УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3
MSC 60E15, 60F15

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ НЕ МЕНЕЕ r ИЗ n СОБЫТИЙ

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены оценки сверху и снизу для вероятностей осуществления не менее r из n событий. Доказанные неравенства могут обращаться в равенства. Получены также аналогичные неравенства для условных вероятностей указанных событий относительно некоторой σ-алгебры. После усреднения обеих частей последних неравенств могут получаться более точные оценки соответствующих безусловных вероятностей. Библиогр. 20 назв.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединений событий, вероятности осуществления нескольких событий.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий такая, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события. Положим

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i},$$

где $\mathbb{I}_{A_i}$ — индикатор события A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда событие $B_i = \{\xi_n = i\}$ при $i = 0, 1, \ldots, n$ происходит только тогда, когда происходит ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если $1 \leqslant r \leqslant n$, то $U_r^n = \bigcup\limits_{i=r}^{n} B_i$ — событие, состоящее в одновременном осуществлении не менее r событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Положим

$$p_i = \mathbf{P}(B_i) \quad \text{и} \quad p_i^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

В настоящей статье мы получим новые оценки сверху и снизу для вероятностей

$$P_r = P(U_r^n) = \sum_{i=r}^{n} p_i \quad \text{и} \quad P_r^{\mathcal{A}} = P(U_r^n|\mathcal{A}) = \sum_{i=r}^{n} p_i^{\mathcal{A}}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

Подобные неравенства широко применяются в теории вероятностей и ее приложениях. Особенно важны оценки для вероятностей объединений событий P_1, которые, в частности, используются для получения обобщений и уточнений леммы Бореля—Кантелли. Получению неравенств для P_r с помощью различных методов посвящено значительное число работ (см., например, [1–20]). Для P_1 один из таких методов предложен в статьях автора [15–18]. В настоящей работе мы распространим этот метод на случай P_r с $r \geqslant 2$. При этом мы будем использовать новые представления вероятностей событий U_r^n. Оценки для $P_1^{\mathcal{A}}$ получены автором в [19]. Далее мы получим также неравенства для $P_r^{\mathcal{A}}$ при $r \geqslant 2$, основанные на представлениях вероятностей U_r^n, отличающихся от использованных в [19].

Оценки для условных вероятностей можно применять следующим образом. Предположим, что $P_r^{\mathcal{A}} \geqslant \alpha$ п. н. (почти наверное), где α — некоторая положительная случайная величина. Тогда

$$P_r = \mathbf{E} P_r^{\mathcal{A}} \geqslant \mathbf{E}\alpha.$$

В [19] читатель найдет численный пример, показывающий, что оценка P_1 таким способом может быть точнее, чем аналогичная прямая оценка P_1.

Обсудим наш метод на примере P_2 с использованием представления $P_2 = \sum\limits_{i=2}^{n} p_i$. Дальнейшие оценки основаны на различном числе моментов случайной величины ξ_n, но сейчас мы ограничимся двумя. При этом мы должны использовать только моменты, не включающие p_1. Поэтому простейшие претенденты — 2-й и 3-й факториальные моменты:

$$s_2^f = \mathbf{E}(\xi_n)_2 = \sum_{i=1}^{n} (i)_2 p_i, \quad s_3^f = \mathbf{E}(\xi_n)_3 = \sum_{i=1}^{n} (i)_3 p_i,$$

где $(x)_k = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)$ и $(x)_0 = 1$ для любых $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Здесь и далее $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множества вещественных и натуральных чисел соответственно.

Несложно проверить равенства

$$s_2^f = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(A_i A_j), \quad s_3^f = 6 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}(A_i A_j A_k).$$

Возьмем и зафиксируем натуральное число m такое, что $3 \leqslant m \leqslant n$. Положим

$$c_i = \left(1 - \frac{i}{m-1}\right)\left(1 - \frac{i}{m}\right)\left(1 + \frac{2i}{m-2}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Тогда будем иметь

$$0 \leqslant \sum_{i=2}^{n} c_i p_i = \sum_{i=2}^{n} p_i - \frac{3}{(m)_2} s_2^f + \frac{2}{(m)_3} s_3^f. \tag{1}$$

Следовательно,

$$P_2 = \sum_{i=2}^{n} p_i \geqslant \frac{3}{(m)_2} s_2^f - \frac{2}{(m)_3} s_3^f = a_1 s_2^f + a_2 s_3^f. \tag{2}$$

Так как это неравенство выполнено для всех m, мы можем провести оптимизацию по m. Неравенство в (1) превращается в равенство для распределений ξ_n, сосредоточенных на 0, 1, $m-1$ и m. Выберем такое распределение $\mathcal{P}^*$ среди распределений с одинаковыми моментами s_2^f и s_3^f. Для этого положим $p_{m-1}^* = \mathcal{P}^*(\{m-1\})$, $p_m^* = \mathcal{P}^*(\{m\})$ и решим систему

$$\begin{aligned} (m-1)_2\, p_{m-1}^* + (m)_2\, p_m^* &= s_2^f, \\ (m-1)_3\, p_{m-1}^* + (m)_3\, p_m^* &= s_3^f. \end{aligned}$$

Получим

$$p_{m-1}^* = \frac{(m-2)s_2^f - s_3^f}{(m-1)_2}, \quad p_m^* = \frac{s_3^f - (m-3)s_2^f}{(m)_2}.$$

Из условий $p^*_{m-1} \geqslant 0$ и $p^*_m \geqslant 0$ следует неравенство $2 + s^f_3/s^f_2 \leqslant m \leqslant 3 + s^f_3/s^f_2$. Заметим, что справедливо $s^f_3 \leqslant (n-2)s^f_2$. Подставляя $m = \min\{3 + [s^f_3/s^f_2], n\}$ в (2), приходим к следующему неравенству:

$$P_2 \geqslant \frac{(3(1-\theta)s^f_2 + s^f_3)(s^f_2)^3}{((3-\theta)s^f_2 + s^f_3)((2-\theta)s^f_2 + s^f_3)((1-\theta)s^f_2 + s^f_3)}, \tag{3}$$

где θ — дробная часть s^f_3/s^f_2. Заметим, что θ может быть положительным. Правая часть полученного неравенства минимальна при $\theta = 0$. Следовательно,

$$P_2 \geqslant \frac{(s^f_2)^3}{(2s^f_2 + s^f_3)(s^f_2 + s^f_3)}. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) известны (см., например, работы [5–7, 9, 10]). Отметим, что они являются аналогами неравенств для P_1, полученных в [1] и [3].

2. Представления вероятностей P_r и $P^{\mathcal{A}}_r$. Положим $J_0 = \{0\}$, $J_d = \{j = (j_1, \ldots, j_d) : \ j_k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d \leqslant n$ при всех $1 \leqslant k \leqslant d\}$ для всех $d \in \mathbb{N}$.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Пусть d — фиксированное целое число такое, что $0 \leqslant d \leqslant r$. Положим $p^{\mathcal{A}}_{i,j} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d}|\mathcal{A})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p^{\mathcal{A}}_{i,j} = p^{\mathcal{A}}_i = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A})$ для $j \in J_0$ при $d = 0$. Положим также $p_{i,j} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p_{i,j} = p_i = \mathbf{P}(B_i)$ для $j \in J_0$ при $d = 0$. Тогда*

$$P^{\mathcal{A}}_r = \sum_{i=r}^{n} \sum_{j \in J_d} \frac{1}{C^d_i}\, p^{\mathcal{A}}_{i,j} \quad \text{п. н.}, \tag{5}$$

$$P_r = \sum_{i=r}^{n} \sum_{j \in J_d} \frac{1}{C^d_i}\, p_{i,j}. \tag{6}$$

Здесь C^d_i — число сочетаний из i по d.

Доказательство. При $d = 0$ соотношения (5) и (6) очевидны. Пусть $d > 0$.

Нам достаточно доказать (5), так как из него (6) получается взятием математических ожиданий от правой и левой частей. Для этого воспользуемся равенством

$$(\xi_n)_{s+1} = (s+1)! \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{s+1} \leqslant n} \mathbb{I}_{A_{j_1} \ldots A_{j_{s+1}}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1,$$

которое несложно проверить индукцией по s.

Используя равенство $\xi_n \mathbb{I}_{B_i} = i\, \mathbb{I}_{B_i}$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$, имеем

$$\mathbb{I}_{U^n_r} = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{I}_{B_i} = \sum_{i=r}^{n} \frac{(\xi_n)_d}{(i)_d}\, \mathbb{I}_{B_i} = \sum_{i=r}^{n} \sum_{j \in J_d} \frac{d!(i-d)!}{i!} \mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d}}.$$

Переходя в этом равенстве к условным математическим ожиданиям, получим (5). □

Соотношение (6) при $r = 1$ и $d = 1$ доказано в [13]. Другие представления при $r = 1$ получены в работе автора [19].

3. Метод получения неравенств. Далее мы используем следующие обозначения. Все векторы из $\mathbb{R}^k$ мы считаем столбцами. Для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ обозначим через

v_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, его координаты. Запись $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$ для $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ является сокращением записи $v_j \leqslant u_j$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$. Положим $\mathbf{0}_d = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^k$ и $\mathbf{1}_d = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$, где индекс T обозначает транспонирование.

Наш метод основан на следующем результате из работы автора [20].

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_n$ и $\mathbf{F} = (f_{ki})_{k=1,i=1}^{\ell,n}$ — вещественная матрица, где $2 \leqslant \ell \leqslant n$. Положим $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ и*

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{F}\mathbf{z}. \tag{7}$$

Пусть для некоторого $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^\ell$ такого, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leqslant n$, вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^T \mathbf{a} = \mathbf{1}_\ell, \tag{8}$$

где $\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = (f_{ki_j})_{k=1,j=1}^{\ell,\ell}$. Пусть $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор такой, что $\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = (z_{i_1}^*, z_{i_2}^*, \ldots, z_{i_\ell}^*)^T$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = \bar{\mathbf{s}} \tag{9}$$

и $z_i^* = 0$ для всех $i \neq i_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{1}_n - \mathbf{F}^T \mathbf{a}$.

Если $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}_n$, то $Z \geqslant Z^* = z_{i_1}^* + z_{i_2}^* + \cdots + z_{i_\ell}^* = \sum\limits_{k=1}^{\ell} a_k \bar{s}_k$. Если $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}_n$, то $Z \leqslant Z^*$.

Матрицы систем (9) и (8) отличаются транспонированием. Поэтому если матрица $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}$ обратима, нужно решать только одну из этих систем. Мы будем решать систему (9). Это даст представления $z_{i_j}^*$ в виде линейных комбинаций $\bar{s}_k$. В силу того, что обратная к транспонированной матрице совпадает с транспонированной обратной, a_k будет равно сумме коэффициентов при $\bar{s}_k$ из этих представлений.

Получаемые с помощью теоремы 1 оценки обладают следующими свойствами. Во-первых, они точны в том смысле, что можно привести примеры, в которых неравенства обращаются в равенства. Действительно, если положить $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$, мы придем к равенству. Во-вторых, при добавлении еще одного момента оценки становятся точнее. Пусть по $\mathbf{z}$ мы построили $\mathbf{z}^*(\ell)$ и $\mathbf{z}^*(\ell - 1)$, используя $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_\ell$ и $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{\ell-1}$ соответственно. Если теперь по $\mathbf{z}^*(\ell)$ мы построим соответствующий вектор с использованием $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{\ell-1}$, то снова получим $\mathbf{z}^*(\ell - 1)$. Поэтому с увеличением числа моментов мы получим более точную оценку.

Схема нашего метода такова. Выберем сначала число ℓ моментов, входящих в оценку. Затем выберем тип используемых моментов, т. е. $\mathbf{F}$. Ниже мы будем использовать степенные моменты, но это не обязательно. После этого определим $\mathbf{i}$ и найдем $\mathbf{z}^*$ и $\mathbf{a}$. Затем найдем $\mathbf{c}$ и последуем образцу нашего примера из первого параграфа. Там $\ell = 2$, $f_{1i} = (i)_2$, $f_{2i} = (i)_3$, $i_1 = m - 1$, $i_2 = m$, где m — параметр, позволяющий варьировать набор индексов и выбирать наилучший. Отметим, что в примере сначала был выписан $\mathbf{c}$ с нужными свойствами, а потом найден $\mathbf{a}$ (см. (2)). В общей ситуации удобнее сначала находить $\mathbf{a}$, а затем вычислять $\mathbf{c}$ и проверять его свойства.

3. Неравенства для P_r. Запишем представление (6) в виде

$$P_r = \sum_{j \in J_d} P_r(j), \quad \text{где} \quad P_r(j) = \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{C_i^d} p_{i,j}.$$

Для каждого j мы получим с помощью теоремы 1 оценки для $P_r(j)$. Подставляя их в последнее представление, получим неравенства для P_r.

Зафиксируем $j \in J_d$. Положим $z_i = p_{i,j}/C_i^d$ при $r \leqslant i \leqslant n$, $z_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r-1$ и $f_{ki} = (i)_{r+k-1}$ при всех $1 \leqslant k \leqslant \ell$ и $1 \leqslant i \leqslant n$.

Тогда (7) превращается в равенство

$$\bar{s}_k(j) = \sum_{i=1}^{n} (i)_{r+k-1} z_i = d! \sum_{i=r+k-1}^{n} (i-d)_{r+k-1-d}\, p_{i,j}.$$

Отметим, что $p_{i,j} = 0$ при $i \leqslant d-1$ и $(i-d)_{r+k-1-d} = 0$ при $d \leqslant i \leqslant r+k-2$. Поэтому получаем

$$\bar{s}_k(j) = d! \sum_{i=1}^{n} (i-d)_{r+k-1-d}\, p_{i,j}. \qquad (10)$$

Заметим, что $\bar{s}_k(j)$ могут быть выражены в виде сумм пересечений событий A_i. Например, при $d = r$ мы имеем

$$\bar{s}_1(j) = r! \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = r! \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \dots A_{j_r}} \right) = r! \mathbf{E} \mathbb{I}_{U_1^n A_{j_1} \dots A_{j_r}} = r! \mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_r}),$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_2(j) = r! \sum_{i=1}^{n} (i-r) p_{i,j} &= r! \left(\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} i \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{A_{j_1} \dots A_{j_r}} \right) - r\mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_r}) \right) = \\ &= r! \left(\mathbf{E} \left(\xi_n \mathbb{I}_{A_{j_1} \dots A_{j_r}} \right) - r\mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_r}) \right) = \\ &= r! \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i A_{j_1} \dots A_{j_r}) - r\mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_r}) \right) = \\ &= r! \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j_1, \dots, i \neq j_r} \mathbf{P}(A_i A_{j_1} \dots A_{j_r}). \end{aligned}$$

Кроме того, при $d = 0$ и $r = 2$ из (10) вытекают равенства $\bar{s}_1(0) = s_2^f$ и $\bar{s}_2(0) = s_3^f$. Поэтому неравенства (3) и (4) — частные случаи неравенства (11) из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\ell = 2$. Определим $\bar{s}_1(j)$ и $\bar{s}_2(j)$ по формуле (10). Положим $\bar{\delta}(j) = \bar{s}_2(j)/\bar{s}_1(j)$, $\bar{\theta}(j) = \bar{\delta}(j) - [\bar{\delta}(j)]$. Тогда*

$$P_r \geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{((r+1)(1-\bar{\theta}(j)) + \bar{\delta}(j))\, \bar{s}_1(j)}{(r+1-\bar{\theta}(j)+\bar{\delta}(j))_{r+1}} \geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{\bar{s}_1(j)}{(r+\bar{\delta}(j))_r}. \qquad (11)$$

Доказательство. Положим $i_1 = m-1$ и $i_2 = m$, где $r+1 \leqslant m \leqslant n$. Решим систему (9):

$$\begin{aligned} (m-1)_r z^*_{m-1} + (m)_r z^*_m &= \bar{s}_1(j), \\ (m-1)_{r+1} z^*_{m-1} + (m)_{r+1} z^*_m &= \bar{s}_2(j). \end{aligned}$$

Получим

$$z^*_{m-1} = \frac{(m-r)\bar{s}_1(j) - \bar{s}_2(j)}{(m-1)_r}, \quad z^*_m = \frac{\bar{s}_2(j) - (m-r-1)\bar{s}_1(j)}{(m)_r}.$$

Отсюда следуют равенства

$$a_1 = \frac{r+1}{(m)_r}, \quad a_2 = -\frac{r}{(m)_{r+1}}.$$

Вместо неравенств $c_i \geqslant 0$ для всех i удобнее проверять $1 - c_i \leqslant 1$ для всех i. Так как

$$\frac{1-c_{i+1}}{1-c_i} = \frac{(i+1)((r+1)m - ri - 2r)}{(i+1-r)((r+1)m - ri - r)} > 1$$

при $i < m-1$, последовательность $1 - c_i$ возрастает при $i \leqslant m-1$. Аналогично покажем, что последовательность $1 - c_i$ убывает при $i \geqslant m$. Таким образом, $1 - c_i$ достигает максимума, равного 1, при $i = m-1$ и $i = m$.

Из условий $z^*_{m-1} \geqslant 0$ и $z^*_m \geqslant 0$ заключаем, что $r + \bar{\delta}(j) \leqslant m \leqslant r + 1 + \bar{\delta}(j)$. Заметим, что $\bar{\delta}(j) \leqslant (n-r)$. Положим $m = \min\{r + 1 + [\bar{\delta}(j)], n\}$.

По теореме 1 мы имеем $P_r(j) \geqslant z^*_{m-1} + z^*_m$. Подставляя в последнее неравенство выражения для m, z^*_{m-1} и z^*_m, мы приходим к следующей оценке:

$$P_r(j) \geqslant \frac{((r+1)(1-\bar{\theta}(j))\bar{s}_1(j) + \bar{s}_2(j))\,(\bar{s}_1(j))^{r+1}}{\prod\limits_{k=1}^{r+1}((k-\bar{\theta}(j))\bar{s}_1(j) + \bar{s}_2(j))}. \qquad (12)$$

Отсюда следует первое неравенство в (11).

Покажем, что правая часть неравенства (12) минимальна при $\bar{\theta}(j) = 0$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Для любых $r \in \mathbb{N}$, $u > 0$ и $x \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$g_r(x) = \frac{(u+r+x)_{r+1}}{u+(r+1)x} \leqslant (u+r)_r = g_r(1).$$

Доказательство. Для $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ положим

$$h_r(x) = \frac{(u+(r+1)+x)(u+(r+1)x)}{u+(r+2)x}.$$

Мы имеем

$$h_r'(x) = \frac{(r+1)(r+2)x^2 + 2(r+1)ux - (r+1)u}{(u+(r+2)x)^2}.$$

Так как $h_r'(0) < 0$, $h_r'(1) > 0$ и $h_r'(x_0) = 0$ в единственной точке $x_0 \in [0,1]$, функция $h_r(x)$ достигает максимума на концах интервала $[0,1]$, равного $u + r + 1$.

Доказательство неравенства $g_r(x) \leqslant g_r(1)$ проведем индукцией по r. Если $r = 1$, то неравенство выполнено в силу $g_1(x) = h_0(x)$. База индукции доказана. Предположим теперь, что неравенство выполнено для r и докажем его для $r+1$. Мы имеем $g_{r+1}(x) = g_r(x)h_r(x) \leqslant g_r(1)h_r(1) = g_{r+1}(1)$. Это и есть нужное неравенство для $r+1$. Лемма полностью доказана. $\square$

По лемме 2 с $u = \bar{s}_2(j)/\bar{s}_2(j)$ и $x = 1 - \bar{\theta}(j)$ мы получим

$$P_r(j) \geqslant \frac{(\bar{s}_1(j))^{r+1}}{(r\bar{s}_1(j) + \bar{s}_2(j)) \cdot \ldots \cdot (\bar{s}_1(j) + \bar{s}_2(j))}$$

при $\bar{s}_2(j) > 0$. Отсюда следует второе неравенство в (11). $\square$

Перейдем к оценкам сверху при $\ell = 2$.

Если бы мы захотели, чтобы в примере во введении выполнялось $c_i \leqslant 0$ для всех $i \geqslant 2$, то в первых двух сомножителях вместо $m-1$ и m мы взяли бы 2 и n соответственно. Тогда мы пришли бы к оценке для P_2 сверху. Далее мы поступим аналогично, учитывая, что пример — частный случай нашей более общей ситуации. При этом у нас нет возможности варьировать параметр, как мы это делали в оценке снизу. В оценках сверху такая возможность появляется при $\ell \geqslant 3$.

Теорема 3. *Пусть $\ell = 2$. Определим $\bar{s}_1(j)$ и $\bar{s}_2(j)$ по формуле (10). Тогда*

$$P_r \leqslant \sum_{j\in J_d} \left(\frac{\bar{s}_1(j)}{r!} - \frac{\bar{s}_2(j)((n)_r - r!)}{(n)_r r!} \right).$$

Доказательство. Положим $i_1 = r$ и $i_2 = n$. Тогда система (9) примет вид

$$\begin{aligned} &(r)_r z_r^* + (n)_r z_n^* = \bar{s}_1(j), \\ &(r)_{r+1} z_r^* + (n)_{r+1} z_n^* = \bar{s}_2(j). \end{aligned}$$

Учитывая равенства $(r)_{r+1} = 0$ и $(r)_r = r!$, получим

$$z_r^* = \frac{(n-r)\bar{s}_1(j) - \bar{s}_2(j)}{(n-r)r!}, \quad z_n^* = \frac{\bar{s}_2(j)}{(n)_{r+1}}.$$

По теореме 1 получаем требуемое. $\square$

Перейдем к случаю $\ell = 3$. Здесь мы также начнем с оценок снизу.

Теорема 4. *Пусть $\ell = 3$. Определим $\bar{s}_1(j)$, $\bar{s}_2(j)$ и $\bar{s}_3(j)$ по формуле (10). Положим $\bar{\delta}_1(j) = (n-r)\bar{s}_1(j) - \bar{s}_2(j)$, $\bar{\delta}_2(j) = (n-r-1)\bar{s}_2(j) - \bar{s}_3(j)$, $\bar{\delta}(j) = \bar{\delta}_2(j)/\bar{\delta}_1(j)$, $\bar{\theta}(j) = \bar{\delta} - [\bar{\delta}]$. Тогда*

$$\begin{aligned} P_r \geqslant \sum_{j\in J_d} \Bigg(&\frac{\bar{s}_1(j)}{(n)_r} + \frac{\bar{\delta}_1(j)(1-\bar{\theta}(j))}{(n-r+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))} \left(\frac{1}{(r+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))_r} - \frac{1}{(n)_r} \right) + \\ &+ \frac{\bar{\delta}_1(j)\bar{\theta}(j)}{(n-r+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j)-1)} \left(\frac{1}{(r+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j)+1)_r} - \frac{1}{(n)_r} \right) \Bigg). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $i_1 = m-1$, $i_2 = m$ и $i_3 = n$, где $r+1 \leqslant m \leqslant n-1$. Система (9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(m-1)_r z_{m-1}^* + (m)_r z_m^* + (n)_r z_n^* = \bar{s}_1(j), \\ &(m-1)_{r+1} z_{m-1}^* + (m)_{r+1} z_m^* + (n)_{r+1} z_n^* = \bar{s}_2(j), \\ &(m-1)_{r+2} z_{m-1}^* + (m)_{r+2} z_m^* + (n)_{r+2} z_n^* = \bar{s}_3(j). \end{aligned}$$

Выпишем решения системы (9):

$$\begin{aligned} z_{m-1}^* &= \frac{(m-r)(n-r)\bar{s}_1(j) - (n+m-2r-1)\bar{s}_2(j) + \bar{s}_3(j)}{(m-1)_r(n-m+1)}, \\ z_m^* &= -\frac{(m-r-1)(n-r)\bar{s}_1(j) - (n+m-2r-2)\bar{s}_2(j) + \bar{s}_3(j)}{(m)_r(n-m)}, \\ z_n^* &= \frac{(m-r-1)(m-r)\bar{s}_1(j) - (2m-2r-2)\bar{s}_2(j) + \bar{s}_3(j)}{(n)_r(n-m)(n-m+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(m-r-1)(m-r)}{(n-m)(n-m+1)(n)_r} - \frac{(m-r-1)(n-r)}{(n-m)(m)_r} + \frac{(m-r)(n-r)}{(n-m+1)(m-1)_r},\\
a_2 &= -\frac{2(m-r-1)}{(n-m)(n-m+1)(n)_r} + \frac{n-m+2(m-r-1)}{(n-m)(m)_r} - \frac{n-m+1+2(m-r-1)}{(n-m+1)(m-1)_r},\\
a_3 &= \frac{1}{(n-m)(n-m+1)(n)_r} - \frac{1}{(n-m)(m)_r} + \frac{1}{(n-m+1)(m-1)_r}.
\end{aligned}
$$

Далее, мы имеем

$$1-c_i = (i)_r a_1 + (i)_{r+1} a_2 + (i)_{r+2} a_3 = (i)_r (a_1 + (i-r)a_2 + (i-r)(i-r-1)a_3).$$

Следовательно, неравенство

$$\frac{1-c_{i+1}}{1-c_i} = \frac{(i+1)(a_1+(i-r+1)a_2+(i-r+1)(i-r)a_3)}{(i-r+1)(a_1+(i-r)a_2+(i-r)(i-r-1)a_3)} > 1$$

эквивалентно $ra_1 + (r+1)(i-r+1)a_2 + (r+2)(i-r+1)(i-r)a_3 > 0$. По построению $c_{m-1} = c_m = 0$. Значит, $ra_1+(r+1)(m-r)a_2+(r+2)(m-r)(m-r-1)a_3 = 0$. Вычитая это равенство из последнего неравенства, получим

$$(r+1)(i-m+1)a_2 + (r+2)(i-m+1)(i+m-2r)a_3 > 0.$$

Поэтому нам нужно проверить, что для всех $i < m-1$ выполняется неравенство

$$(r+1)a_2 + (r+2)(i+m-2r)a_3 < 0.$$

Последнее неравенство выполнено, так как его левая часть возрастает по i (в силу $a_3 > 0$) и равна нулю при $i = m-1$. Поэтому последовательность $1-c_i$ возрастает при $i \leqslant m-1$. Аналогично доказывается, что $1-c_i$ убывает при $i \geqslant m$. Следовательно, $1-c_i$ достигает максимума, равного 1, при $i = m-1$ и $i = m$.

Из условий $z^*_{m-1} \geqslant 0$ и $z^*_m \geqslant 0$ следует неравенство $m-r-1 \leqslant \bar\delta(j) \leqslant m-r$. Положим $m = \min\{r+1+[\bar\delta], n-1\}$. Тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
z^*_{m-1} &= \frac{\bar\delta_1(j)(1-\bar\theta(j))}{(r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))_r(n-r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))},\\
z^*_m &= \frac{\bar\delta_1(j)\bar\theta(j)}{(r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j)+1)_r(n-r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j)-1)},\\
z^*_n &= \frac{\bar s_1(j)}{(n)_r} - \frac{\bar\delta_1(j)}{(n)_r}\left(\frac{\bar\theta(j)}{(n-r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j)-1)} + \frac{1-\bar\theta(j)}{(n-r+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))}\right).
\end{aligned}
$$

По теореме 1 получаем требуемое. □

Перейдем к оценкам сверху.

Теорема 5. *Пусть $\ell = 3$. Определим $\bar s_1(j)$, $\bar s_2(j)$ и $\bar s_3(j)$ по формуле (10). Положим $\bar\delta(j) = \bar s_3(j)/\bar s_2(j)$, $\bar\theta(j) = \bar\delta(j) - [\bar\delta(j)]$. Тогда*

$$
\begin{aligned}
P_r \leqslant \sum_{j\in J_d} \Bigg(\frac{\bar s_1(j)}{r!} &+ \frac{\bar s_2(j)(1-\bar\theta(j))}{(1+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))}\left(\frac{1}{(r+1+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))_r} - \frac{1}{r!}\right) + \\
&+ \frac{\bar s_2(j)\bar\theta(j)}{(2+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))}\left(\frac{1}{(r+2+\bar\delta(j)-\bar\theta(j))_r} - \frac{1}{r!}\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Положим $i_1 = r$, $i_2 = m-1$ и $i_3 = m$, где $r+2 \leqslant m \leqslant n$. Система (9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(r)_r z_r^* + (m-1)_r z_{m-1}^* + (m)_r z_m^* = \bar{s}_1(j), \\ &(r)_{r+1} z_r^* + (m-1)_{r+1} z_{m-1}^* + (m)_{r+1} z_m^* = \bar{s}_2(j), \\ &(r)_{r+2} z_r^* + (m-1)_{r+2} z_{m-1}^* + (m)_{r+2} z_m^* = \bar{s}_3(j). \end{aligned}$$

Если в этой системе заменить $(r)_r$, $(r)_{r+1}$, $(r)_{r+2}$ и z_r^* на $(n)_r$, $(n)_{r+1}$, $(n)_{r+2}$ и z_n^* соответственно, мы получим систему из доказательства теоремы 4. Учитывая это и равенство $(r)_{r+1} = (r)_{r+2} = 0$, мы можем сразу выписать z_r^*, z_{m-1}^*, z_m^* и a_1, a_2, a_3, заменив n на r в формулах из доказательства теоремы 4. В результате получим

$$\begin{aligned} &z_r^* = \frac{(m-r)(m-r-1)\bar{s}_1(j) - 2(m-r-1)\bar{s}_2(j) + \bar{s}_3(j)}{r!(m-r)(m-r-1)}, \\ &z_{m-1}^* = \frac{(m-r-1)\bar{s}_2(j) - \bar{s}_3(j)}{(m-1)_{r+1}}, \quad z_m^* = \frac{\bar{s}_3(j) - (m-r-2)\bar{s}_2(j)}{(m)_{r+1}}, \\ &a_1 = \frac{1}{r!}, \quad a_2 = -\frac{2}{r!(m-r)} + \frac{m-r-1}{(m-1)_{r+1}} - \frac{m-r-2}{(m)_{r+1}}, \\ &a_3 = \frac{1}{r!(m-r)(m-r-1)} - \frac{1}{(m-1)_{r+1}} + \frac{1}{(m)_{r+1}}. \end{aligned}$$

Проверка условия $c_i \leqslant 0$ при всех i проводится так же, как в доказательстве теоремы 4.

Условия $z_{m-1}^* \geqslant 0$ и $z_m^* \geqslant 0$ дают $m-r-2 \leqslant \bar{\delta}(j) \leqslant m-r-1$. Возьмем $m = \min\{r+2+[\bar{\delta}(j)], n\}$. Получим

$$\begin{aligned} &z_r^* = \frac{\bar{s}_1(j)}{r!} - \frac{\bar{s}_2(j)}{r!}\left(\frac{(1-\bar{\theta}(j))}{(1+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))} + \frac{\bar{\theta}(j)}{(2+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))}\right), \\ &z_{m-1}^* = \frac{\bar{s}_2(j)(1-\bar{\theta}(j))}{(r+1+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))_{r+1}}, \quad z_m^* = \frac{\bar{s}_2(j)\bar{\theta}(j)}{(r+2+\bar{\delta}(j)-\bar{\theta}(j))_{r+1}}. \end{aligned}$$

По теореме 1 отсюда получаем требуемое. □

4. Неравенства для $P_r^{\mathcal{A}}$. Теперь мы приведем результаты для условных вероятностей, аналогичные результатам из предыдущего параграфа. Их доказательства проводятся по той же схеме, что и выше. Нужно лишь сначала зафиксировать варианты всех используемых условных вероятностей. Затем нужно объединить все множества нулевой вероятности, на которых соответствующие условные вероятности не принадлежат $[0,1]$. Таких множеств конечное число. Поэтому их объединение $\mathcal{N}$ будет иметь нулевую вероятность. Зафиксировав $\omega \in \overline{N}$, мы придем к тем неравенствам, которые уже доказали. Более подробное рассуждение для $P_1^{\mathcal{A}}$ читатель может найти в [19].

Определим случайные величины $\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j)$ по формуле (10) с заменой $p_{i,j}$ на $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$.

Теорема 6. *Положим $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)/\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)]$. Тогда*

$$P_r^{\mathcal{A}} \geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{((r+1)(1-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)) + \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))\,\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{(r+1-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))_{r+1}} \geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{(r+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))_r} \quad \text{п. н.}$$

Теорема 7. *Выполняется неравенство*

$$P_r^{\mathcal{A}} \leqslant \sum_{j\in J_d}\left(\frac{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{r!} - \frac{\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)((n)_r - r!)}{(n)_r r!}\right) \quad \textit{п. н.}$$

При $\ell = 3$ мы получим следующие аналоги теорем 4 и 5.

Теорема 8. *Определим случайные величины* $\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j) = (n-r)\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j) = (n-r-1)\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j)/\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}} - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}]$. *Тогда*

$$P_r^{\mathcal{A}} \geqslant \sum_{j\in J_d}\left(\frac{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{(n)_r} + \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)(1-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))}{(n-r+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))}\left(\frac{1}{(r+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))_r} - \frac{1}{(n)_r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)}{(n-r+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)-1)}\left(\frac{1}{(r+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)+1)_r} - \frac{1}{(n)_r}\right)\right) \quad \textit{п. н.}$$

Теорема 9. *Положим* $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j)/\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)]$. *Тогда*

$$P_r^{\mathcal{A}} \leqslant \sum_{j\in J_d}\left(\frac{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{r!} + \frac{\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)(1-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))}{(1+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))}\left(\frac{1}{(r+1+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))_r} - \frac{1}{r!}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)}{(2+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))}\left(\frac{1}{(r+2+\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))_r} - \frac{1}{r!}\right)\right).$$

Отметим, что результаты предыдущего параграфа не могут быть получены взятием математических ожиданий от правых и левых частей неравенств, записанных в формулировках теорем 6–9. Это приведет к новым оценкам, которые могут быть лучше неравенств в параграфе 3. В [19] есть соответствующий пример для вероятностей объединений событий.

Литература

1. *Chung K. L., Erdős P.* On the application of the Borel—Cantelli lemma // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 179–186.

2. *Gallot S.* A bound for the maximum of a number of random variables // J. Appl. Probab. 1966. Vol. 3. P. 556–558.

3. *Dawson D. A., Sankoff D.* An inequality for probabilities // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18. P. 504–507.

4. *Kounias E. G.* Bounds for the probability of a union with applications // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39. P. 2154–2158.

5. *Kwerel S. M.* Bounds on the probability of the union and intersection of m events // Adv. Appl. Probab. 1975. Vol. 7. P. 431–448.

6. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems // J. of Amer. Statist. Assoc. 1975. Vol. 70. P. 472–479.

7. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events for systems partially specified by $S_1, S_2, \cdots S_k, 2 \leqq k < m$ // J. Appl. Probab. 1975. Vol. 12. P. 612–619.

8. *Móri T. F., Székely G. J.* A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities // J. Appl. Probab. 1985. Vol. 22. P. 836–843.

9. *Boros E., Prékopa A.* Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs // Math. Oper. Research. 1989. Vol. 14. P. 317–342.

10. *Kounias S., Sotirakoglou K.* Upper and lower bounds for the probability that r events occur // J. Math. Programming. Oper. Research. 1993. Vol. 27, N 1–2. P. 63–78.

11. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. New York: Springer-Verlag. 1996.

12. *de Caen D.* A lower bound on the probability of a union // Discrete Math. 1997. Vol. 169. P. 217–220.

13. *Kuai H., Alajaji F., Takahara G.* A lower bound on the probability of a finite union of events // Discrete Math. 2000. Vol. 215. P. 147–158.

14. *Prékopa A.* Inequalities for discrete higher order convex functions // J. Math. Inequalities. 2009. Vol. 4. P. 485–498.

15. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

16. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59), вып. 2. С. 201–210.

17. *Frolov A. N.* On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungarica. 2015. Vol. 52, N 1. P. 102–128.

18. *Фролов А. Н.* Об оценивании вероятностей объединений событий с приложениями к лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60), вып. 3. С. 399–404.

19. *Фролов А. Н.* О неравенствах для условных вероятностей объединений событий и условной лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3(61), вып. 4. С. 651–662. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.415.

20. *Frolov A. N.* On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality // Statist. Probab. Lett. 2017. Vol. 126. P. 150–156. https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.03.002.

Статья поступила в редакцию 27 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторе

Фролов Андрей Николаевич — доктор физико-математических наук, доцент; a.frolov@spbu.ru

ON INEQUALITIES FOR PROBABILITIES THAT AT LEAST r FROM n EVENTS OCCUR

Andrei N. Frolov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.frolov@spbu.ru

Upper and lower bounds for probabilities that at least r from n events occur are obtained. The inequalities may turn to equalities. Similar bounds are derived for conditional probabilities given a σ-field of events. Taking an expectation from both parts of such inequalities may yield better bounds of unconditional probabilities of events under consideration. Refs 20.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of union of events, probabilities that at least r events occur.

References

1. Chung K. L., Erdős P., "On the application of the Borel—Cantelli lemma", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

2. Gallot S., "A bound for the maximum of a number of random variables", *J. Appl. Probab.* **3**, 556–558 (1966).

3. Dawson D. A., Sankoff D., "An inequality for probabilities", *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 504–507 (1967).

4. Kounias E. G., "Bounds for the probability of a union with applications", *Ann. Math. Statist.* **39**, 2154–2158 (1968).

5. Kwerel S. M., "Bounds on the probability of the union and intersection of m events", *Adv. Appl. Probab.* **7**, 431–448 (1975).

6. Kwerel S. M., "Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems", *J. of Amer. Statist. Assoc.* **70**, 472–479 (1975).

7. Kwerel S. M., "Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events for systems partially specified by $S_1, S_2, \cdots S_k, 2 \leqq k < m$", *J. Appl. Probab.* **12**, 612–619 (1975).

8. Móri T. F., Székely G. J., “A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities”, *J. Appl. Probab.* **22**, 836–843 (1985).

9. Boros E., Prékopa A., “Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs”, *Math. Oper. Research* **14**, 317–342 (1989).

10. Kounias S., Sotirakoglou K., “Upper and lower bounds for the probability that r events occur”, *J. Math. Programming. Oper. Research.* **27**(1–2), 63–78 (1993).

11. Galambos J., Simonelli I., *Bonferroni-type inequalities with applications* (Springer-Verlag, New York, 1996).

12. de Caen D., “A lower bound on the probability of a union”, *Discrete Math.* **169**, 217–220 (1997).

13. Kuai H., Alajaji F., Takahara G., “A lower bound on the probability of a finite union of events”, *Discrete Math.* **215**, 147–158 (2000).

14. Prékopa A., “Inequalities for discrete higher order convex functions”, *J. Math. Inequalities* **4**, 485–498 (2009).

15. Frolov A. N., “Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma”, *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012).

16. Frolov A. N., “On inequalities for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**, Issue 2, 68–75 (2014). DOI: 10.3103/S1063454114020034.

17. Frolov A. N., “On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma”, *Studia Sci. Math. Hungarica* **52**(1), 102–128 (2015).

18. Frolov A. N., “On estimation of probabilities of unions of events with applications to the Borel–Cantelli lemma”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **48**, Issue 3, 175–180 (2015). DOI: 10.3103/S1063454115030036.

19. Frolov A. N., “On inequalities for conditional probabilities of unions of events and the conditional Borel–Cantelli lemma”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **49**, Issue 4, 379–388 (2016). DOI: 10.3103/S1063454116040063.

20. Frolov A. N., “On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality”, *Statist. Probab. Lett.* **126**, 150–156 (2017). https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.03.002.

Для цитирования: Фролов А. Н. О неравенствах для вероятностей осуществления не менее r из n событий // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 477–488. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.310

For citation: Frolov A. N. On inequalities for probabilities that at least r from n events occur. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 477–488. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.310