УДК 517.51, 517.98 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 47H10, 54C30, 54H25

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПО СИМУЛИРУЮЩИМ ФУНКЦИЯМ*

Д. Доличанин-Джекич

Университет Приштины,
Сербия, 38220, Косовская Митровица, Князя Милоша, 7

В данной статье рассматриваются, обсуждаются и развиваются некоторые недавние результаты, полученные рядом авторов в области симулирующих функций. С использованием одной леммы, опубликованной С. Раденовичем с соавторами (S. Radenović et al., 2012), в статье предлагаются значительно более короткие и красивые доказательства ряда утверждений, чем имеющиеся в литературе. Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: симулирующая функция, $\mathcal{Z}$-сужение, точка совпадения, общая неподвижная точка, слабая совместимость.

Введение. В работе [1] предложен новый подход к изучению неподвижных точек в рамках метрических пространств. Конкретно, введено понятие симулирующей функции следующим образом.

Отображение $\zeta : [0, +\infty)^2 \to [0, +\infty)$ называется *симулирующей функцией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(ζ_1) $\zeta(0, 0) = 0$;

(ζ_2) $\zeta(t, s) < s - t$ для всех $t, s > 0$;

(ζ_3) если $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ являются последовательностями на $(0, +\infty)$, такими что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \zeta(t_n, s_n) < 0$.

Важно отметить, что некоторые авторы (см., например, [2]) несколько изменили приведенное выше определение, удалив условие (ζ_1). (По поводу других подробностей см. [2] и [3].) Также авторы работы [4] изменили условие (ζ_3), взяв $t_n < s_n$. Следовательно, мы можем утверждать, что отображение $\zeta : [0, +\infty)^2 \to [0, +\infty)$ называется *симулирующей функцией*, если оно удовлетворяет условиям:

(ζ_2) $\zeta(t, s) < s - t$ для всех $t, s > 0$;

(ζ_3) если $\{t_n\}, \{s_n\}$ являются последовательностями в $(0, +\infty)$, такими что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$ и $t_n < s_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \zeta(t_n, s_n) < 0.$$

В работе [1] авторы обозначают множество всех симулирующих функций как $\mathcal{Z}$.

Приведем некоторые примеры симулирующих функций:

a) [1] $\zeta(t, s) = \psi(s) - \phi(t)$ для всех $t, s \in [0, \infty)$, где $\phi, \psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — две непрерывные функции, такие что $\psi(t) = \phi(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$ и $\psi(t) < t \le \phi(t)$ для всех $t > 0$;

b) [6] $\zeta(t, s) = s - \dfrac{f(t, s)}{g(t, s)} t$ для всех $t, s \in [0, \infty)$, где $f, g : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ — две непрерывные по всем переменным функции, такие что $f(s, t) > g(t, s)$ для всех $t, s > 0$;

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00769-а).

c) [6] если $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ — такая функция, что $\overline{\lim}_{t \to r^+} \varphi(t) < 1$ для всех $r > 0$, то определим $\zeta(t, s) = s\varphi(s) - t$ для всех $s, t \in [0, \infty)$, тогда ζ является симулирующей функцией.

Другие примеры симулирующих функций можно найти в [1–8].

Далее авторы работы [1] ввели следующее понятие.

Определение 1.1. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $\zeta \in \mathcal{Z}$. Тогда отображение $T : X \to X$ называется *$\mathcal{Z}$-сужением* относительно ζ, если выполняется следующее условие:

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0 \text{ для всех } x, y \in X. \tag{1.1}$$

В соответствии с предыдущими определениями ясно, что $\zeta(t, t) < 0$, когда $t > 0$. Далее из (1.1) следует, что $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, когда $x \neq y$ для всех $x, y \in X$. Это означает, что каждое $\mathcal{Z}$-сужение относительно ζ непрерывно.

В работе [1] получен следующий основной результат.

Теорема 1.2 ([1, теорема 2.8]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, и $T : X \to X$ является $\mathcal{Z}$-сужением относительно ζ. Тогда T имеет единственную неподвижную точку в X и для любого $x_0 \in X$ последовательность Пикара $\{x_n\}$, где $x_n = Tx_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, сходится к неподвижной точке T.*

Для доказательства теоремы 1.2 авторы работы [1] использовали следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1.3 ([1, лемма 2.5]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, и $T : X \to X$ является $\mathcal{Z}$-сужением относительно $\zeta \in \mathcal{Z}$. Тогда неподвижная точка T в X является единственной, если она существует.*

Лемма 1.4 ([1, лемма 2.6]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, и $T : X \to X$ является $\mathcal{Z}$-сужением относительно $\zeta \in \mathcal{Z}$. Тогда T является асимптотически регулярным при любом $x \in X$ (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) = 0$).*

Лемма 1.5 ([1, лемма 2.7]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, и $T : X \to X$ является $\mathcal{Z}$-сужением относительно $\zeta \in \mathcal{Z}$. Тогда последовательность Пикара $\{x_n\}$, порожденная T с начальным значением $x_0 \in X$, является ограниченной последовательностью, где $x_n = Tx_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Основные результаты. В данной статье рассматриваются, развиваются и совершенствуются некоторые недавние результаты, полученные рядом авторов в области симулирующих функций. Используя лемму, доказанную в [9], мы получаем значительно более короткие и красивые доказательства, чем имеющиеся в литературе. В работах [9–12] была доказана и использована в процессе доказательства ряда результатов, относящихся к неподвижной точке, следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть (X, d) является метрическим пространством и $\{x_n\}$ — последовательность в X такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Если $\{x_n\}$ не является последовательностью Коши в (X, d), тогда существует $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{m(k)\}$ и $\{n(k)\}$ положительных целых чисел, таких что $n(k) > m(k) > k$, и следующие последовательности стремятся к ε^+ при $k \to \infty$:

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}), \quad d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}),$$
$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)+1}), \quad d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}).$$

Используя лемму 2.1, мы получаем следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, и $T : X \to X$ является $\mathcal{Z}$-сужением относительно ζ. Тогда последовательность Пикара $\{x_n\}$, порожденная T с начальным значением $x_0 \in X$, является последовательностью Коши, где $x_n = Tx_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. На основании леммы 1.4 для последовательности Пикара $\{x_n\}$, где $x_n = Tx_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Если $\{x_n\}$ не является последовательностью Коши в (X, d), тогда существует $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{m(k)\}$ и $\{n(k)\}$ положительных целых чисел, таких что $n(k) > m(k) > k$, и следующие две последовательности стремятся к ε^+ при $k \to \infty$:

$$d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right),\ d\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right).$$

Полагая $x = x_{m(k)}$ и $y = x_{n(k)}$ в (1.1), мы приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}0 \le \zeta\left(d\left(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}\right), d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right)\right) &= \\ = \zeta\left(d\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right), d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right)\right) &< \\ < d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) - d\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \to \varepsilon^+ - \varepsilon^+ = 0 \quad (k \to \infty).\end{aligned}$$

Выбирая $t_k = d\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) > 0$ и $s_k = d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) > 0$, получаем

$$0 \le \zeta(t_k, s_k) < s_k - t_k. \tag{2.1}$$

Однако из (2.1) следует, что $\zeta(t_k, s_k) \to \varepsilon^+ - \varepsilon^+ = 0$ при $k \to \infty$ или

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \zeta(t_k, s_k) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \zeta(t_k, s_k) = 0,$$

что противоречит (ζ_3). Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание 2.3. Поскольку каждое $\mathcal{Z}$-сужение $T : X \to X$ непрерывно относительно ζ, то T имеет единственную неподвижную точку в X. Это означает, что лемма 1.5 ([1, лемма 2.7]) является непосредственным следствием леммы 2.2 или, что то же, леммы 2.1 из [9–12]. Следовательно, мы обобщили и усовершенствовали теорему 2.8 из [1] со значительно более коротким доказательством. Далее, следует отметить, что наш метод совместно с леммой 2.1 существенно совершенствует леммы 3.5 и 3.6 из [2], а также лемму 3.1 из [3]. В результате, во всех доказательствах, приведенных в ряде работ, условие ограниченности последовательности Пикара является излишним.

Наш следующий результат является настоящим обобщением теоремы 2.8 из [1]. Он также совершенствует соответствующие результаты из [4].

Теорема 2.4. *Пусть (X, d) является полным метрическим пространством. Предположим, что отображения $T, S : X \to X$ удовлетворяют условию*

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(Sx, Sy)) \ge 0 \tag{2.2}$$

для всех x, $y \in X$, где $\zeta \in \mathcal{Z}$. Если $T(X) \subseteq S(X)$, и $T(X)$ или $S(X)$ является замкнутым подмножеством X, то T и S имеют единственную общую точку в X. Более того, если T и S являются слабо совместимыми, то T и S имеют единственную общую точку в X.

Доказательство. Прежде всего докажем, что точка совпадения T и S единственна (если она существует). Действительно, если ω_1 и ω_2 — две различные точки совпадения T и S, то существуют две точки $u_1, u_2 \in X$ такие, что $Tu_1 = Su_1 = \omega_1 \neq \omega_2 = Su_2 = Tu_2$. На основании (2.2) отсюда следует неравенство

$$0 \leq \zeta\left(d\left(Tu_1, Tu_2\right), d\left(Su_1, Su_2\right)\right) = \zeta\left(d\left(\omega_1, \omega_2\right), d\left(\omega_1, \omega_2\right)\right) < 0,$$

и получаем противоречие, завершающее доказательство.

Пусть теперь x_0 является произвольной точкой в X. Выберем $x_1 \in X$ так, что $Tx_0 = Sx_1$. Это может быть сделано, поскольку $T(X) \subseteq S(X)$. Продолжая этот процесс для выбранного x_n в X, мы получаем x_{n+1} в X такое, что $Tx_n = Sx_{n+1} = y_n$ (т. е. последовательность Юнга, порожденную x_0, T и S).

Если $y_n = y_{n+1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $y_n = Tx_n = Sx_{n+1}$ является (единственной) требуемой точкой совпадения, и доказательство на этом завершается. Поэтому предположим, что $y_{n-1} \neq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta\left(d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right), d\left(Sx_n, Sx_{n+1}\right)\right) = \zeta\left(d\left(y_n, y_{n+1}\right), d\left(y_{n-1}, y_n\right)\right) < \\ < d\left(y_{n-1}, y_n\right) - d\left(y_n, y_{n+1}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

т. е. неравенство $d\left(y_n, y_{n+1}\right) < d\left(y_{n-1}, y_n\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(y_n, y_{n+1}\right) = D \geq 0$. Докажем, что $D = 0$. В самом деле, если $D > 0$, то в силу (2.3) это означает, что справедливо соотношение

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \zeta\left(d\left(y_n, y_{n+1}\right), d\left(y_{n-1}, y_n\right)\right) = 0$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \zeta\left(d\left(y_n, y_{n+1}\right), d\left(y_{n-1}, y_n\right)\right) = 0,$$

где $t_n = d\left(y_n, y_{n+1}\right) < d\left(y_{n-1}, y_n\right) = s_n$ и $t_n, s_n \to D > 0$. Получили противоречие. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(y_n, y_{n+1}\right) = 0$.

Далее, докажем, что $\{y_n\}$ является последовательностью Коши в (X, d). Для получения противоречия предположим, что это не так. Тогда на основании леммы 2.1 существует $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{m(k)\}$ и $\{n(k)\}$ положительных целых чисел и последовательности

$$\begin{gathered} d(y_{m(k)}, y_{n(k)}), \quad d(y_{m(k)}, y_{n(k)+1}), \quad d(y_{m(k)-1}, y_{n(k)}), \\ d(y_{m(k)-1}, y_{n(k)+1}), \quad d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)+1}), \end{gathered}$$

стремящиеся к ε^+ при $k \to \infty$. Применяя (2.2) к $x = x_{m(k)}$ и $y = x_{n(k)+1}$, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta\left(d\left(y_{m(k)}, y_{n(k)+1}\right), d\left(y_{m(k)-1}, y_{n(k)}\right)\right) < \\ < d\left(y_{m(k)-1}, y_{n(k)}\right) - d\left(y_{m(k)}, y_{n(k)+1}\right) \to 0 \quad (k \to \infty). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Соответственно на основании (2.4) нетрудно видеть справедливость равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \zeta\left(d\left(y_{m(k)}, y_{n(k)+1}\right), d\left(y_{m(k)-1}, y_{n(k)}\right)\right) = 0,$$

что находится в противоречии с (ζ_3). Таким образом, мы можем предположить, что $\{y_n\}$ — последовательность Коши в полном метрическом пространстве (X, d). Для обоих случаев, когда $T(X)$ или $S(X)$ является замкнутым подмножеством X, всегда найдется $u \in X$, такое что $y_n \to Su$ при $n \to \infty$. Далее, замечая, что $y_n \neq Tu$ и $y_n \neq Su$ для всех $n \in \mathbb{N}$, на основании (2.2) немедленно приходим к выводу, что

$$0 \leq \zeta\left(d\left(Tx_n, Tu\right), d\left(Sx_n, Su\right)\right) = \zeta\left(d\left(y_n, Tu\right), d\left(y_{n-1}, Su\right)\right) <$$
$$< d\left(y_{n-1}, Su\right) - d\left(y_n, Tu\right) \to d\left(Su, Su\right) - d\left(Su, Tu\right) \ (n \to \infty).$$

Таким образом, $Tu = Su$ является единственной точкой совпадения T и S. Наконец, на основании хорошо известного результата Юнга, получаем, что T и S имеют единственную общую неподвижную точку, если они слабо совместимы. Таким образом, утверждение доказано.

Следующие два результата дополняют, расширяют и углубляют недавние результаты из области симулирующих функций. Их доказательства аналогичны предыдущим доказательствам и поэтому не приводятся.

Для начала, пусть $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является таким отображением, что

1) $F(t) \leq t$ для всех $t \in [0, +\infty)$;

2) если $F(t_n)/t_n \to 1$ для каждой положительной последовательности $\{t_n\}$, то $t_n \to 0$.

Теорема 2.5. *Пусть (X, d) является полным метрическим пространством. Предположим, что отображения T, $S : X \to X$ удовлетворяют условию*

$$\zeta\left(d\left(Tx, Ty\right), F\left(d\left(Sx, Sy\right)\right)\right) \geq 0 \tag{2.5}$$

для всех $x, y \in X$, где $\zeta \in \mathcal{Z}$ и *F удовлетворяют условиям* 1 и 2. *Если $T(X) \subseteq S(X)$, и $T(X)$ или $S(X)$ является замкнутым подмножеством X, то T и S имеют единственную точку совпадения в X. Более того, если T и S слабо совместимы, то T и S имеют единственную общую неподвижную точку в X.*

Следствие 2.6. *Полагая в (2.5) $Sx = x$ для всех $x \in X$ и $F(t) = t\beta(t)$, где $\beta : [0, +\infty) \to [0, 1)$ — отображение, для которого для каждой положительной последовательности $\{t_n\}$, такой что из $\beta(t_n) \to 1^-$ следует $t_n \to 0^+$, мы можем утверждать, что $\mathcal{Z}$-сужение T относительно ζ типа Герати, определенное на метрическом пространстве (X, d), имеет в нем единственную неподвижную точку.*

Теорема 2.7. *Пусть (X, d) является полным метрическим пространством. Предположим, что отображения $T, S : X \to X$ удовлетворяют условию*

$$\zeta\left(d\left(Tx, Ty\right), \lambda \max\left\{d\left(Sx, Sy\right), d\left(Sx, Tx\right), d\left(Sy, Ty\right), d\left(Sx, Ty\right), d\left(Sy, Ty\right)\right\}\right) \geq 0 \tag{2.6}$$

для всех $x, y \in X$, где $\zeta \in \mathcal{Z}$ и *$\lambda \in (0, 1/2)$. Если $T(X) \subseteq S(X)$, и $T(X)$ или $S(X)$ является замкнутым подмножеством X, тогда T и S имеют единственную точку совпадения в X. Кроме того, если T и S слабо совместимы, то T и S имеют единственную общую неподвижную точку в X.*

Следствие 2.8. *Полагая в (2.6) $Sx = x$ для всех $x \in X$, мы можем утверждать, что $\mathcal{Z}$-квазисужение T относительно ζ типа Чирича, определенное на метрическом пространстве (X, d), имеет в нем единственную неподвижную точку.*

В заключение сформулируем постановку следующих двух нерешенных проблем.

Проблема 1. Пусть $\beta : [0, +\infty) \to [0, 1)$ является отображением и $\{t_n\}$ является положительной последовательностью, такой что из $\beta(t_n) \to 1^-$ следует $t_n \to 0^+$. Определяет ли $\zeta(t, s) = s\beta(s) - t$, где $s, t \in [0, +\infty)$, симулирующую функцию?

Проблема 2. Справедлива ли теорема 2.7 для $\lambda \in [1/2, 1)$?

Автор констатирует отсутствие конфликта интересов при публикации данной статьи.

Литература

1. *Khojasteh F., Shukla S., Radenović S.* A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions // Filomat. 2015. Vol. 29, N 6. P. 1189–1194. https://doi.org/10.2298/FIL1506189K
2. *Argoubi H., Samet B., Vetro C.* Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order // J. Nonlinear Sci. Appl. 2015. Vol. 8. P. 1082–1094.
3. *Nastasi A., Vetro P.* Fixed point results on metric and partial metric spaces via simulations functions // J. Nonlinear Sci. Appl. 2015. Vol. 8. P. 1059–1069.
4. *Roldan A., Karapınar E., Roldan C., Martinez-Moreno J.* Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions // J. Comput. Appl. Math. 2015. Vol. 275. P. 345–355. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.07.011
5. *Demma M., Saadati R., Vetro P.* Fixed point results on b-metric space via Picard sequences and b-simulation functions // Iranian J. Math. Sci. Infor. 2016. Vol. 11, N 1. P. 123–136. https://doi.org/10.7508/ijmsi.2016.01.011
6. *Karapinar E.* Fixed points results via simulation functions // Filomat. 2016. Vol. 30, N 8. P. 2343–2350. https://doi.org/10.2298/FIL1608343K
7. *Nastasi A., Vetro P.* Existence and uniqueness for a first-order periodic differential problem via fixed point results // Results Math. 2017. Vol. 71, issue 3–4. P. 889–909. https://doi.org/10.1007/s00025-016-0551-x
8. *Tchier F., Vetro C., Vetro F.* Best approximation and variational inequality problems involving a simulation function // Fixed Point Theory Appl. 2016. Vol. 26. https://doi.org/10.1186/s13663-016-0512-9
9. *Radenovic S., Kadelburg Z., Jandrlić D., Jandrlić A.* Some results on weakly contractive maps // Bull. Iran. Math. Soc. 2012. Vol. 38, N 3. P. 625–645.
10. *Radenović S.* A note on tripled coincidence and tripled common fixed point theorems in partially ordered metric spaces // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 236. P. 367–372. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.059
11. *Radenović S.* Coupled fixed point theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces // Krag. J. Math. 2014. Vol. 38, N 2. P. 249–257.
12. *Radenović S.* Remarks on some coupled coincidence point results in partially ordered metric spaces // Arab J. Math. Sci. 2014. Vol. 20, N 1. P. 29–39. https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2013.02.003

Статья поступила в редакцию 16 марта 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Доличанин-Джекич Диана — доктор технических наук; diana.dolicanin@pr.ac.rs

ON SOME NEW RESULTS ON SIMULATION FUNCTIONS

Diana Dolićanin-Đekić

University of Pristina, Kneza Miloša, 7, 38220, Kosovska Mitrovica, Serbia; diana.dolicanin@pr.ac.rs

In this paper we discuss, consider, extend, improve and enrich some recent results on simulation functions established by several authors. Using one lemma obtained recently by S. Radenović et al. [S. Radenović et al., Some results on weakly contractive maps, Bull. Iran. Math. Soc., 38 (3), 625–645 (2012)], we obtain much shorter and nicer proofs than ones from the existing literature. Refs 12.

Keywords: simulation function, $\mathcal{Z}$-contraction, point of coincidence, common fixed point, weakly compatible.

References

1. Khojasteh F., Shukla S., Radenović S., “A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions”, *Filomat* **29**(6), 1189–1194 (2015). https://doi.org/10.2298/FIL1506189K
2. Argoubi H., Samet B., Vetro C., “Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order”, *J. Nonlinear Sci. Appl.* **8**, 1082–1094 (2015).

3. Nastasi A., Vetro P., “Fixed point results on metric and partial metric spaces via simulations functions”, *J. Nonlinear Sci. Appl.* **8**, 1059–1069 (2015).

4. Roldan A., Karapınar E., Roldan C., Martinez-Moreno J., “Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions”, *J. Comput. Appl. Math.* **275**, 345–355 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.07.011

5. Demma M., Saadati R., Vetro P., “Fixed point results on b-metric space via Picard sequences and b-simulation functions”, *Iranian J. Math. Sci. Infor.* **11**(1), 123–136 (2016). https://doi.org/10.7508/ijmsi.2016.01.011

6. Karapinar E., “Fixed points results via simulation functions”, *Filomat* **30**(8), 2343–2350 (2016). https://doi.org/10.2298/FIL1608343K

7. Nastasi A., Vetro P., “Existence and uniqueness for a first-order periodic differential problem via fixed point results”, *Results Math.* **71**(3–4), 889–909 (2017). https://doi.org/10.1007/s00025-016-0551-x

8. Tchier F., Vetro C., Vetro F., “Best approximation and variational inequality problems involving a simulation function”, *Fixed Point Theory Appl.* **26** (2016). https://doi.org/10.1186/s13663-016-0512-9

9. Radenovic S., Kadelburg Z., Jandrlić D., Jandrlić A., “Some results on weakly contractive maps”, *Bull. Iran. Math. Soc.* **38**(3), 625–645 (2012).

10. Radenović S., “A note on tripled coincidence and tripled common fixed point theorems in partially ordered metric spaces”, *Appl. Math. Comput.* **236**, 367–372 (2014). https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.059

11. Radenović S., “Coupled fixed point theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces”, *Krag. J. Math.* **38**(2), 249–257 (2014).

12. Radenović S., “Remarks on some coupled coincidence point results in partially ordered metric spaces”, *Arab J. Math. Sci.* **20**(1), 29–39 (2014). https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2013.02.003

Для цитирования: *Доличанин-Джекич Д.* О некоторых новых результатах по симулирующим функциям // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 563–569. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.406

For citation: Dolićanin-Đekić D. On some new results on simulation functions. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 563–569. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.406