УДК 541.13 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3

А. В. Головин[1], *В. М. Лагодинский*[2]

ЗАДАЧА ОБ УПРУГОМ СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ИХ ЛОКАЛЬНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67

Представленное ранее определение квадратного корня из дифференциального оператора, приводящее к локальному оператору, использовано для решения задачи о столкновении двух частиц. Ставится и решается задача для двухчастичного релятивистского уравнения Шрёдингера, соответствующая упругому столкновению двух бесспиновых частиц при их локальном взаимодействии. Описано упругое столкновение частиц в системе центра импульсов при конечном радиусе взаимодействия. Поставленная задача решена при использовании отталкивающего и притягивающего потенциалов взаимодействия. Показано, что предлагаемый подход в релятивистской квантовой механике приводит к правильному нерелятивистскому пределу. Произведён переход к произвольной системе отсчёта. Библиогр. 22 назв.

Ключевые слова: релятивистская квантовая механика, дифференциальный оператор, упругое столкновение.

Для цитирования: *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача об упругом столкновении двух бесспиновых частиц при их локальном взаимодействии в релятивистской квантовой механике // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 249–263. https:// //doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.302

A. V. Golovin[1], *V. M. Lagodinski*[2]

A PROBLEM OF ELASTIC COLLISION OF TWO SPINLESS PARTICLES AT THEIR LOCAL INTERACTION IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

[1] St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Saint-Petersburg State university of aerospace instrumentation, 67, ul. Bol'shaya Morskaya, 190000, St. Petersburg, Russian Federation

The earlier definition of the square root of a differential operator leading to a local operator was used to solve the problem of collision of two particles. The problem is posed and solved for the two-particle relativistic Schrödinger equation corresponding to the elastic collision of two spinless particles in their local interaction. An elastic collision of particles in a system of the center of momenta is described for a finite radius of interaction. The problem is solved for repulsive and attracting interaction potentials. It is shown that the proposed approach in relativistic quantum mechanics leads to the correct nonrelativistic limit. A transition is made to an arbitrary frame of reference. Refs 22.

Keywords: relativistic quantum mechanics, differential operator, elastic collision.

For citation: Golovin A. V., Lagodinski V. M. A problem of elastic collision of two spinless particles at their local interaction in relativistic quantum mechanics. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry.* 2017. Vol. 4 (62), iss. 3. P. 249–263. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2017.302

Введение. Задача о столкновении двух частиц является, по-видимому, одной из важнейших в современной физике, поскольку лишь по результатам столкновений мы можем судить о свойствах сталкивающихся частиц. Для случая, когда взаимодействие между ними можно считать потенциальным, в нерелятивистской квантовой механике такая задача решается. При этом задача о взаимодействии между частицами заменяется задачей о рассеянии частицы потенциальной ямой [1]. Но в релятивисткой квантовой механике бесспиновых частиц, основанной на уравнении Клейна—Фока—Гордона (УКФГ), такая задача существенно сложнее. Это является необходимым следствием того, что УКФГ для свободной бесспиновой частицы имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\Psi(t, \mathbf{r}) = 0,$$

(используем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице) и получается путём замены

$$\varepsilon \to i\frac{\partial}{\partial t},\ \mathbf{p} \to -i\nabla$$

из выражения квадрата энергии через импульс:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{1}$$

в то время как нерелятивистское уравнение Шрёдингера (НУШ) получается посредством такой же замены из нерелятвистского выражения самой энергии через импульс.

Следствием этого является не только появление отрицательных энергий свободной частицы. Решение УКФГ для водородоподобного иона с атомным номером $Z > 68$ приводит к комплексным значениям энергии [2]. При наличии потенциала, принимающего значения, большие удвоенной массы покоя, УКФГ (так же, как и уравнение Дирака) приводит к парадоксу Клейна [2]. Ещё одна трудность — невозможность УКФГ для системы из нескольких частиц. Действительно, энергия физической системы, состоящей хотя бы из двух невзаимодействующих частиц, равна сумме энергий этих частиц:

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2},$$

и путём однократного возведения в квадрат от корней не избавиться. Стараясь придать квантовой теории явно ковариантный вид, Дирак, Фок и Подольский предложили «многовременной формализм» [3]. Паули и Вайскопф [4] предложили считать УКФГ и уравнение Дирака уравнениями физических полей, что послужило началом создания квантовой теории поля (КТП). В этой теории все взаимодействия между частицами описываются с помощью систем уравнений, каждое из которых соответствует одному сорту частиц, а взаимодействие вводится с помощью нелинейных членов. Эта нелинейность приводит к невозможности точного решения этих систем, а использование теории возмущений — к неизбежному появлению расходящихся интегралов, от которых избавляются с помощью перенормировок. По-видимому, это даёт основание для поиска более простого подхода к квантово-релятивистскому описанию двухчастичного взаимодействия.

В работе [5] предлагалось уравнение, которое в этой работе названо двухчастичным уравнением Клейна—Гордона:

$$\left(\varepsilon - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \nabla_1^2} - \sqrt{m_2^2 - \nabla_2^2}\right)\psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = 0,\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

где ∇_i — оператор градиента по координатам i-й частицы, $i = 1, 2$; однако оператор, имеющий вид квадратного корня из дифференциального оператора, не определяется. Далее это уравнение рассматривается в системе центра импульсов (СЦИ), и массы частиц считаются равными: $m_1 = m_2$. Это позволяет, возведя в квадрат обе части уравнения, перейти к уравнению, имеющему вид одночастичного УКФГ, но решения которого соответствуют только положительным значениям энергии. Потенциал взаимодействия считается короткодействующим и сферически симметричным, но в остальном — произвольным. Граничные условия не определяются, самосопряжённость задачи не проверяется, возможность связанного состояния не исследуется, вычисляются сдвиги фаз рассеяния. В результате получается выражение, не имеющее правильного нерелятивистского предела: в соответствии с ним сечение должно возрастать пропорционально квадрату энергии, в то время как в нерелятивиская теория приводит к сечению, убывающему при возрастании энергии.

В работах [6, 7] подобное уравнение (его авторы называют бесспиновым уравнением Солпетера) используется для решения задачи о связанных состояниях физической системы, состоящей из кварка и антикварка (т. е. тоже частиц с равными массами), взаимодействующих посредством кулоновского потенциала. Здесь квадратный корень из дифференциального оператора определяется с помощью преобразования Фурье—Бесселя (импульсного представления). Сами авторы указанных работ вполне справедливо называют такое определение нелокальным. Путём довольно громоздких вычислений в них получен дискретный спектр задачи, по-видимому, правильный, но волновые функции оказываются сингулярными.

Убеждение, что квадратный корень из дифференциального оператора как дифференциальный оператор бесконечного порядка обязательно является нелокальным, наряду с убеждением, что в уравнения релятивистской квантовой теории время и пространственные координаты должны входить вполне симметрично, послужило основанием для признания неприемлемым уравнения, получающегося с помощью стандартной замены из релятивистского выражения энергии через импульс [8, 9]:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{m^2 - \nabla^2}\right)\Psi(t, \mathbf{r}) = 0. \tag{3}$$

Однако на самом деле уравнение является инвариантным относительно некоторых преобразований, если относительно этих преобразований инвариантно множество его решений [10]. Нелокальным же это уравнение будет только в том случае, если квадратный корень из дифференциального оператора определяется как нелокальный оператор, например с помощью импульсного представления. Такое определение вполне соответствует определению функции оператора, введённому Дж. фон Нейманом [11]: если $f(z)$ — функция комплексного переменного z, а A — самосопряжённый оператор с собственными функциями φ_α и собственными значениями α, то $f(A)$ — самосопряжённый оператор с теми же собственными функциями φ_α и собственными значениями $f(\alpha)$. Но это определение не учитывает специфики дифференциальных операторов. Действительно, очевидно, что

$$-\frac{d^2}{dx^2} = \left(-i\frac{d}{dx}\right)^2,$$

но оператор $-id/dx$ нельзя определить как самосопряжённый на функциях, определённых на промежутке $[0, \infty)$, а оператор $-d^2/dx^2$ — можно, причём бесконечным числом способов [12]. На самом деле любой самосопряжённый дифференциальный оператор, в том числе и $-d^2/dx^2$, является нелокальным. Следуя Треву [13], мы называем локальным линейный оператор A, если из $f(x) = 0$, $\forall x \in M$, где M — открытое множество, следует $(Af)(x) = 0$, $\forall x \in M$. Но самосопряжённый оператор действует в гильбертовом пространстве, т. е. самосопряжённый оператор $-d^2/dx^2$ может быть определён только на функциях $u(x)$, удовлетворяющих нелокальному условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Оператор $-d^2/dx^2$ локален, если он определён на всех функциях $u(x)$, дважды дифференцируемых на непустом подмножестве числовой прямой, тогда он каждой такой функции $u(x)$ сопоставляет функцию $-u''(x)$, определённую на этом подмножестве. Решая дифференциальное уравнение, мы пользуемся только локальными операторами, а самосопряжённый оператор получается в том случае, когда мы подчиняем решение определённым граничным условиям и находим при этом собственные функции и собственные значения.

Итак, нет нужды определять квадратный корень из дифференциального оператора как самосопряжённый оператор, его следует определить как локальный дифференциальный оператор (бесконечного порядка), а затем найти граничные условия, приводящие к самосопряжённой граничной задаче.

Локальное определение дифференциального оператора бесконечного порядка, в частности определение квадратного корня из дифференциального оператора, было предложено одним из авторов настоящей статьи в работе [14]. Это определение сопоставляет оператору D и функции комплексного переменного $f(z)$[1] оператор, который, в свою очередь, любой функции $u(x)$, такой, что множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ |(D^n u)(x)|^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi_n}{n}\right)\right\}_{n=0}^{\infty},$$

где $\varphi_n = \arg(D^n u)(x)$, при любом $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ ограничено и включает лишь те точки, в которых функция $f(z)$ голоморфна, сопоставляет функцию, определённую на (a,b) и принимающую в каждой точке $x \in (a,b)$ значения, получающиеся из функции

$$\big(f(\alpha D)u\big)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, \alpha^n (D^n u)(x),\ \forall x \in (a,b) \tag{4}$$

аналитическим продолжением по вещественному параметру α от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$.

Это соответствие между множеством функций $F = \{f(z)\}$ и множеством дифференциальных операторов (вообще говоря) бесконечного порядка $\hat{F} = \{f(D)\}$ есть изоморфизм коммутативных колец: сумме функций $f_1(z) + f_2(z)$ соответствует сумма операторов $f_1(D) + f_2(D)$, а произведению функций $f_1(z)f_2(z)$ — произведение операторов $f_1(D)f_2(D) = f_1(D)f_2(D)$ (т. е. их последовательное действие). В частности, если $u(x) = \exp(ikx)$ $\forall x \in (a,b)$, $k \in \mathbb{R}$, то

$$(H_m u)(x) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2}\, u(x) = \sqrt{m^2 + k^2}\, \exp(ikx),\ \forall x \in (a,b),$$

[1] Функция комплексного переменного $f(z)$ голоморфная на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов, точек ветвления и разрезов, соединяющих каждую из точек ветвления с бесконечно удалённой точкой, а продолжения этих разрезов пересекаются в начале координат, где функция $f(z)$ голоморфна.

$$(H_m^{-1}u)(x) = \left(m^2 - \partial_x^2\right)^{-1/2} u(x) = (m^2 + k^2)^{-1/2} \exp(ikx),\ \forall x \in (a, b),$$
$$(V_m u)(x) = -i\left(m^2 - \partial_x^2\right)^{-1/2} \partial_x u(x) = \frac{k}{\sqrt{m^2 + k^2}} \exp(ikx),\ \forall x \in (a, b),$$

где $\partial_x \equiv d/dx$.

Очень важно, что функция $u(x) = \exp(\varkappa x)$, если $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\varkappa > m$, не принадлежит области определения оператора H_m.

В работе [14] показано, что уравнение (3) с нашим определением квадратного корня из оператора инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Таким образом, ничто не мешает рассматривать уравнение (3) как релятивистское обобщение НУШ. Естественно называть уравнение (3) с так определённым квадратным корнем из дифференциального оператора релятивистским уравнением Шрёдингера (РУШ). В работе [14] также построена спектральная теория граничных задач для стационарного свободного одномерного РУШ:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}}\right) u(x) = 0.$$

Авторами настоящей работы с помощью РУШ получены точные аналитические решения ряда задач релятивистской квантовой механики [15–19], применение УКФГ к которым приводит к существенным трудностям. При предлагаемом нами подходе никакие трудности не возникают. В настоящей работе ставится и решается задача для двухчастичного РУШ, соответствующая упругому столкновению двух бесспиновых частиц при их локальном взаимодействии.

Описание упругого столкновения частиц в системе центра импульсов при конечном радиусе взаимодействия. Постановка задачи. Будем вначале рассматривать столкновение частиц в инерциальной системе отсчёта, в которой волновая функция зависит только от радиуса-вектора первой частицы относительно второй:

$$\Psi_0(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \Psi(t, \mathbf{r}), \tag{5}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Эта функция должна удовлетворять двухчастичному релятивистскому уравнению Шрёдингера:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \nabla^2} - \sqrt{m_2^2 - \nabla^2}\right) \Psi(t, \mathbf{r}) = 0,\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где $U(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия, которая, как будем полагать, сферически симметрична, т. е. зависит не от направления вектора $\mathbf{r}$, а лишь от его длины r:

$$U(r) = \begin{cases} U_0, & \forall r \leqslant a, \\ 0, & \forall r > a, \end{cases} \tag{7}$$

а ∇ — градиент по вектору $\mathbf{r}$.

Во избежание некоторых трудностей (вполне, впрочем, преодолимых [19]) будем считать, что $|U_0| < m_1 + m_2$. Время отделяется обычной подстановкой:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \psi_\varepsilon(\mathbf{r}) \exp(-i\varepsilon t),$$

функция $\psi_\varepsilon(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (2). Легко видеть, что при $\varepsilon > \max(m_1, m_2)$ и $r > a$ уравнение (2) имеет решения вида

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = A\exp(i\mathbf{kr}) \equiv A\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)],\ \mathbf{k}^2 = (\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2/(4\varepsilon^2),$$

поэтому выбранная нами система отсчёта является системой центра импульсов частиц. Назовём её Ц-системой. В ней сумма импульсов частиц равна нулю. Необходимо, однако, ввести дополнительные условия: это условия ограниченности решения на $\mathbb{R}$, а также условия непрерывности решения и плотности потока на сфере $r = a$. Введём сферическую систему координат: $x = r\cos\phi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$. Оператор квадрата момента импульса частицы имеет вид:

$$\hat{\mathbf{l}}^2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Подставив

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{l}}^2$$

в (2), получим уравнение:

$$\Bigg(\varepsilon - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{l}}^2} - \\ - \sqrt{m_2^2 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{l}}^2}\Bigg)\psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = 0,\ \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3. \quad (8)$$

Покажем, что угловая и радиальная зависимости разделяются. Очевидно, что

$$\hat{\mathbf{l}}^{2n}Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = [l(l+1)]^n Y_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

поэтому

$$\nabla^{2n} = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{l}}^2\right]^n Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^n Y_{lm}(\vartheta,\varphi). \quad (9)$$

Следовательно, если $\psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = \psi_{l\varepsilon}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$, то

$$\nabla^{2n}\psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^n \psi_{l\varepsilon}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi).$$

Используя (4) и (2), отсюда получаем уравнение для функции $\psi_{l\varepsilon}(r)$:

$$\Bigg(\varepsilon - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^n} - \\ - \sqrt{m_2^2 - \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^n}\Bigg)\psi_{l\varepsilon}(r) = 0,\ \forall\mathbf{r}\geqslant 0. \quad (10)$$

Поскольку в дальнейшем мы перейдём к пределу $a \to 0$, достаточно рассмотреть случай $l = 0$. Удобно ввести функцию $\chi(r) = r\psi_{0\varepsilon}(r)$. Уравнение принимает вид:

$$\left(\varepsilon - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \frac{d^2}{dr^2}} - \sqrt{m_2^2 - \frac{d^2}{dr^2}}\right)\chi(r) = 0,\ \forall r \geqslant 0. \tag{11}$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\left(\varepsilon - U_0 - \sqrt{m_1^2 - \frac{d^2}{dr^2}} - \sqrt{m_2^2 - \frac{d^2}{dr^2}}\right)\chi(r) = 0,\ \forall r \in [0, a], \tag{12}$$

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \frac{d^2}{dr^2}} - \sqrt{m_2^2 - \frac{d^2}{dr^2}}\right)\chi(r) = 0,\ \forall r \in [a, R]. \tag{13}$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$\chi(r) = Ae^{iqr} + Be^{-iqr},\ \forall r \in [0, a),\ \chi(r) = Ce^{ipr} + De^{-ipr},\ \forall r \in [a, R], \tag{14}$$

где p и q удовлетворяют характеристическим уравнениям:

$$\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} = \varepsilon,\ \sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2} = \varepsilon - U_0. \tag{15}$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

$$p = \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2\varepsilon},\ q = \frac{\sqrt{[(\varepsilon - U_0)^2 - m_1^2 - m_2^2]^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2(\varepsilon - U_0)}. \tag{16}$$

При $\varepsilon > m_1 + m_2$ p вещественно, а при $\varepsilon < m_1 + m_2$ p чисто мнимо, при $\varepsilon - U_0 >$ $> m_1 + m_2$ q вещественно, а при $\varepsilon - U_0 < m_1 + m_2$ q чисто мнимо.

Из требования ограниченности функции $\psi_{0\varepsilon}(r)$ следует граничное условие:

$$\chi(0) = 0. \tag{17}$$

Потребуем, чтобы выполнялись условие ограниченности решения и условия непрерывности:

$$\lim_{\delta \to 0}[\chi(a + \delta) - \chi(a - \delta)] = 0,\ \lim_{\delta \to 0}\left[\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi)(a + \delta) - \sum_{i=1,\,2}(G_i\chi)(a - \delta)\right] = 0, \tag{18}$$

где

$$H_i = \sqrt{m_i^2 - \partial_r^2},\ G_i = \frac{1}{\sqrt{m_i^2 - \partial_r^2}}\,\partial_r,\ i = 1,\,2,\ \partial_r \equiv \frac{d}{dr}.$$

Вначале также потребуем обращения в нуль решения при некотором $r = R$ (в дальнейшем перейдём к пределу $R \to \infty$):

$$\chi(R) = 0. \tag{19}$$

Доказательство того, что принятые условия приводят к самосопряжённой граничной задаче, приведено в приложении. Можно показать, что при $R \to \infty$ часть спектра, включающая значения $\varepsilon \geqslant m_1 + m_2$, становится сплошной. Переходя к этому пределу, считаем уравнение (13) определённым на промежутке $[a, \infty)$, а граничное условие (19) заменим на условие ограниченности при $r \to \infty$.

Решение задачи при отталкивающем потенциале взаимодействия. Пусть в (7) $m_1 + m_2 > U_0 > 0$. При $\varepsilon < \sqrt{|m_1^2 - m_2^2|}$ уравнения (12) и (13) не имеют решений, поэтому спектр задачи ограничен снизу — наиболее известной трудности общепринятой релятивистской квантовой механики, основанной на УКФГ, здесь нет. Если $0 < \varepsilon < m_1 + m_2$, то оба уравнения имеют решения, но граничным условиям удовлетворить невозможно. Если $m_1 + m_2 < \varepsilon < m_1 + m_2 + U_0$, то решение имеет вид:

$$\chi(r) = A \operatorname{sh} \kappa r,\ \forall r \in [0, a],\ \chi(r) = \exp[ip(a - r)] + B \exp[ip(r - a)],\ \forall r > a,$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{4m_1^2 m_2^2 - [(\varepsilon - U_0)^2 - m_1^2 - m_2^2]^2},\ p = \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2\varepsilon},$$

A, B — комплексные постоянные, значения которых определяются граничными условиями (18), используя которые, получаем систему:

$$A \operatorname{sh} \kappa a = 1 + B,$$
$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{m_1^2 - \kappa^2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{m_2^2 - \kappa^2}}\right) A \operatorname{ch} \kappa a = -i\left(\frac{p}{\sqrt{m_1^2 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{m_2^2 + p^2}}\right)(1 - B).$$

Это неоднородная линейная система относительно A и B с неравным нулю определителем, она имеет единственное решение при любой энергии $\varepsilon > m_1 + m_2$. На самом деле нас интересует только значение коэффициента B, уравнение для которого получаем, поделив первое из уравнений системы на второе:

$$\frac{1 + B}{1 - B} = -i\beta \operatorname{th} \kappa a,$$

где

$$\beta = \frac{p(\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2})\sqrt{m_1^2 - \kappa^2}\sqrt{m_2^2 - \kappa^2}}{\kappa(\sqrt{m_1^2 - \kappa^2} + \sqrt{m_2^2 - \kappa^2})\sqrt{m_1^2 + p^2}\sqrt{m_2^2 + p^2}}.$$

Решение этого уравнения есть

$$B = \frac{i\beta \operatorname{th} \kappa a + 1}{i\beta \operatorname{th} \kappa a - 1}.$$

Очевидно, B — это диагональный элемент матрицы рассеяния, соответствующий s-рассеянию: $B = S_0 = \exp(2i\delta_0)$. Используя формулы обычной квантово-механической теории упругих столкновений [1], получаем выражения для амплитуды рассеяния и дифференциального сечения рассеяния в Ц-системе:

$$f(\vartheta) = \frac{i}{2p}(1 - S_0) = \frac{i}{p(i\beta \operatorname{th} \kappa a - 1)},\ d\sigma = 2\pi \sin\vartheta |f(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{2\pi \sin\vartheta}{p^2(\beta^2 \operatorname{th}^2 \kappa a + 1)}\, d\vartheta. \quad (20)$$

Таким образом, рассеяние в Ц-системе изотропно, полное сечение имеет вид:

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2(\beta^2 \operatorname{th}^2 \kappa a + 1)}.$$

Решение задачи при притягивающем потенциале взаимодействия. Пусть в (7) $U_0 < 0$. Если

$$\varepsilon \in \left(\sqrt{|m_1^2 - m_2^2|},\, m_1 + m_2\right),$$

то решение, удовлетворяющее условиям (17) и ограниченности, имеет вид:

$$\chi(r) = A \sin qr,\ \forall r \in [0, a],\ \chi(r) = B \exp(-\kappa r),\ \forall r > a, \tag{21}$$

где q определяется второй из формул (16):

$$\kappa = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{4m_1^2 m_2^2 - (\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}. \tag{22}$$

Используя условия (18), получаем:

$$A \sin qa = B \exp(-\kappa a), \tag{23}$$

$$Aq\left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + q^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + q^2}}\right)\cos qa = -B\kappa\left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 - \kappa^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 - \kappa^2}}\right)\exp(-\kappa a). \tag{24}$$

Это однородная система линейных уравнений относительно постоянных A и B. Она имеет нетривиальные решения, только если её определитель равен нулю, что эквивалентно уравнению:

$$\operatorname{tg} qa = -\frac{\kappa\left(\sqrt{m_1^2 - \kappa^2} + \sqrt{m_2^2 - \kappa^2}\right)\sqrt{m_1^2 + q^2}\,\sqrt{m_2^2 + q^2}}{q\left(\sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2}\right)\sqrt{m_1^2 - \kappa^2}\,\sqrt{m_2^2 - \kappa^2}}. \tag{25}$$

Если в этом уравнении величины q и κ заменить их выражениями через энергию ε, то получается уравнение относительно ε. Так же как и в нерелятивистской квантовой механике [20], оно имеет решения не при любых U_0. Порог его появления можно найти, положив в уравнении (24) $\kappa = 0$. Отсюда получаем:

$$|U_0| > \sqrt{m_1^2 + \pi^2(2a)^{-2}} + \sqrt{m_2^2 + \pi^2(2a)^{-2}} - m_1 - m_2.$$

Зафиксируем некоторое $|U_0'|$, ненамного большее этого порога, такое, что при этой глубине ямы уравнение (25) относительно ε имеет только один корень $\varepsilon = \varepsilon_0$, который можно определить, решив это уравнение численно. Соответствующее значение $\kappa = \kappa_0$ определяется из формулы (22). Это значение близко к нулю, поэтому для области $r > a$ применимо нерелятивистское приближение. Пусть $a \ll \pi/(2\mu)$, где $\mu = \min(m_1, m_2)$. Тогда $|U_0'| \sim \pi/a$. Заметим, что здесь имеется отличие от нерелятивистской квантовой механики, где $|U_0'| \sim \pi^2/(4a^2)$. Будем увеличивать $|U_0'|$ и одновременно уменьшать a так, чтобы их соотношение оставалось постоянным. Если $|U_0'| \gg \max(m_1, m_2)$, $q \sim |U_0'|$, значит величины qa и

$$q\left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + q^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + q^2}}\right)$$

становятся постоянными. При $\varepsilon < m_1 + m_2$ решение в этом пределе имеет вид:

$$\chi(r) = A \exp(-\kappa r),\ \forall r > 0. \tag{26}$$

Соответствующее значение энергии равно

$$\varepsilon_0 = \sqrt{m_1^2 - \kappa^2} + \sqrt{m_2^2 - \kappa^2}. \tag{27}$$

Это единственное значение дискретной части спектра нашей задачи. Его можно интерпретировать как значение энергии связанного состояния двух частиц или значение энергии (массы) покоя композитной частицы. При этом пара частиц с массами m_1 и m_2 в пространстве $r > 0$ существует в «виртуальном состоянии».

Вспомним, что в нерелятивистской квантовой механике точечный потенциал задаётся значением логарифмической производной волновой функции в нуле [22]. Аналогично здесь мы можем определить точечный потенциал взаимодействия двух бесспиновых частиц с помощью граничного условия:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\chi(r)} \left(\frac{\dfrac{d}{dr}}{\sqrt{m_1^2 - \dfrac{d^2}{dr^2}}} + \frac{\dfrac{d}{dr}}{\sqrt{m_2^2 - \dfrac{d^2}{dr^2}}} \right) \chi(r) = -\kappa. \tag{28}$$

Рассматривая не слишком большие значения энергии, мы можем считать, что оно справедливо и для состояний непрерывного спектра, который составляют значения $\varepsilon \geqslant m_1 + m_2$. Соответствющие решения выберем в виде [1]:

$$\chi(r) = e^{i\delta_0} \sin(pr + \delta_0) = \frac{i}{2}[\exp(-ipr) - S_0 \exp(ipr)], \ \forall r > 0, \tag{29}$$

где p определяется первой из формул (16), $S_0 = \exp(2i\delta_0)$ — диагональный элемент матрицы рассеяния, δ_0 — фаза рассеяния с нулевым орбитальным моментом.

Используя граничное условие (28), получаем уравнение для S_0:

$$p \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + p^2}} \right) \operatorname{ctg} \delta_0 = -\kappa. \tag{30}$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\kappa/\gamma(p)$, где

$$\gamma(p) = \frac{p(\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2})}{\sqrt{m_1^2 + p^2}\sqrt{m_2^2 + p^2}}. \tag{31}$$

Для диагонального элемента матрицы рассеяния получаем выражение:

$$S_0 = \frac{\kappa - i\gamma(p)}{\kappa + i\gamma(p)}. \tag{32}$$

Отсюда следуют выражения для амплитуды, дифференциального сечения рассеяния в системе центра импульсов для притягивающего взаимодействия:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ip}(S_0 - 1) = \frac{\gamma(p)}{p[i\gamma(p) - \kappa]}, \ d\sigma = 2\pi \sin\vartheta |f(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{2\pi\gamma^2(p)}{p^2[\kappa^2 + \gamma^2(p)]} \sin\vartheta \, d\vartheta \tag{33}$$

и полного сечения в системе центра импульсов для притягивающего взаимодействия

$$\sigma = \frac{4\pi\gamma^2(p)}{p^2[\kappa^2 + \gamma^2(p)]}\,. \tag{34}$$

Перейдём к нерелятивистскому пределу. Пусть $p \ll \min(m_1, m_2)$, тогда $\gamma(p) \approx p/\mu = p/(1/m_1 + 1/m_2)$, где μ — так называемая приведённая масса, и $\operatorname{ctg}\delta_0 = -\kappa\mu/p$. Из формул (27) и (30) получаем: $\kappa \approx (2\mu|\varepsilon_0|)^{1/2}$. Формула (33) даёт

$$f \approx -\frac{1}{\kappa + ip}.$$

Таким образом, мы получаем нерелятивистскую формулу для амплитуды рассеяния. Следовательно, предлагаемый подход в релятивистской квантовой теории приводит к правильному нерелятивистскому пределу.

Переход к произвольной системе отсчёта. Дифференциальное сечение рассеяния определяет часть падающего потока, рассеиваемого в сектор от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ (угол ϑ отсчитываем от оси X). Поэтому угловая зависимость дифференциального сечения в системе отсчёта K, движущейся относительно Ц-системы со скоростью V вдоль оси X, получается, если выразить угол рассеяния ϑ в Ц-системе через угол рассеяния ϑ' первой частицы (с массой m_1) в системе K через энергию и импульс этой частицы в системе K. Используем формулу [21]:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v'_x\sqrt{1-V^2}\sin\vartheta'}{v'_x\cos\vartheta' + V}\,.$$

Подставив её во вторую из формул (20) или (33), получаем выражение для дифференциального сечения рассеяния в случае отталкивания или притяжения соответственно в виде:

$$d\sigma = \frac{2\pi|f|^2}{p^2}\frac{v'_x\sqrt{1-V^2}(v'_x+V)}{(v'_x\cos\vartheta'+V)^2 + {v'_x}^2(1-V^2)}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{v'_x\sqrt{1-V^2}\sin\vartheta'}{v'_x\cos\vartheta'+V}\right)d\vartheta',$$

где f — амплитуда рассеяния для случая отталкивания или притяжения соответственно. Она выражается через инвариантные величины, характеризующие рассеяние в Ц-системе. Конечно, их можно выразить через величины, измеряемые в системе отсчёта K, но формулы получаются очень громоздкими.

Заключение и выводы. Итак, получено точное и математически корректное решение квантово-релятивистской задачи об упругом столкновении бесспиновых частиц, вполне аналогичное нерелятивистскому. При этом не возникает ни расходимостей, ни отрицательных энергий свободных частиц. Многовременной формализм не используется. Таким образом, математический формализм релятивистской квантовой механики, основанный на теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка, и в этой задаче демонстрирует свои преимущества перед традиционной теорией, основанной на уравнении Клейна—Фока—Гордона. В дальнейшем будет показано, что этот формализм применим и к задачам о неупругом столкновении двух бесспиновых частиц и распаде частицы на две. То есть квантовая теория поля с её расходимостями не является необходимой для описания физических систем с переменным числом частиц.

Приложение. Пусть

$$\varepsilon_i = \sqrt{m_1^2 + p_i^2} + \sqrt{m_2^2 + p_i^2},$$

$\chi_k(r)$ — решение уравнения (11) с $\varepsilon = \varepsilon_k$, $k = 1, 2$:

$$\left(\varepsilon_1 - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \partial_r^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_r^2}\right)\chi_1(r) = 0,\ \forall r \geqslant 0, \tag{35}$$

$$\left(\varepsilon_2 - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \partial_r^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_r^2}\right)\chi_2(r) = 0,\ \forall r \geqslant 0. \tag{36}$$

Умножим (35) на $\chi_2(r)$, а (36) — на $\chi_1(r)$:

$$\chi_2(r)\left(\varepsilon_1 - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \partial_r^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_r^2}\right)\chi_1(r) = 0,\ \forall r \geqslant 0, \tag{37}$$

$$\chi_1(r)\left(\varepsilon_2 - U(r) - \sqrt{m_1^2 - \partial_r^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_r^2}\right)\chi_2(r) = 0,\ \forall r \geqslant 0, \tag{38}$$

а теперь вычтем (38) из (37). В результате получим:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\chi_1(r)\chi_2(r) = \chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}\sqrt{m_i^2 - \partial_r^2}\,\chi_1(r) - \chi_1(r)\sum_{i=1,\,2}\sqrt{m_i^2 - \partial_r^2}\,\chi_2(r). \tag{39}$$

Используя (14), получаем:

$$(H_i\chi)(r) = \begin{cases}\sqrt{m_i^2 + q^2}\,\chi(r) = (\varepsilon_i - U_0)\chi(r), & \forall r \in [0, a),\\ \sqrt{m_i^2 + p^2}\,\chi(r) = \varepsilon_i\chi(r), & \forall r \geqslant a\end{cases},$$

поэтому

$$\chi(r) = \begin{cases}(\varepsilon_i - U_0)(H_i^{-1}\chi)(r), & \forall r \in [0, a),\\ \varepsilon_i(H_i^{-1}\chi)(r), & \forall r \geqslant a\end{cases},\ i = 1,\,2. \tag{40}$$

Можно проверить тождество, аналогичное обобщённому тождеству Лагранжа, доказанному в работе [14]:

$$\chi_1(r)\sum_{i=1,\,2}(H_i\chi_2)(r) - \chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}(H_i\chi_1)(r) =$$

$$= \sum_{i=1,\,2} m_i^2[\chi_1(r)(H_i^{-1}\chi_2(r) - \chi_2(r)(H_i^{-1}\chi_1(r)] + \sum_{i=1,\,2}[\chi_1'(r)(H_i^{-1}\chi_2'(r) - \chi_2'(r)(H_i^{-1}\chi_1'(r)] -$$

$$- \partial_r\sum_{i=1,\,2}[\chi_1(r)(G_i\chi_2)(r) - \chi_2(r)(G_i\chi_1)(r)].$$

С помощью (40) при $r > a$ это можно переписать в виде

$$\chi_1(r)\sum_{i=1,\,2}(H_i\chi_2)(r) - \chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}(H_i\chi_1)(r) =$$

$$= \sum_{i=1,\,2} m_i^2[\varepsilon_{i1}(H_i^{-1}\chi_1(r))(H_i^{-1}\chi_2(r) - \varepsilon_{i2}(H_i^{-1}\chi_2(r))(H_i^{-1}\chi_1(r)] +$$

$$+ \sum_{i=1,\,2}[\varepsilon_{i1}(H_i^{-1}\chi_1(r))(H_i^{-1}\chi_2'(r) - \varepsilon_{i2}(H_i^{-1}\chi_2(r))(H_i^{-1}\chi_1'(r)] -$$

$$- \partial_r\sum_{i=1,\,2}[\chi_1(r)(G_i\chi_2)(r) - \chi_2(r)(G_i\chi_1)(r)].$$

При $r \in [0, a)$ здесь надо заменить ε_{ik} на $\varepsilon_{ik} - U_0$. В результате получаем:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\rho(r) = -\partial_r\left[\chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(r) - \chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(r)\right], \tag{41}$$

где

$$\rho(r) = \chi_1(r)\chi_2(r) + \sum_{i=1,\,2} \left[m_i^2 (H_i^{-1}\chi_1)(r)(H_i^{-1}\chi_2)(r) + (G_i\chi_1)(r)(G_i\chi_2)(r)\right]. \qquad (42)$$

Проинтегрируем (41):

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_0^R \rho(r)\,dr = \left[\chi_2(0)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(0) - \chi_2(r)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(0)\right] - \\ - \left[\chi_2(R)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(R) - \chi_2(R)\sum_{i=1,\,2}(G_i\chi_1)(R)\right]. \qquad (43)$$

Пусть $\chi_2(r) \equiv \chi_1^*(r)$, тогда $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^*$. Принятые нами условия (17), (18) и (19) приводят к тому, что правая часть равенства (41) исчезает, а поскольку

$$\int_0^R \rho(r)\,dr > 0,$$

то это означает, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$, т. е. наша граничная задача может иметь нетривиальные решения лишь при вещественных ε (все спектральные значения вещественны).

Докажем теперь ортогональность решений нашей задачи, соответствующих разным значениям спектрального параметра ε. Заменим в (43) $\chi_2(r)$ на $\chi_2^*(r)$, причём $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Тогда получаем, что из наших условий следует

$$\int_0^\infty \left[\chi_1(r)\chi_2^*(r) + \sum_{i=1,\,2}\left(m_i^2 (H_i^{-1}\chi_1)(r)(H_i^{-1}\chi_2^*)(r) + (G_i\chi_1)(r)(G_i\chi_2^*)(r)\right)\right] = 0.$$

Легко видеть, что левая часть этого равенства вполне соответствует требованиям, налагаемым на скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве. Таким образом, наша задача является самосопряжённой. Она вполне аналогична задаче Штурма—Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка и имеет дискретный спектр [22].

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория): 5-е изд. М.: Физматлит, 2001. 808 с.

2. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля: в 2 т. / пер. с англ. Т. 1. М.: Мир, 1984. 448 с.

3. *Dirac P. A. M., Fock V. A., Podolsky B.* On quantum electrodynamics // Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion. 1932. Bd. 2. S. 468–479.

4. *Pauli W., Weisskopf V. F.* Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung // Helv. Phys. Acta. 1934. Vol. 7. P. 709.

5. *Brett A. M., Okolowski J. A.* Relativistic two-body scattering // Nuovo Cim. (A). 1968. Vol. LVIII, N 4. P. 824–834.

6. *Gara A., Durand L.* Matrix method for the numerical solution of relativistic wave equation // J. Math. Phys. 1990. Vol. 31. P. 2237.

7. *Durand B., Durand L.* Analitic solution of the relativistic Coulomb problem for spinless Salpeter equation // Phys. Rev. (D). 1983. Vol. 28. P. 396.

8. *Бъёркен Дж., Дрелл С.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика / пер. с англ. М.: Наука, 1978. 294 с.

9. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики / пер. с англ. М.: Наука, 1979. 408 с.

10. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
11. *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 394 с.
12. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 486 с.
13. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984. 360 с.
14. *Лагодинский В. М.* Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2005. 110 с.
15. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача об S-состояниях пионного атома в релятивистской квантовой механике без учёта сильного взаимодействия // Вестник СПбГУ. Серия 4. Физика. Химия. 2009. Вып. 2. С. 143–155.
16. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Релятивистское уравнение Шрёдингера со ступенчатым потенциалом // Вестник СПбГУ. Серия 4. Физика. Химия. 2011. Вып. 2. С. 3–14.
17. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача о столкновении бесспиновой частицы с идеальным зеркалом конечной массы в релятивистской квантовой механике // Вестник СПбГУ. Серия 4. Физика. Химия. 2012. Вып. 4. С. 3–13.
18. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Модельный дельта-потенциал в релятивистской квантовой механике // Вестник СПбГУ. Серия 4. Физика. Химия. 2014. Т. 1 (59), вып. 2. С. 156–165.
19. *Головин А. В., Лагодинский В. М.* Задача о глубокой потенциальной яме в релятивистской квантовой меанике // Вестник СПбГУ. Серия 4. Физика. Химия. 2016. Т. 3 (61), вып. 1. С. 39–52.
20. *Базь А. В., Зельдович Я. Б., Переломов А. И.* Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.
21. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: в 10 т. Т. 2. Теория поля: 5-е изд. М.: Физматлит, 2001. 562 с.
22. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. М.: Наука, 1970. 671 с.

References

1. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaia fizika: v 10 t., T. 3. Kvantovaia mekhanika (nereliativistskaia teoriia). 5-e izd.* [*Theoretical physics, in 10 volumes. Vol. 3. Quantum mechanics (nonrelativistic theory). 5^th ed.*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 808 p. (In Russian)
2. Itzykson C., Zuber J.-B. *Quantum field theory.* McGraw-Hill, 1980, vol. 1, 448 p. [Russ. ed.: Itsikson K., Ziuber Zh.-B. *Kvantovaia teoriia polia.* Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 1. 448 p.]
3. Dirac P. A. M., Fock V. A., Podolsky B. On quantum electrodynamics. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 1932, vol. 2, pp. 468–479.
4. Pauli W., Weisskopf V. F. Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung. *Helv. Phys. Acta*, 1934, vol. 7, pp. 709.
5. Brett A. M., Okolowski J. A. Relativistic two-body scattering. *Nuovo Cim. (A)*, 1968, vol. LVIII, no 4, pp. 824–834.
6. Gara A., Durand L. Matrix method for the numerical solution of relativistic wave equation. *J. Math. Phys.*, 1990, vol. 31, pp. 2237.
7. Durand B., Durand L. Analitic solution of the relativistic Coulomb problem for spinless Salpeter equation. *Phys. Rev. (D)*, 1983, vol. 28, pp. 396.
8. Bjorken J. D., Drell S. D. *Relativistic quantum fields.* Mcgraw-Hill, 1965, vol. 1, 396 p. [Russ. ed.: B'erken Dzh., Drell S. *Reliativistskaia kvantovaia teoriia.* Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 1, 294 p.]
9. Dirac P. A. M. *The principles of quantum mechanics.* Oxford, Clarendon Press, 1958. [Russ. ed.: Dirak P. A. M. *Printsipy kvantovoi mekhaniki.* Moscow, Nauka Publ., 1979, 408 p.]
10. Olver P. *Prilozhenie grupp Li k differentsial'nym uravneniiam* [*Application of groups of Li to the differential equations*]. Moscow, Mir Publ., 1989. 639 p. (In Russian)
11. Von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [*Mathematical foundations of quantum mechanics*]. Berlin, Springer Verlag, 1932. [Russ. ed.: fon Neiman I. Matematicheskie osnovy kvantovoi mekhaniki. Moscow, Nauka Publ., 1964, 394 p.]
12. Rikhtmaier R. *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki* [*Principles of modern mathematical physics*]. Moscow, Mir Publ., 1982. 486 p. (In Russian)
13. Trev F. *Vvedenie v teoriiu psevdodifferentsial'nykh operatorov i integral'nykh operatorov Fur'e* [*Introduction to the theory of pseudo-differential operators and Fourier integral operators*]. Moscow, Mir Publ., 1984, vol. 1, 360 p. (In Russian)
14. Lagodinski V. M. *Golomorfnye funktsii differentsial'nykh operatorov i differentsial'nye uravneniia beskonechnogo poriadka* [*Holomorphic functions of differential operators and differential equations of an infinite order. PhD phys. and math. sci. thesis*]. St. Petersburg, 2005. 110 p. (In Russian)

15. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Zadacha ob S-sostoianiiakh pionnogo atoma v reliativistskoi kvantovoi mekhanike bez ucheta sil'nogo vzaimodeistviia [S-states problem in pion atom without strong nuclear forces in relativistic quantum mechanics]. *Vestnik St. Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2009, iss. 2, pp. 143–155. (In Russian)

16. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Reliativistskoe uravnenie Shredingera so stupenchatym potentsialom [Relativistic Shrödinger equation for step potential]. *Vestnik St. Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2011, iss. 2, pp. 3–14. (In Russian)

17. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Zadacha o stolknovenii besspinovoi chastitsy s ideal'nym zerkalom konechnoi massy v reliativistskoi kvantovoi mekhanike [A problem of spin-zero particle collision with a perfect mirror of finite mass]. *Vestnik St. Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2012, iss. 4, pp. 3–13. (In Russian)

18. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Model'nyi del'ta-potentsial v reliativistskoi kvantovoi mekhanike [Model delta-potential in relativistic quantum mechanics]. *Vestnik St. Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2014, vol. 1 (59), iss. 2, pp. 156–165. (In Russian)

19. Golovin A. V., Lagodinski V. M. Zadacha o glubokoi potentsial'noi iame v reliativistskoi kvantovoi mekhanike [Deep potential hole problem in relativistic quantum mechanics]. *Vestnik St. Petersburg University. Series 4. Physics. Chemistry*, 2016, vol. 3 (61), iss. 1, pp. 39–52. (In Russian)

20. Baz' A. V., Zel'dovich Ia. B., Perelomov A. I. *Rasseianiia, reaktsii i raspady v nereliativistskoi kvantovoi mekhanike* [*Dispersion, reactions and disintegrations in the nonrelativistic quantum mechanics*]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 544 p. (In Russian)

21. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaia fizika: v 10 t., T. 2. Teoriia polia. 5-e izd.* [*Theoretical physics, in 10 volumes. Vol. 2. Field theory.* 5^{th} *ed.*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 562 p. (In Russian)

22. Levitan B. M., Sargsian I. S. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu* [*Introduction to the spectral theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 671 p. (In Russian)

Статья поступила в редакцию 18 апреля 2017 г.

Контактная информация

Головин Александр Викторович — кандидат физико-математических наук; e-mail: golovin50@mail.ru

Лагодинский Владимир Меерович — кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: lagodinskiy@mail.ru

Golovin A. V. — PhD; e-mail: golovin50@mail.ru

Lagodinski V. M. — PhD, Associate Professor; e-mail: lagodinskiy@mail.ru