УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 39A30, 93D05

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ВЫХОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ*

И. Е. Зубер, А. Х. Гелиг

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается система $\dot{x}_i = \varphi_i(\cdot) + x_{i+2}$, $i \in \overline{1, n-2}$, $\dot{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}(\cdot) + u_1$, $\dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_2$, где $\varphi_i(\cdot)$ — произвольные неупреждающие функционалы, обладающие свойством $|\varphi_i(\cdot)| \leq c\sum_{k=1}^{i} |x_k(t)|$, $i \in \overline{1, n}$, $c = \text{const}$, а u_1 и u_2 — управления. Предполагается, что доступны измерению лишь выходы x_1 и x_2.

Решается задача синтеза как непрерывных, так и импульсных управлений u_1 и u_2, при которых система становится глобально асимптотически устойчивой. Решение задачи основано на построении уравнений наблюдателя, квадратичной функции Ляпунова и методе усреднения. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: стабилизация неопределенных систем, стабилизация по выходу, глобальная экспоненциальная стабилизация, импульсные системы.

1. Введение. Стабилизации неопределенных систем, у которых наблюдается весь вектор состояния, посвящено много работ, в том числе и авторов этой статьи. Стабилизация непрерывных неопределенных систем по скалярному выходу с помощью построения наблюдателя рассматривалась в статьях [1–5]. В [1] синтез стабилизирующего управления осуществлялся с помощью решения линейных матричных неравенств. В [2] рассматривались системы, у которых неопределенными являются не сами матрицы системы, а лишь их вариации. В [3–5] были синтезированы аналитические стабилизирующие управления по выходу систем, у которых неопределенными являются элементы, расположенные ниже первой наддиагонали, а элементы этой наддиагонали являются единичными. В предлагаемой статье с помощью построения наблюдателя и функции Ляпунова методом backstepping произведен аналитический синтез стабилизирующего управления по двумерному выходу неопределенных непрерывных и импульсных систем, у которых единичными являются элементы второй наддиагонали.

2. Стабилизация непрерывной системы. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \varphi_i(\cdot) + x_{i+2}, \quad i \in \overline{1, n-2}, \tag{1}$$

$$\dot{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}(\cdot) + u_1, \qquad \dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_2,$$

где $\varphi_i(\cdot)$ — произвольные неупреждающие функционалы, обладающие свойством

$$|\varphi_i(\cdot)| \leq c\sum_{k=1}^{i} |x_k(t)|, \quad i \in \overline{1, n}, \quad c = \text{const}, \tag{2}$$

а u_1 и u_2 — управления. Предполагается, что выполнены условия теоремы существования и продолжимости на $[0, +\infty]$ любого решения, остающегося в ограниченной

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (тема 6.38.230.2015) и РФФИ (грант № 17-01-00102а).

области. Ставится задача синтеза управлений u_1 и u_2, при которых система (1) становится глобально экспоненциально устойчивой в ситуации, когда доступны измерению лишь x_1 и x_2 (выходы системы).

Поставленная задача будет решаться с помощью построения наблюдателя и квадратичной функции Ляпунова методом backstepping.

Сначала построим гурвицеву матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покажем, как выбрать a_i, при которых A является гурвицевой матрицей. Обозначим через A_0 матрицу, получающуюся из A при $a_1 = 1$, $a_i = 0$ $(i > 1)$. Прибавим к первому столбцу матрицы A_0 столбец s. Полученная матрица имеет вид $A_0 + se_1^*$, где $e_1^* = (1, 0, \cdots, 0)$. Гурвицевость этой матрицы равносильна гурвицевости $A_0^* + e_1 s^*$ ($*$ — знак транспонирования, все величины вещественные). Известно [6], что если пара (A_0^*, e_1) управляема, то при любых числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличных от собственных чисел матрицы A_0^*, матрица $A_0^* + e_1 s^*$ имеет спектр $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, если s определяется из системы

$$s^*(A_0^* - \lambda_i I)^{-1} e_1 = -1 \quad (i \in \overline{1, n}),$$

где I — единичная матрица $n \times n$. Поскольку все элементы матрицы A_0^* принимают значения 0 либо 1, то, согласно кругам Гершгорина [7], ее собственные числа μ_i принадлежат области $|\mu_i| \le n$. Поэтому положим $\lambda_i = -(n+1) - i$ $(i \in \overline{1, n})$ и убедимся, что выполняется

$$\Delta_n = \det(e_1, A_0^* e_1, \ldots, (A_0^*)^{n-1} e_1) \ne 0.$$

Все элементы Δ_n принимают значения 0 либо 1. При этом структура определителя Δ_n такова, что если первый столбец вычесть из остальных, затем второй столбец вычесть из остальных, третий столбец вычесть из остальных и так далее, то получается определитель, у которого в каждом столбце и в каждой строке имеется лишь один отличный от нуля элемент, и этот элемент равен 1. Поэтому $|\Delta_n| = 1$.

Обозначим через $\hat{x}_i$ $(i \in \overline{1, n})$ координаты наблюдателя и введем ошибки наблюдения

$$\varepsilon_i(t) = \frac{x_i(t) - \hat{x}_i(t)}{\lambda^{q_i}}, \quad i \in \overline{1, n},\ \lambda \gg 1, \tag{3}$$

$$q_{2k-1} = q_{2k} = k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Легко убедиться, что вектор $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t))^*$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = \lambda A \varepsilon + d + z, \tag{5}$$

где $d = (d_1, \ldots, d_n)^*, z = (z_1, \ldots, z_n)^*$ и

$$d_i = -\lambda a_i x_1, \quad z_i = \frac{\varphi_i(\cdot)}{\lambda^{q_i}}, \tag{6}$$

если координаты наблюдателя определяются системой

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \lambda^{q_i+1} a_i \hat{x}_1 + \hat{x}_{i+2} \quad (i = 1, \dots, n-2), \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \lambda^{q_{n-1}+1} a_{n-1} \hat{x}_1 + \lambda^{q_{n-1}+1} \hat{x}_2 + u_1 - \lambda^{q_{n-1}+1} x_2, \\ \dot{\hat{x}}_n = \lambda^{q_n+1} a_n \hat{x}_1 + \lambda^{q_n+1} \hat{x}_2 + u_2 - \lambda^{q_n+1} x_2. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V_0 = \varepsilon^* H \varepsilon$, в которой положительно определенная матрица H удовлетворяет уравнению $A^* H + HA = -\varkappa I$, где $\varkappa > 0$. Производная $\dot{V}_0$, взятая в силу системы (5), имеет вид

$$\dot{V}_0 = -\lambda\varkappa|\varepsilon|^2 + m_1 + m_2, \tag{8}$$

где $m_1 = d^* H\varepsilon + \varepsilon^* H d, m_2 = z^* H\varepsilon + \varepsilon^* H z, |\varepsilon|$ — евклидова норма. Ввиду (6) справедливы оценки

$$|m_1| \le 0.5\lambda|\varepsilon|^2 + 0.5\lambda\varkappa_1 x_1^2, \tag{9}$$

$$|m_2| \le \varkappa_2|\varepsilon|^2 + |z|^2. \tag{10}$$

Здесь и далее $\varkappa$ с индексами — абсолютные константы, не зависящие от λ. Оценим $|z|^2$. Ввиду (6) и (2) справедливы соотношения

$$|z| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{|\varphi_i(\cdot)|}{\lambda^{q_i}} \le c|x_1| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{q_i}} + c|x_2| \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\lambda^{q_i}} + c|x_3| \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{\lambda^{q_i}} + \dots + c|x_n| \frac{1}{\lambda^{q_i}}.$$

Поскольку в силу (3) имеем $x_i = \lambda^{q_i}\varepsilon_i + \hat{x}_i$, то правая часть последнего неравенства мажорируется выражением

$$nc|x_1| + \varkappa_3|\varepsilon| + \varkappa_4|\hat{x}_2| + \sum_{k=3}^{n} \frac{|\hat{x}_k|}{\lambda^{q_k}}.$$

Отсюда следует оценка $|z|^2 \le \varkappa_5 x_1^2 + \varkappa_6|\varepsilon|^2 + R$, где

$$R = \varkappa_7 \hat{x}_2^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{\hat{x}_k^2}{\lambda^{2q_k}}. \tag{11}$$

Поэтому согласно (10) справедливо неравенство $|m_2| \le \varkappa_8|\varepsilon|^2 + \varkappa_5 x_1^2 + R$, из которого в силу соотношений (8), (9) вытекает оценка

$$\dot{V}_0 \le -\lambda\beta_0|\varepsilon|^2 + \varkappa_9\lambda x_1^2 + R, \tag{12}$$

в которой β_0 является линейной функцией от $\varkappa$.

Пусть p — максимальное нечетное число, не превосходящее n и $m = 0.5(p+1)$. Введем переменные

$$\xi_1 = x_1, \qquad \xi_i = \hat{x}_{2i-1} + \beta_{i-1}\lambda\xi_{i-1} \quad \text{при } 1 < i \le m, \tag{13}$$

$$\xi_{m+l} = \lambda^{q_p+1}\hat{x}_{2l} + \lambda\beta_{m+l-1}\xi_{m+l-1} \quad \text{при } l \in \overline{1, n-m}, \tag{14}$$

и построим последовательность функций Ляпунова

$$V_k = V_{k-1} + \frac{\xi_k^2}{2\lambda^{2(k-1)}}, \quad k \in \overline{1, n}. \tag{15}$$

Очевидно, что $\dot V_1 = \dot V_0 + \xi_1\dot\xi_1$. Ввиду (1), (3), (13) справедливы соотношения

$$\dot\xi_1 = \varphi_1 + \lambda\varepsilon_3 + \hat x_3 = \varphi_1 + \lambda\varepsilon_3 + \xi_2 - \lambda\beta_1\xi_1. \tag{16}$$

Отсюда в силу (2) вытекает оценка $\xi_1\dot\xi_1 \le c\xi_1^2 + \lambda\xi_1\varepsilon_3 + \xi_1\xi_2 - \lambda\beta_1\xi_1^2$. Имея ввиду $\xi_1\xi_2 \le \lambda\xi_1^2 + \xi_2^2/\lambda$, приходим к неравенству

$$\xi_1\dot\xi_1 \le (c + 2\lambda - \lambda\beta_1)\xi_1^2 + \lambda\varepsilon_3^2 + \frac{\xi_1^2}{\lambda}.$$

Отсюда и из (12) следует оценка

$$\dot V_1 \le -\lambda(\beta_0 - 1)|\varepsilon|^2 - \lambda(\beta_1 - \varkappa_{1,1})\xi_1^2 + \frac{\xi_2^2}{\lambda} + R, \tag{17}$$

где $\varkappa_{1,1}$ не зависит от β_1. Согласно (15) справедливо равенство

$$\dot V_2 = \dot V_1 + \frac{\xi_2\dot\xi_2}{\lambda^2}. \tag{18}$$

Из (13) и (7) вытекают соотношения

$$\dot\xi_2 = \dot{\hat x}_3 + \lambda\beta_1\dot\xi_1 = \lambda^2 a_3\hat x_1 + \hat x_5 + \lambda\beta_1\dot\xi_1.$$

Подставляя сюда величину (16) и вытекающее из (13) выражение $\hat x_5 = \xi_3 - \beta_2\lambda\xi_2$, получаем формулу

$$\dot\xi_2 = \xi_3 - \lambda(\beta_2 - \beta_1)\xi_2 + \lambda^2\psi_2, \tag{19}$$

где $\psi_2 = \beta_1(\varphi_1/\lambda + \varepsilon_3 - \beta_1\xi_1) + a_3\hat x_1$. Поскольку $\hat x_1 = \xi_1 - \varepsilon_1$, то ψ_2 — линейная форма относительно $\varphi_1/\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_1$. Из (19) следует равенство

$$\frac{\xi_2\dot\xi_2}{\lambda^2} = \frac{\xi_2\xi_3}{\lambda^2} - \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{\lambda}\xi_2^2 + \xi_2\psi_2.$$

Учитывая неравенства $\xi_2\xi_3 \le \xi_2^2\lambda + \xi_3^2/\lambda, \xi_2\psi_2 \le \psi_2^2\lambda + \xi_2^2/\lambda$ и $\psi_2^2 \le \varkappa_{10}(\xi_1^2 + |\varepsilon|^2)$, из (17), (18) получаем оценку

$$\dot V_2 \le -(\beta_0 - \varkappa_{0,2})\lambda|\varepsilon|^2 - \lambda(\beta_1 - \varkappa_{1,2})\xi_1^2 - \frac{(\beta_2 - \varkappa_{2,2})\xi_2^2}{\lambda} + \frac{\xi_3^2}{\lambda^3} + R, \tag{20}$$

где $\varkappa_{2,2}$ не зависит от β_2. Применим метод математической индукции.

Предположим, что, продолжая этот процесс, мы пришли к неравенству

$$\dot V_{n-2} \le -(\beta_0 - \varkappa_{0,n-2})\lambda|\varepsilon|^2 - \lambda(\beta_1 - \varkappa_{1,n-2})\xi_1^2 - \sum_{i=1}^{n-3}\frac{(\beta_{i+1} - \varkappa_{i+1,n-2})}{\lambda^{2i-1}}\xi_{i+1}^2 + \frac{\xi_{n-1}^2}{\lambda^{2n-5}} + R. \tag{21}$$

При этом можем записать

$$\dot\xi_{n-2} = \xi_{n-1} - \lambda(\beta_{n-2} - \beta_{n-3})\xi_{n-2} + \lambda^{n-2}\psi_{n-2}, \tag{22}$$

где $\psi_{n-2}(\varphi_1/\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_1, \xi_2/\lambda, \ldots, \xi_{n-1}/\lambda^{n-2})$ — линейная форма своих аргументов.

Вернемся к уравнениям (7). Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

В случае четного n выберем управления u_1 и u_2 следующим образом:

$$u_1 = \lambda^{q_{n-1}+1} x_2, \qquad u_2 = \lambda^{q_n+1} x_2 + u. \tag{23}$$

При этом последние два уравнения в (7) примут вид

$$\dot{\hat{x}}_{n-1} = \lambda^{q_{n-1}+1} a_{n-1} \hat{x}_1 + \lambda^{q_{n-1}+1} \hat{x}_2, \tag{24}$$

$$\dot{\hat{x}}_n = \lambda^{q_n+1} a_n \hat{x}_1 + \lambda^{q_n+1} \hat{x}_2 + u. \tag{25}$$

Согласно (15) имеем представления

$$V_{n-1} = V_{n-2} + \frac{\xi_{n-1}^2}{2\lambda^{2(n-2)}}, \qquad \dot{V}_{n-1} = \dot{V}_{n-2} + \frac{\xi_{n-1}\dot{\xi}_{n-1}}{\lambda^{2n-4}}. \tag{26}$$

Учитывая $p = n-1, m = 0.5n$, из (14) при $l = n - m + 1$ получаем выражение

$$\xi_{n-1} = \lambda^{q_{n-1}+1} \hat{x}_{n-2} + \lambda \beta_{n-2} \xi_{n-2}.$$

Отсюда в силу (7) вытекает равенство

$$\dot{\xi}_{n-1} = \lambda^{q_{n-1}+1} (\lambda^{q_{n-2}+1} a_{n-2} \hat{x}_1 + \hat{x}_n) + \lambda \beta_{n-2} \dot{\xi}_{n-2}. \tag{27}$$

Имея ввиду $q_{n-1} + q_{n-2} + 2 = n-1, p = n-1$, и (14), запишем $\hat{x}_n = \lambda^{-q_p-1}\xi_n - \lambda^{-q_p}\beta_{n-1}\xi_{n-1}$, тогда соотношение (27) в силу (22) принимает следующий вид

$$\dot{\xi}_{n-1} = \xi_n - \lambda(\beta_{n-1} - \beta_{n-2})\xi_{n-1} + \lambda^{n-1}\psi_{n-1}, \tag{28}$$

где $\psi_{n-1} = \lambda^{-(n-1)}\big[(\beta_{n-3} - \beta_{n-2})\lambda^2\beta_{n-2}\xi_{n-2} + \lambda^{n-1}\beta_{n-2}\psi_{n-2} + a_{n-2}\hat{x}_1\big]$. Очевидно, что ψ_{n-1} является линейной формой относительно $\varphi_1/\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_1, \xi_2/\lambda, \ldots, \xi_{n-2}/\lambda^{n-1}$. Из (26) вытекает равенство

$$\frac{\xi_{n-1}\dot{\xi}_{n-1}}{\lambda^{2n-4}} = \frac{\xi_{n-1}\xi_n}{\lambda^{2n-4}} - \frac{(\beta_{n-1} - \beta_{n-2})\xi_{n-1}^2}{\lambda^{2n-5}} + \frac{\psi_{n-1}\xi_{n-1}}{\lambda^{n-3}}. \tag{29}$$

Очевидны оценки:

$$\frac{\xi_{n-1}\xi_n}{\lambda^{2n-4}} \le \frac{\xi_{n-1}^2}{\lambda^{2n-5}} + \frac{\xi_n^2}{\lambda^{2n-3}}, \qquad \frac{\psi_{n-1}\xi_{n-1}}{\lambda^{n-3}} \le \frac{\xi_{n-1}^2}{\lambda^{2n-5}} + \lambda\psi_{n-1}^2. \tag{30}$$

Выражение $\lambda\psi_{n-1}^2$ является линейной формой относительно $\varphi_1^2/\lambda, \lambda\varepsilon_1^2, \lambda\varepsilon_2^2, \xi_2^2/\lambda, \ldots, \xi_{n-2}^2/\lambda^{2n-3}$ и поглощается отрицательными членами в (21) в том смысле, что мажорируется ими при увеличении $\varkappa_{i,n-2}$ $(i \in \overline{0, n-2})$. Из (21), (26), (29), (30) вытекает оценка

$$\dot{V}_{n-1} \le W + \frac{\xi_n^2}{\lambda^{2n-3}} + R, \tag{31}$$

где

$$W = -(\beta_0 - \varkappa_{0,n-1})\lambda|\varepsilon|^2 - \lambda(\beta_1 - \varkappa_{1,n-1})\xi_1^2 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(\beta_{i+1} - \varkappa_{i+1,n-1})}{\lambda^{2i-1}}\xi_{i+1}^2.$$

Возьмем функции Ляпунова

$$V_n = V_{n-1} + \frac{\xi_n^2}{2\lambda^{2(n-1)}}. \tag{32}$$

Тогда будем иметь

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + \frac{\xi_n \dot{\xi}_n}{\lambda^{2(n-1)}}. \tag{33}$$

Из (14) следует представление $\xi_n = \lambda^{q_{n-1}+1} x_n + \lambda \beta_{n-1} \xi_{n-1}$. Отсюда ввиду (25) вытекает равенство

$$\dot{\xi}_n = \lambda^{q_{n-1}+1} (\lambda^{q_n+1} a_n \hat{x}_1 + \lambda^{q_{n-1}+1} \hat{x}_2 + u) + \lambda \beta_{n-1} \dot{\xi}_{n-1}. \tag{34}$$

В силу (28) $\dot{\xi}_{n-1}$ является линейной формой относительно $\varphi_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_1, \ldots, \xi_n$ с зависящими от λ коэффициентами.

Добавив к $\dot{V}_{n-1}$ в формуле (33) выражение $\xi_n^2 - \xi_n^2$, приходим к неравенству

$$\dot{V}_n \leq W_1(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_n) + (\lambda^{2-3.5n} u - L_1) \xi_n + R, \tag{35}$$

где $L_1 = L_1(\varphi_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_1, \ldots, \xi_n, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — линейная форма, а W_1 — определенно отрицательная квадратичная форма.

Пусть теперь n нечетное. Определим управления u_1 и u_2 формулами

$$u_1 = \lambda^{q_{n-1}+1} x_2 + u, \qquad u_2 = \lambda^{q_n+1} x_2. \tag{36}$$

Тогда последние два уравнения в (7) примут следующий вид:

$$\dot{\hat{x}}_{n-1} = \lambda^{q_{n-1}+1} a_{n-1} \hat{x}_1 + \lambda^{q_{n-1}+1} \hat{x}_2 + u, \tag{37}$$

$$\dot{\hat{x}}_n = \lambda^{q_n+1} a_n \hat{x}_1 + \lambda^{q_n+1} \hat{x}_2. \tag{38}$$

Предположив, что $\dot{V}_{n-2}$ имеет вид (21), и представив V_{n-1} и $\dot{V}_{n-1}$ формулами (26), получим как и ранее оценку (31). Поскольку $p = n, m = 0.5(n+1)$, то из (14) при $l = n - m - 1$ следует равенство $\xi_{n-1} = \lambda^{q_n+1} \hat{x}_{n-3} + \lambda \beta_{n-2} \xi_{n-2}$. Отсюда в силу (7) вытекает представление

$$\dot{\xi}_{n-1} = \lambda^{q_n+q_{n-3}+2} a_{n-3} \hat{x}_1 + \lambda^{q_n+1} \hat{x}_{n-1} + \lambda \beta_{n-2} \dot{\xi}_{n-2}. \tag{39}$$

Из (14) следует соотношение

$$\hat{x}_{n-1} = \lambda^{-q_p-1} \xi_n - \lambda^{-q_p} \beta_{n-1} \xi_{n-1}. \tag{40}$$

Ввиду (22) и (40) выражение (39) примет вид

$$\dot{\xi}_{n-1} = \xi_n - \lambda(\beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \xi_{n-1} + \lambda^{n-1} \psi_{n-1}. \tag{41}$$

Рассуждая так же, как при четном n, приходим к оценке (31). Определив V_n формулой (32), рассмотрим $\dot{\xi}_n$. Из (14) при $l = n - m$ следует соотношение

$$\xi_n = \lambda^{q_n+1} \hat{x}_{n-1} + \lambda \beta_{n-1} \xi_{n-1}.$$

Отсюда в силу (37) получаем выражение

$$\dot{\xi}_n = \lambda^n a_{n-1} \hat{x}_1 + \lambda^n \hat{x}_2 + \lambda^{q_n+1} u + \lambda \beta_{n-1} \dot{\xi}_{n-1}.$$

Подставив его в равенство (33), приходим к оценке

$$\dot{V}_n \leq W_1(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_n) + (\lambda^{2.5-1.5n} u - L_2) \xi_n + R, \tag{42}$$

где L_2 — линейная форма, аналогичная L_1.

Перейдем к оценке R. Покажем, что каждое слагаемое в R поглащается формой W_1. Рассмотрим $v_k = x_k^2/\lambda^{2q_k}$ и предположим, что k нечетное. Тогда согласно (13) справедлива оценка

$$\frac{\hat{x}_k^2}{\lambda^{2q_k}} \leq \frac{\xi^2_{\frac{k+1}{2}}}{\lambda^{2q_k}} + \frac{\beta^2_{\frac{k-1}{2}}}{\lambda^{2q_k-2}}. \tag{43}$$

Найдем в W_1 отрицательное слагаемое, соответствующее первому члену в правой части этого неравенства. Имеем $\frac{k+1}{2} = i+1, i = \frac{k-1}{2}$. Показатель степени у λ в знаменателе отрицательного слагаемого равен $2i-1 = k-2$. Поскольку в силу (4) имеем $2q_k = k-1$, то первое слагаемое в правой части неравенства (43) поглощается формой W_1. Рассуждая аналогичным образом, легко убедиться, что и второе слагаемое в (43) поглощается формой W_1.

Для четного k рассуждения проводятся по этой же схеме, но вместо (13) используется соотношение (14).

Поэтому в (35) и (42) можно положить $R = 0$. Определив управление u в (35) и (42) соответственно формулами

$$u = \lambda^{3.5n-2} L_1, \tag{44}$$

$$u = \lambda^{1.5n-2.5} L_2, \tag{45}$$

убеждаемся, что система становится глобально экспоненциально устойчивой, поскольку имеет положительно определенную квадратичную функцию Ляпунова, производная которой, взятая в силу системы, является отрицательно определенной квадратичной формой.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (2)*, уравнения наблюдателя имеют вид* (7)*, и управления u_1 и u_2 определяются формулами* (23), (44) *при четном n и формулами* (36), (45) *при нечетном n. Тогда при достаточно большом λ замкнутая система* (1) *становится глобально экспоненциально устойчивой.*

3. Стабилизация импульсной системы. Предположим, что в системе (1) выполняется

$$\varphi_i(\cdot) = a_{i,1}(\cdot)x_1 + \ldots + a_{i,i}(\cdot)x_i, \tag{46}$$

где $a_{i,j}(\cdot)$ — неупреждающие функционалы, обладающие свойством

$$\sup_{(\cdot)} |a_{i,j}(\cdot)| \leq c, \tag{47}$$

а управление u определяется вместо соотношений (44), (45) формулами

$$u = \mathfrak{M} v_1, \qquad v_1 = \varphi^{-1}(\lambda^{3.5n-2} L_1), \tag{48}$$

$$u = \mathfrak{M} v_2, \qquad v_2 = \varphi^{-1}(\lambda^{1.5n-2.5} L_2), \tag{49}$$

где φ^{-1} — обратная функция от определенной ниже функции φ, а $\mathfrak{M}$ — оператор, который каждую непрерывную на $[t_0, +\infty)$ функцию $\zeta(t)$ отображает в последовательность $\{t_k\}$ и функцию $\eta(t)$, обладающие свойствами: $\delta T \leq t_{k+1} - t_k \leq T$, $\delta \in (0,1)$, $T > 0$, функция $\eta(t)$ не зависит от значений $\zeta(\tau)$ при $\tau > t$ и на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$ является кусочно-непрерывной функцией, не меняющей знака. Предполагается, что существует «эквивалентная нелинейность» [8] — такая непрерывная монотонно возрастающая функция $\varphi(\zeta)\int(\varphi(0) = 0)$, что при всех k существует $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1})$, при котором среднее значение k-го импульса

$$v_k = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \eta(t)dt$$

связано с $\zeta(\tilde{t}_k)$ соотношением $v_k = \varphi(\zeta(\tilde{t}_k))$. Предполагается, что

$$\varphi(\zeta) \to +\infty(-\infty) \quad \text{при} \quad \zeta \to +\infty(-\infty). \tag{50}$$

С помощью развитого в [9] метода усреднения легко получить следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (46), (47), (50), *уравнения наблюдателя имеют вид* (7), *а управления* u_1 *и* u_2 *определяются формулами* (23), (48) *при четном* n *и формулами* (36), (49) *при нечетном* n. *Тогда при достаточно большом* λ *и достаточно малом* T *замкнутая система* (1) *глобально асимптотически устойчива.*

Замечание. Если ограничения (2) и (47) выполнены не во всем фазовом пространстве, а лишь при $|x| < \varkappa_+$, то из доказательства теорем 1 и 2 следует, что построенные управления стабилизируют систему не глобально, а лишь при начальных условиях, принадлежащих некоторой ограниченной области, которые легко определяются с помощью построенной квадратичной функции Ляпунова.

Литература

1. *Cai X., Lu G., Zhang W.* Stabilization for a class of uncertain systems based on interval observers // IET Control Theory and Application. 2012. Vol. 6, issue 13. P. 2057–2062. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0493

2. *Chen W.-H., Yong W., Lie X.* Impulsive observer-based stabilization of uncertain linear systems // IET Control Theory and Application. 2014. Vol. 8, issue 3. P. 149–159. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0998

3. *Jia R., Qian C., Zhai J.* Semi-global stabilisation of uncertain non-linear systems by homogeneous output feedback controllers // IET Control Theory and Application. 2012. Vol. 6, issue 1. P. 165–172. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2010.0503

4. *Zhai J., Li W., Fei Sh.* Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory and Application. 2013. Vol. 7, issue 2. P. 305–313. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0505

5. *Man Y., Liu Y.* Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems // Systems and Control Letters. 2016. Vol. 90. P. 20–30. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.09.014

6. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. In: Series on Stability, Vibration and Control of Systems, Series A. Vol. 14. London: World Scientific. 2004. 334 p.

7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 520 с.

8. *Gelig A. Kh., Churilov A. N.* Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Boston: Birkhäuser, 1998. 362 p.

9. *Гелиг А. Х., Зубер И. Е.* Стабилизация некоторых классов неопределенных систем с помощью прямого и непрямого управления. II. Импульсные и дискретные системы // Автомат. и телемех. 2012. № 9. С. 72–87.

Статья поступила в редакцию 16 марта 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Зубер Ирина Ефремовна — zuber.yanikum@gmail.com

Гелиг Аркадий Хаимович — профессор; agelig@yandex.ru

STABILIZATION BY OUTPUT CONTINUOUS AND PULSE-MODULATED UNCERTAIN SYSTEMS

Irina E. Zuber, Arkadiy Kh. Gelig

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; zuber.yanikum@gmail.com, agelig@yandex.ru

The system $\dot{x}_i = \varphi_i(\cdot) + x_{i+2}$, $i \in \overline{1, n-2}$, $\dot{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}(\cdot) + u_1$, $\dot{x}_n = \varphi_n(\cdot) + u_2$, where $\varphi_i(\cdot)$ are nonanticipating functionals of arbitrary nature with following properties $|\varphi_i(\cdot)| \le c\sum_{k=1}^{i} |x_k(t)|$, $i \in \overline{1, n}$, $c = \text{const}$, and u_1 and u_2 are stabilization, is considered.

It is supposed that only outputs x_1 and x_2 are measurable.

The problem of both continuous and impulsive stabilizations such u_1, and u_2 that make the system globally asymptotically stable is considered.

The solution of this problem is based on constructing observed-based equations and quadratic Lyapunov function, and averaging method. Refs 9.

Keywords: uncertain systems stabilization, stabilization by output, global exponential stability, pulse-modulated systems.

References

1. Cai X., Lu G., Zhang W., "Stabilization for a class of uncertain systems based on interval observers", *IET Control Theory and Application* **6**, issue 13, 2057–2062 (2012). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0493

2. Chen W.-H., Yong W., Lie X., "Impulsive observer-based stabilization of uncertain linear systems", *IET Control Theory and Application* **8**, issue 3, 149–159 (2014). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0998

3. Jia R., Qian C., Zhai J., "Semi-global stabilisation of uncertain non-linear systems by homogeneous output feedback controllers", *IET Control Theory and Application* **6**, issue 1, 165–172 (2012). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2010.0503

4. Zhai J., Li W., Fei Sh., "Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems", *IET Control Theory and Application* **7**, issue 2, 305–313 (2013). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0505

5. Man Y., Liu Y., "Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems", *Systems and Control Letters* **90**, 20–30 (2016). https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.09.014

6. Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh., *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities.* In *Series on Stability, Vibration and Control of Systems, Series A* **14** (World Scientific, London, 2004, 334 p.).

7. Gantmacher F. R., The theory of matrices (New York, Chelsea Publishing Co, 1959).

8. Gelig A. Kh., Churilov A. N., *Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems* (Birkhäuser, Boston, 1998, 362 p.).

9. Gelig A. Kh., Zuber I. E., "Using the direct and indirect control to stabilize some classes of uncertain systems. II. Pulse and discrete systems", *Autom. Remote Control* **73**, issue 9, 1498–1510 (2012). https://doi.org/10.1134/S0005117912090056

Для цитирования: *Зубер И. Е., Гелиг А. Х.* Стабилизация по выходу непрерывных и импульсных неопределенных систем // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 577–585. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.405

For citation: Zuber I. E., Gelig A. Kh. Stabilization by output continuous and pulse-modulated uncertain systems. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 577–585. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.405