \Delta\gamma_k(\tau)=A(\tau,\Delta\gamma_k)+a(\tau,\Delta\gamma_k),$$

где $A(\tau,\gamma_k)$, $A(\tau,\Delta\gamma_k)$, $a(\tau,\gamma_k)$, $a(\tau,\Delta\gamma_k)\in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $a(\tau,\gamma_k)$, $a(\tau,\Delta\gamma_k)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{r_k}=1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^m\frac{1}{p_j}$ и $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\gamma_k)$, $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\Delta\gamma_k)\subset V(\mathcal{R}_k)$, $1\leqslant k\leqslant m$. Тогда в силу линейности операторов $A(\tau,\,\cdot\,)$ и $a(\tau,\,\cdot\,)$ получаем, что $A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)$, $a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\in L^{r_k}(\mathbb{R}^1)$ и $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\subset V(\mathcal{R}_k)$, $1\leqslant k\leqslant m$.

Так как выполняется

$$\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]=\prod_{k=1}^m A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^m\left[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\alpha}}^m A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\right]a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)+\ldots+\prod_{k=1}^m a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]\,d\tau\right|\leqslant\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^m A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^m\left|\int\limits_0^t\left[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\alpha}}^m A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\right]a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|+\ldots+\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^m a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|,$$

то, рассуждая как и при оценке каждого слагаемого из правой части (13), получим

$$\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^m[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]d\tau\right|\leqslant\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r}+1\right\}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^m\left\{\|A(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}+\|a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}+\|a(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}\right\},\quad(20)$$

откуда с учетом обозначения (18) следует (19). □

Замечание 3.3. Неравенство (19) можно рассматривать в качестве дополнения к неравенству Гёльдера.

Теперь в завершение параграфа дадим оценку интеграла при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^1$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^1$ измеримо по Лебегу, $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_{m-1} \in (1, +\infty]$, $p_m = \infty$, удовлетворяют условию (2) или, что равносильно, условию

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_{m-1}} < 1, \tag{21}$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_{m-1} \in L^{p_{m-1}}(\mathbb{R}^1)$, $\gamma_m = \xi_D \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$, где ξ_D — характеристическая функция множества D. Для этих функций $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ и показателей $p_1, \ldots, p_m$ построим соответствующие множества $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Отметим при этом, что $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}\{\xi_D, L^{s_m}(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{mes} D = \infty$. Действительно, так как

$$\frac{1}{s_m} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p_j} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_m} = 1 - \frac{1}{s_m},$$

то $r_m \in [1, +\infty)$. По теореме 2.1 для выполнения условия $\mathcal{R}_m = \varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\xi_D(\tau)|^{r_m} d\tau < +\infty,$$

а это возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{mes} D < +\infty$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{D \cap [0,t]} \prod_{k=1}^{m-1} \gamma_k(\tau) d\tau = \int\limits_0^t \left[\prod_{k=1}^{m-1} \gamma_k(\tau)\right] \xi_D(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

где по определению при $m = 2$ будем полагать

$$\int\limits_{D \cap [0,t]} \prod_{k=1}^{m-1} \gamma_k(\tau) d\tau = \int\limits_{D \cap [0,t]} \gamma_1(\tau) d\tau.$$

Из (18) и (20) очевидным образом получаем нижеследующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_{m-1} \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (21); $D \subset \mathbb{R}^1$, $\operatorname{mes} D = +\infty$, функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\ldots$, $\gamma_{m-1} \in L^{p_{m-1}}(\mathbb{R}^1)$, $\gamma_m = \xi_D \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ имеют непустые резонансные множества $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и не более одного из них содержит бесконечную точку. Тогда, если выполнено нерезонансное соотношение (10), $d = \operatorname{dist}[0, \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k]$, а $V(\mathcal{R}_k)$ — окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, выбраны так, что $\frac{1}{2} d \leqslant \operatorname{dist}[0, \sum_{k=1}^m V(\mathcal{R}_k)]$, то при любом $t \in \mathbb{R}^1$*

$$\Bigg|\int\limits_{D \cap [0,t]} \prod_{k=1}^{m-1} \gamma_k(\tau) d\tau\Bigg| \leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\} \left\{\prod_{k=1}^{m-1} \|\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)}\right\} \|\xi_D\|_{L^{p_m}_{a_m}(\mathbb{R}^1)}.$$

Автор выражает глубокую признательность профессору Н. А. Широкову за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. I // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 436–447.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 31 декабря 2016 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Иванов Борис Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент; ivanov-bf@yandex.ru

ON SOME ADDITION TO THE HÖLDER INEQUALITY. II

Boris F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
Higher School of Technology and Energy,
ul. Ivana Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation; ivanov-bf@yandex.ru

If $m \geqslant 2$, numbers $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ satisfy inequality

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

and functions $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. We prove that if the set of "resonance" points of each of these functions is not empty and the "non-resonance" condition holds (both concepts have been defined by the author for functions from $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$), then

$$\sup_{a,b \in R^1} \left| \int_a^b \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},$$

where constant $C > 0$ is independent of functions $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ and $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ are specially constructed normed spaces.

Besides, we give a boundedness condition for integral of product of functions over a subset of $\mathbb{R}^1$. Refs 3.

Keywords: the Hölder inequality.

References

1. Ivanov B. F., "On some addition to the Hölder inequality. I", *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4(62)**, issue 3, 436–447 (2017) [in Russian].
2. Bourbaki N., *Integration. Measures, integrations of measures.* (Nauka Publ., Moscow, 1967) [in Russian].
3. Vladimirov V. S., *Generalized functions in mathematical physics* (Nauka Publ., Moscow, 1979) [in Russian].

Для цитирования: *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. II // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 586–596. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.407

For citation: Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. II. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 586–596.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.407