УДК 517
MSC 26D15

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3

ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К НЕРАВЕНСТВУ ГЁЛЬДЕРА. I

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. Установлено, что, если множество «резонансных» точек каждой из этих функций не пусто и выполнено «нерезонансное» условие (понятия, введенные автором для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$), то справедливо неравенство

$$\sup_{a,b \in R^1} \left| \int\limits_a^b \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, а $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, — это некоторые специально построенные нормированные пространства.

Кроме того, дано условие ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^1$. Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: неравенство Гёльдера.

Введение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^1$ — множество положительной меры Лебега, $m \geqslant 2$, числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(D), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(D)$. Если

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

то согласно неравенству Гёльдера (см., например, [1, с. 232]) можем записать

$$\left| \int\limits_D \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(D)}. \tag{1}$$

Если же

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1 \tag{2}$$

и $\operatorname{mes} D < +\infty$, то, очевидно, выполняется неравенство, аналогичное неравенству (1).

В настоящей работе предполагается, что $\operatorname{mes} D = \infty$, и рассматривается вопрос об оценке интеграла от произведения функций при условии выполнения (2).

Статья состоит из введения и трех параграфов. Первый параграф носит вспомогательный характер. Во втором — для любых пространств $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p_1, p \in (1, +\infty]$, и любой функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ вводится понятие (определение 2.1) «множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$», в дальнейшем «резонансное» множество. Оно является подмножеством $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и для тригонометрических полиномов (пример 2.1) относительно любого пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.306

представляет собой множество частот (показателей Фурье) или спектр этого полинома. Кроме того, во втором параграфе рассмотрены теоремы о представлении функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ в виде суммы двух функций таких, что носитель преобразования Фурье первой их них сосредоточен в окрестности резонансного множества, а вторая принадлежит пространству $L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В § 3 вводится понятие «нерезонансного» условия (определение 3.1), которое в случае тригонометрических многочленов соответствует понятию нерезонансного условия из классической теории резонанса (замечание 3.1).

Основное утверждение работы (теорема 3.2) состоит в следующем. Если числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$, «резонансные» множества (определение 2.1) этих функций не пусты и для них выполнено «нерезонансное» условие (определение 3.1), то справедливо неравенство

$$\sup_{a,b \in R^1} \left| \int_a^b \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)}, \tag{3}$$

где константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$, а $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$ — это пространства со специально определенной нормой, состоящие из тех элементов $L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, множество резонансных точек которых лежит в заранее выбранной окрестности множества резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Также рассмотрен вопрос (теорема 3.3) об ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по произвольному множеству $D \subset \mathbb{R}^1$, $\operatorname{mes} D = +\infty$.

Часть результатов настоящей работы докладывалась автором на VIII Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и его приложения» [2].

Частные случаи неравенства (3) существенно использовались автором при построении частотных критериев ограниченности и гладкости в смысле Фреше по параметрам решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. ссылки в [3, 4]).

Настоящая работа содержит § 1, § 2 и представляет собой первую часть статьи. Вторая часть, содержащая § 3, подготовлена к публикации.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

- $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;
- $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$;
- $\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;
- $0 \notin \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k$ — нерезонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ приводится);
- $V(\mathcal{R}_k, \delta)$ — δ-окрестность множества $\mathcal{R}_k$;
- $V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$ — множество $V(\mathcal{R}_k \cap \mathbb{R}^1, \delta) \cup (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty)$;
- $V(\mathcal{R}_k)$ — общее обозначение для $V(\mathcal{R}_k, \delta)$ и $V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$.

1. Определения, обозначения и некоторые вспомогательные утверждения. Пусть функция $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} u(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^1)$ будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно имеет вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} v(y)\, dy.$$

Обозначим также через $S(\mathbb{R}^1)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^1)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, тогда, как известно (см., например, [5, с. 77]), функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \overline{\gamma(t)} \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^1),$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^1)$.

Известно также, что *преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции* f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^1)$, обозначаемый в соответствии с (4) $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = 2\pi(f, \varphi)$.

В силу введенных выше обозначений известные формулы (см., например, [6, гл. II, § 2; 7, гл. II, § 9; 8, с. 443]) принимают вид

$$\{1(\tau)\}\widehat{\ }(y) = 2\pi\delta(y), \quad \{e^{i\lambda\tau}\}\widehat{\ }(y) = 2\pi\delta(y - \lambda), \tag{5}$$

$$\{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y),$$

$$\{\widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y)\}\widetilde{\ }(\tau) = \gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau),$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$.

Введем еще одно обозначение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$ и число $\delta > 0$ столь мало, что $a + \delta < b - \delta$. Обозначим через $\Omega(\tau, [a, b], \delta)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \delta) = \frac{1}{\delta^2} \xi_{[a,b]}(y) * \xi_{[-\delta/2, \delta/2]}(y) * \xi_{[-\delta/2, \delta/2]}(y),$$

где $\xi_M(y)$ — характеристическая функция множества $M \subseteq \mathbb{R}^1$.

Нетрудно проверить, что выполняются равенства

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \delta) = 0, \quad y \notin (a - \delta, b + \delta), \tag{6}$$

$$\widehat{\Omega}(y, [a, b], \delta) = 1, \quad y \in [a + \delta, b - \delta], \tag{7}$$

$$\Omega(\tau, [a, b], \delta) \in L^p(\mathbb{R}^1), \quad p \in [1, +\infty]. \tag{8}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $p \in (1, +\infty]$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любой функции* $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$ *такой, что* $\operatorname{supp} \widehat{\gamma} \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \int\limits_0^t \gamma(\tau)\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{(p-1)^{1/p}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{1/q}} \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. В работах автора [3, 4, 9] было доказано, что при сделанных выше предположениях выполняется неравенство

$$\left\| \int\limits_0^t \gamma(\tau)\, d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leqslant \frac{C(q)}{\varepsilon^{1/q}} \|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а константа $C(q) > 0$ не зависит от функции γ и величины ε.

Найдем оценку величины $C(q)$. Пусть сначала число $p \in (1, 2]$. В работе [3, с. 44–45] было показано, что $C(q) \leqslant 2H_p(2/(p-1))^{1/p}$, где H_p — константа из неравенства Хаусдорфа—Юнга. Известно [10], что $H_p < (2\pi)^{1/q}$, поэтому можем записать

$$C(q) < 2(2\pi)^{1/q} \cdot \frac{2^{1/p}}{(p-1)^{1/p}} \leqslant 4\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{(p-1)^{1/p}}. \tag{9}$$

Пусть $2 < p \leqslant +\infty$. В работе автора [9, с. 50–51] было установлено, что имеет место неравенство $C(q) \leqslant 2 \inf\limits_{M>1} C_2(M, q)$, где

$$C_2(M, q) = \left(4(M+1) \int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_x^\infty \frac{\sin 2M\theta \cdot (\sin\theta)^2}{\theta^3}\, d\theta \right|^q dx \right)^{1/q}.$$

Заметим, что функция $C_2(M, q)$ при каждом $q \in [1, 2]$ непрерывна по переменной M в интервале $(0, +\infty)$. А так как $\inf\limits_{M>1} C_2(M, q)$ не превосходит значения $C_2(M, q)$ в любой точке $M \in (0, +\infty)$, то

$$\inf_{M>1} C_2(M, q) \leqslant C_2(1, q).$$

Можно доказать неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_x^\infty \frac{\sin 2\theta \cdot (\sin\theta)^2}{\theta^3}\, d\theta \right| \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда следует $C_2(1, q) \leqslant (\frac{1}{2})^{(q-1)/q} (C_2(1, 1))^{1/q}$. Вычисление на компьютере дает

$$\int\limits_0^{10} \left| \int\limits_x^{20} \frac{\sin 2\theta \cdot (\sin\theta)^2}{\theta^3}\, d\theta \right| dx \approx 0.767452,$$

из чего путем несложных оценок можно установить, что $|C_2(1, 1)| < 2$. Следовательно, при $p > 2$ будем иметь

$$C(q) \leqslant 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(q-1)/q} 2^{1/q} = 4. \tag{10}$$

Объединяя оценки (9) и (10), получаем при $p \in (1, +\infty]$ неравенство

$$C(q) < 4\sqrt{\pi} \frac{1}{(p-1)^{1/p}}.$$

2. Резонансные точки и теоремы о разложении. Пусть $p_1, p \in (1, +\infty]$. В этом параграфе вводится (определение 2.1) понятие множества резонансных точек функций $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, являющееся (пример 2.1) аналогом понятия множества частот (показателей Фурье) тригонометрического многочлена. Далее устанавливается (теорема 2.1), что резонансное множество пусто тогда и только тогда, когда $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Если же резонансное множество не пусто, то (теоремы 2.2, 2.3) функцию γ можно представить в виде суммы двух функций таких, что носитель преобразования Фурье первой их них сосредоточен в окрестности резонансного множества, а вторая — принадлежит пространству $L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Этим теоремам предшествует ряд вспомогательных утверждений.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$.

Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$.

Определение 2.1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется *нерезонансной точкой* функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются *резонансными точками* функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 2.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 2.1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Следующий пример показывает, что координаты резонансных точек тригонометрических многочленов относительно любых пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p>1$, являются частотами (или показателями Фурье) этих многочленов.

Пример 2.1. Пусть $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k \tau}$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p \in (1, +\infty]$ можем записать

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\lambda_k\}. \tag{11}$$

Действительно, так как в силу (5) имеем $\widehat{\gamma}(y) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} c_n \delta(y-\lambda_k)$, то для любой точки $y_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$, $y_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n}\{\lambda_k\}$ можно указать ее окрестность V_0, в которой $\widehat{\gamma}(y) \equiv 0$. Следовательно, такая точка y_0 является нерезонансной и $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\{\lambda_k\}$ для любого $p \in (1, +\infty]$. Проверим, что выполняется и обратное включение. Пусть какая-либо из точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не является резонансной. Без ограничения общности можно считать, что это λ_1. Тогда существует V_1 — окрестность точки λ_1 и функция $\alpha_{\lambda_1}(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q \in [1, +\infty)$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_{\lambda_1}(y)$, $y \in V_1$. Выберем столь малое число $\rho > 0$, что $[\lambda_1 - 3\rho, \lambda_1 + 3\rho] \subset V_1$, $[\lambda_1 - 3\rho, \lambda_1 + 3\rho] \bigcap (\bigcup_{k=2}^{n}\{\lambda_k\}) = \varnothing$ и обозначим $\gamma_1(\tau) = \alpha_{\lambda_1}(\tau) * \Omega(\tau, [\lambda_1 - 2\rho, \lambda_1 + 2\rho], \rho)$. Тогда $\gamma_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$, но в силу (6) и (7) имеем $\widehat{\gamma}_1(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot \Omega(y, [\lambda_1 - 2\rho, \lambda_1 + 2\rho], \rho) = 2\pi\delta(y - \lambda_1)$, то есть $\gamma_1(\tau) = e^{i\lambda_1\tau} \notin L^q(\mathbb{R}^1)$. Полученное противоречие доказывает равенство (11).

Лемма 2.1. *Пусть $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $c > 0$ и $\infty \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Тогда можно указать функцию $\alpha_\infty \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$, такие, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq [a, b]$ и*

$$\gamma(\tau) = \alpha_\infty(\tau) + \eta(\tau),$$

где $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a - 2c, b + 2c], c)$ и $\operatorname{supp} \widehat{\eta}(y) \subseteq [a - 3c, b + 3c]$.

Доказательство. Так как $\infty \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, то существуют числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$, и функция $\beta_\infty \in L^q(\mathbb{R}^1)$, для которых $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\beta}_\infty(y)$, $y \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Но тогда в силу (7) имеем

$$\widehat{\gamma}(y) - \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}(y, [a-2c, b+2c], c) = \widehat{\beta}_\infty(y) - \widehat{\beta}_\infty(y)\widehat{\Omega}(y, [a-2c, b+2c], c).$$

Следовательно,

$$\gamma(\tau) = \beta_\infty(\tau) - \beta_\infty(\tau) * \Omega(\tau, [a-2c, b+2c], c) + \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a-2c, b+2c], c). \tag{12}$$

Первое слагаемое из правой части (12) — это функция класса $L^q(\mathbb{R}^1)$. Второе — в силу неравенства Юнга (см., например, [11, с. 42]) принадлежит $L^q(\mathbb{R}^1)$, как свертка $\beta_\infty \in L^q(\mathbb{R}^1)$ и функции $\Omega(\tau, [a-2c, b+2c], c)$, принадлежащей согласно (8) $L^1(\mathbb{R}^1)$. А для третьего слагаемого $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a-2c, b+2c], c)$ в соответствии с (6) имеем

$$\operatorname{supp}\widehat{\eta}(y) \subset \operatorname{supp}\widehat{\gamma}(y) \cap [a-3c, b+3c] \subseteq [a-3c, b+3c].$$

Обозначив $\alpha_\infty(\tau) = \beta_\infty(\tau) - \beta_\infty(\tau) * \Omega(\tau, [a-2c, b+2c], c)$, получаем утверждение леммы. □

Лемма 2.2. *Пусть $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$ таковы, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq [a, b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\rho > 0$ и $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a-2\rho, a+2\rho], \rho)$. Тогда*

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}, \tag{13}$$

где $\operatorname{supp}\widehat{\eta}(y) \subseteq [a-3\rho, b+3\rho]$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Пусть $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Тогда существуют V_u — окрестность точки u и функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для которых $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$, $y \in V_u$. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что $(u - 3\varepsilon, u + 3\varepsilon) \subset V_u$ и обозначим $\beta_u(\tau) = \alpha_u(\tau) * \Omega(\tau, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon)$. В силу (8) $\beta_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, а так как $\widehat{\beta}_u(y) = \widehat{\alpha}_u(y)\widehat{\Omega}(y, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon)$, то согласно (6) $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\beta}_u(y)$, $y \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$. Покажем, что $u \notin \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\eta(\tau) * \Omega(\tau, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon) &= \\ &= \{\gamma(\tau) * \Omega(\tau, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon)\} * \Omega(\tau, [a-2\rho, b+2\rho], \rho) = \\ &= \beta_u(\tau) * \Omega(\tau, [a-2\rho, b+2\rho], \rho) \in L^q(\mathbb{R}^1).\end{aligned}$$

Так как $\{\eta(\tau) * \Omega(\tau, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\eta}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [u-2\varepsilon, u+2\varepsilon], \varepsilon) = \widehat{\eta}(y)$, $y \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$, то функция $\widehat{\eta}(y)$ совпадает в интервале $(u-\varepsilon, u+\varepsilon)$ с преобразованием Фурье функции из $L^q(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, $u \notin \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ и, следовательно, $\mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. С другой стороны, из условия $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq [a, b]$ в силу (7) следует равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\eta}(y)$ при $y \in [a-\rho, b+\rho]$. Но тогда $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, это и доказывает (13). □

Лемма 2.3. *Пусть $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, и каждая точка отрезка $[c, d] \subset \mathbb{R}^1$ нерезонансная. Тогда существует $\rho_0 > 0$ такое, что при любом $0 < \rho \leqslant \rho_0$ функция $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c-2\rho, d+2\rho], \rho) \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\gamma}(y)$, $y \in [c-\rho, d+\rho]$.*

Доказательство. Так как отрезок $[c, d]$ состоит из нерезонансных точек, то для каждой точки $u \in [c, d]$ можно указать окрестность V_u и функцию $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$ такие, что $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$, $y \in V_u$. Для каждой точки $u \in [c,d]$ выберем число $\rho_u > 0$ так, чтобы $(u-5\rho_u, u+5\rho_u) \subset V_u$. Интервалы $(u-4\rho_u, u+4\rho_u)$, $u \in [c,d]$, образуют открытое покрытие открезка $[c,d]$. Выделим из этого покрытия какое-нибудь конечное, включающее в себя крайние интервалы $(c-4\rho_c, c+4\rho_c)$ и $(d-4\rho_d, d+4\rho_d)$. Пусть интервалы, входящие в выбранное покрытие — это $(c-4\rho_c, c+4\rho_c) = (u_1-4\rho_1, u_1+4\rho_1)$, $(u_2-4\rho_2, u_2+4\rho_2)$, $\ldots$, $(u_{N-1}-4\rho_{N-1}, u_{N-1}+4\rho_{N-1})$, $(d-4\rho_d, d+4\rho_d) = (u_N - 4\rho_N, u_N+4\rho_N)$, где $u_1 = c$, $u_N = d$. Соответствующие отрезки $[u_j-4\rho_j, u_j+4\rho_j]$, $1 \leqslant j \leqslant N$, покрывают отрезок $[c,d]$ и при этом, возможно, некоторые из них перекрывают друг друга. Рассмотрим множество отрезков, образованных взаимными пересечениями отрезков $[u_j-4\rho_j, u_j+4\rho_j]$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Выделим из него покрытие отрезка $[c,d]$, составленное из отрезков, пересекающихся только по концевым точкам: $[c_1,c_2]$, $[c_2,c_3]$, $\ldots$, $[c_{M-1},c_M]$, где $c-4\rho_c = c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_{M-1} < c_M = d+4\rho_d$. Выберем число $\rho_0 > 0$ так, чтобы

$$\rho_0 < \min_{1\leqslant j\leqslant N} \rho_j, \tag{14}$$

и для любого отрезка $[c_m, c_{m+1}]$, $1 \leqslant m \leqslant (M-1)$, выполнялось неравенство

$$c_m + \rho_0 < c_{m+1} - \rho_0. \tag{15}$$

Так как каждый отрезок $[c_m, c_{m+1}]$, $1 \leqslant m \leqslant (M-1)$, целиком входит в какой-нибудь отрезок $[u_j-4\rho_j, u_j+4\rho_j]$, то $[c_m, c_{m+1}] \subseteq [u_j-4\rho_j, u_j+4\rho_j] \subset (u_j-5\rho_j, u_j+5\rho_j) \subset V_u$ и для него можно указать функцию $\beta_m(\tau) = \alpha_j(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$ такую, что

$$\widehat{\beta}_m(y) = \widehat{\alpha}_j(y) = \widehat{\gamma}(y), \quad y \in V_{u_j}. \tag{16}$$

Пусть $\rho \in (0, \rho_0]$. Обозначим $\gamma_m(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c_m, c_{m+1}], \rho)$, $1 \leqslant m \leqslant (M-1)$. В силу (6) и (14) при любом $0 < \rho \leqslant \rho_0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{\Omega}(y, [c_m, c_{m+1}], \rho) = [c_m - \rho, c_{m+1} + \rho] \subset \\ \subset [u_j - 4\rho_j - \rho, u_j + 4\rho_j + \rho] \subset (u_j - 5\rho_j, u_j + 5\rho_j). \end{aligned}$$

Поэтому согласно (15) и (16) при любом $0 < \rho \leqslant \rho_0$ можем записать

$$\gamma_m(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c_m, c_{m+1}], \rho) = \beta_m(\tau) * \Omega(\tau, [c_m, c_{m+1}], \rho). \tag{17}$$

Рассмотрим функцию $\lambda(\tau) = \sum\limits_{m=1}^{M-1} \gamma_m(\tau)$. В силу (17) и (8) выполняется неравенство

$$\|\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leqslant \sum_{m=1}^{M-1} \|\beta_m\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \|\Omega(\tau, [c_m, c_{m+1}], \rho)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \in L^q(\mathbb{R}^1).$$

Кроме того, по определению функции Ω (см. § 1) будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) = \sum_{m=1}^{M-1} \gamma_m(\tau) = \gamma(\tau) * \sum_{m=1}^{M-1} \Omega(\tau, [c_m, c_{m+1}], \rho) = \\ = \gamma(\tau) * \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \xi_{[c_m, c_{m+1}]}(y) * \frac{1}{\rho^2} \xi_{[-\rho/2, \rho/2]}(y) * \xi_{[-\rho/2, \rho/2]}(y) \right\}^{\sim}(\tau) = \end{aligned}$$

$$= \gamma(\tau) * \left\{ \xi_{[c_1, c_M]}(y) * \frac{1}{\rho^2} \xi_{[-\rho/2, \rho/2]}(y) * \xi_{[-\rho/2, \rho/2]}(y) \right\}^{\sim}(\tau) =$$

$$= \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c_1, c_M], \rho) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c - 4\rho_c, d + 4\rho_d], \rho). \quad (18)$$

Так как согласно (7) $\widehat{\Omega}(y, [c - 4\rho_c, d + 4\rho_d], \rho) = 1$, если $y \in [c - 4\rho_c + \rho, d + 4\rho_d - \rho]$, и $\widehat{\Omega}(y, [c-4\rho_c, d+4\rho_d], \rho) = 0$, если $y \notin [c-4\rho_c-\rho, d+4\rho_d+\rho]$, то справедливо равенство

$$\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c - 2\rho, d + 2\rho], \rho) =$$
$$= \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [c - 2\rho, d + 2\rho], \rho) * \Omega(\tau, [c - 4\rho_c, d + 4\rho_d], \rho) =$$
$$= \lambda(\tau) * \Omega(\tau, [c - 2\rho, d + 2\rho], \rho) \in L^q(\mathbb{R}^1).$$

При этом, если $y \in (c - \rho, d + \rho)$, то $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\lambda}(y) = \widehat{\gamma}(y)$. $\Box$

Теорема 2.1. *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. *Тогда* $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *в том и только том случае, когда* $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$. В этом случае, как уже отмечалось выше, $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$. Тогда по лемме 2.1 существуют функция $\alpha_\infty(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$, для которых $\gamma(\tau) = \alpha_\infty(\tau) + \eta(\tau)$, где $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a - 2, b + 2], 1)$ и

$$\operatorname{supp} \widehat{\eta}(y) \subseteq [a - 3, b + 3]. \quad (19)$$

Из условия $\alpha_\infty \in L^q(\mathbb{R}^1)$, определения резонансного множества и леммы 2.2 следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Так как по предположению $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, то $\mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, то есть каждая точка отрезка $[a - 3, b + 3]$ является нерезонансной точкой функции η. Но тогда по лемме 2.3 существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \rho \leqslant \rho_0$ выполняется равенство

$$\lambda(\tau) = \eta(\tau) * \Omega(\tau, [a - 3 - 2\rho, b + 3 + 2\rho], \rho) \in L^q(\mathbb{R}^1).$$

Так как $\widehat{\Omega}(y, [a - 3 - 2\rho, b + 3 + 2\rho], \rho) = 1$, если $y \in [a - 3 - \rho, b + 3 + \rho]$, то в силу (19) получаем $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\eta}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [a - 3 - 2\rho, b + 3 + 2\rho], \rho), y \in \mathbb{R}^1$, откуда имеем $\eta(\tau) = \lambda(\tau) \in L^q(\mathbb{R}^1)$. $\Box$

Пусть $\delta > 0$ и $D \subset \mathbb{R}^1$. Обозначим через $V(D, \delta)$ δ-окрестность множества D.

Теорема 2.2. *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, *резонансное множество* $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$ *и* $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *можно указать такую функцию* $F(\tau) = F(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, *что справедливы условия:*

1) $F \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{F}(y) = 1$, *если* $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/4)$, *и* $\widehat{F}(y) = 0$, *если* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$;

2) $\gamma(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) + a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, *где* $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \gamma(\tau) * F(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)}$ *и* $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * F(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Выберем произвольное $\delta > 0$. Так как $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$, то в силу леммы 2.1 при $c = \delta$ можно указать функцию $\alpha_\infty \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и числа $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$, такие, что $\mathcal{R}_\gamma \subset [a, b]$ и $\gamma(\tau) = \alpha_\infty(\tau) + \eta(\tau)$, где $\eta(\tau) = \gamma(\tau) * \Omega(\tau, [a - 2\delta, b + 2\delta], \delta)$, $\operatorname{supp} \widehat{\eta}(y) \subseteq [a - 3\delta, b + 3\delta]$. Кроме того, согласно лемме 2.2 имеем $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}_\eta$, где $\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R}\{\eta, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Построим функцию $F(\tau)$. Так как [12, с. 9]

$$[a-2\delta, b+2\delta] \setminus V(\mathcal{R}_\gamma, \delta) = \bigcap_{v\in\mathcal{R}_\gamma} \big\{[a-2\delta, v-\delta] \cup [v+\delta, b+2\delta]\big\},$$

то $[a-2\delta, b+2\delta] \setminus V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$ — это пересечение пар отрезков, отстоящих на расстояние 2δ друг от друга, то есть конечное число отрезков или точек, расстояние между которыми не менее 2δ. Рассмотрим множество I, состоящее из $\delta/2$-окрестностей этих точек или отрезков. По построению I является объединением конечного числа отрезков длиной не менее δ и отстоящих друг от друга на расстояние не менее, чем δ. Пусть $I = \bigcup_{j=1}^{N}[c_j, d_j]$, где N число отрезков и $c_1 < d_1 < c_2 < \ldots < d_N$. По построению имеем $d_j - c_j \geqslant \delta$, $c_{j+1} - d_j \geqslant \delta$, $1 \leqslant j \leqslant (N-1)$, $[c_1, d_1] = [a - 5\delta/2, d_1]$, где $d_1 \geqslant a - \delta/2$, так как точка a может быть резонансной, и $[c_N, d_N] = [c_N, b+5\delta/2]$, где $c_N \leqslant b + \delta/2$, так как точка b тоже может быть резонансной. Обозначим $J = [a-5\delta/2, b+5\delta/2] \setminus I$. Тогда $J = (d_1, c_2) \cup (d_2, c_3) \cup \ldots \cup (d_{N-1}, c_N)$. По построению $J = V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/2)$, интервалы $(d_1, d_1+\delta/2)$, $(c_2-\delta/2, c_2)$, $(d_2, d_2+\delta/2)$, $(c_3-\delta/2, c_3)$, $\ldots$, $(c_N-\delta/2, c_N)$ состоят из нерезонансных точек и $(d_j, c_{j+1}) \subset (a-\delta/2, b+\delta/2)$, $1 \leqslant j \leqslant (N-1)$. Рассмотрим функции $\Omega_j(\tau) = \Omega(\tau, [d_j, c_{j+1}], \delta/4)$, $1 \leqslant j \leqslant (N-1)$. В силу свойств (6), (7) при каждом $1 \leqslant j \leqslant (N-1)$ получаем $\widehat{\Omega}_j(y) = 1$, если $y \in [d_j + \delta/4, c_{j+1} - \delta/4]$, $\widehat{\Omega}_j(y) = 0$, если $y \notin [d_j - \delta/4, c_{j+1} + \delta/4]$.

Обозначим $F(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \Omega_j(\tau)$. Тогда $\widehat{F}(y) = 1$, если $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/4) = V(\mathcal{R}_\eta, \delta/4)$ и $\widehat{F}(y) = 0$, если $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, 3\delta/4) = V(\mathcal{R}_\eta, 3\delta/4)$, откуда следует, что $\operatorname{supp} \widehat{F}(y) \subset V(\mathcal{R}_\gamma, \delta) \subset (a-\delta, b+\delta)$.

Положим $A(\tau, \eta, \mathcal{R}_\eta, \delta) = \eta(\tau) * F(\tau)$, $a_1(\tau) = \eta(\tau) - A(\tau, \eta, \mathcal{R}_\eta, \delta)$. Покажем, что $a_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$. Имеем $\widehat{a}_1(y) = \widehat{\eta}(y) - \widehat{\eta}(y) \cdot \widehat{F}(y)$. Так как по построению $\operatorname{supp} \widehat{a}_1(y)$ лежит вне $V(\mathcal{R}_\eta, 3\delta/4)$, то каждая точка функции $a_1(\tau)$ нерезонансная. Но тогда по теореме 2.1 имеем $a_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) = a_\infty(\tau) + \eta(\tau) = a_\infty(\tau) + a_1(\tau) + A(\tau, \eta, \mathcal{R}_\eta, \delta) = \\ = a_\infty(\tau) + a_1(\tau) + \eta(\tau) * F(\tau) = a_\infty(\tau) + a_1(\tau) + \gamma(\tau) * F(\tau),\end{aligned}$$

где $a_\infty, a_1 \in L^q(\mathbb{R}^1)$ и $\eta(\tau) * F(\tau) = \gamma(\tau) * F(\tau)$, так как $\operatorname{supp} \widehat{F}(y) \subset (a-\delta, b+\delta)$, а в этом интервале $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\gamma}(y)$. Для завершения доказательства обозначим $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = a_\infty(\tau) + a_1(\tau)$, $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = A(\tau, \eta, \mathcal{R}_\eta, \delta) = \gamma(\tau) * F(\tau)$ и отметим, что $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) \subset V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$. $\square$

Пусть $\delta, \Delta > 0$ и $D \subset \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Обозначим

$$V(D, \delta, \Delta) = V(D \cap \mathbb{R}^1, \delta) \cup (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty).$$

Теорема 2.3. *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\infty \in \mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}}^1$, *и числа* $\delta, \Delta > 0$ *таковы, что* $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)} \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^1$. *Тогда существует функция* $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $G \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{G}(y) = 0$, *если* $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/2, \Delta)$, *и* $\widehat{G}(y) = 1$, *если* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$;

2) $\gamma(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) + a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, *где* $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *и* $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)}$.

Доказательство. Как следует из определения множества $V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, множество $T = \mathbb{R}^1 \setminus V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) \subseteq [-\Delta, \Delta]$. А так как $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)} \subsetneqq \mathbb{R}^1$, то T может состоять только из конечного числа отрезков и точек или только отрезков. Обозначим отрезки, содержащиеся в T, через $[c_1, d_1]$, $[c_2, d_2]$, $\ldots$, $[c_N, d_N]$, где $N \geqslant 1$, $-\Delta \leqslant c_1 < d_1 < c_2 < \ldots < d_N \leqslant \Delta$. По построению каждая точка каждого из отрезков $[c_j, d_j]$, $1 \leqslant j \leqslant N$, отстоит от $\mathcal{R}_\gamma$ на расстояние не меньше, чем δ. Кроме того, каждая точка каждого из интервалов $(c_j - \delta, d_j + \delta)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, нерезонансная. Для отрезков $[c_j, d_j]$, не примыкающих к интервалам $(-\infty, -\Delta]$ и $[\Delta, +\infty)$, это, очевидно, следует из построения. Случай примыкания может быть только у отрезков $[c_1, d_1]$ и $[c_N, d_N]$. Пусть, например, $d_N = \Delta$. Если интервал $[\Delta, \Delta + \delta)$ состоит из нерезонансных точек, то $(c_N - \delta, d_N + \delta)$ действительно состоит из нерезонансных точек. Если же существует резонансная точка $r \in [\Delta, \Delta + \delta)$, а интервал $[\Delta, r)$ состоит из нерезонансных точек, то отрезок $[c_N, d_N]$ не может примыкать к $[\Delta, +\infty)$, так как по построению точка d_N должна отстоять от резонансной точки r на расстояние δ. Обозначим

$$G(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \Omega\left(\tau, \left[c_j - \frac{\delta}{4}, d_j + \frac{\delta}{4}\right], \frac{\delta}{4}\right).$$

По свойствам (6), (7) и (8) функции Ω, получаем

$$\operatorname{supp} \widehat{G}(y) = \bigcup_{j=1}^{N} \left[c_j - \frac{\delta}{2}, d_j + \frac{\delta}{2}\right], \tag{20}$$

$\widehat{G}(y) = 1$, если $y \in \bigcup_{j=1}^{N} [c_j, d_j]$, и $G \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Далее, положим $a(\tau) = a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) * G(\tau)$. Так как $G \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то $a \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. Так как каждая точка интервала $(c_j - \delta, d_j + \delta)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, является нерезонансной точкой функции γ, то с учетом (20) по теореме 2.1 получаем, что $a \in L^q(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим $A(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * G(\tau)$. Тогда $A \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и $\widehat{A}(y) = \widehat{\gamma}(y) - \widehat{\gamma}(y) \cdot \widehat{G}(y) = \widehat{\gamma}(y) \cdot (1 - \widehat{G}(y))$. По построению функция $1 - \widehat{G}(y) = 0$ вне $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)}$. Следовательно, $\operatorname{supp} \widehat{A}(y) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)}$. $\square$

Замечание 2.1. Из доказательств теорем 2.2 и 2.3 видно, что функции $F(\tau)$ и $G(\tau)$, удовлетворяющие условиям теорем, могут быть построены не единственным способом и не обязательно с использованием функции Ω.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.

2. *Ivanov B. F.* On the Hölder Inequality // Комплексный анализ и его приложения: материалы VIII Петрозаводской международной конференции (3–9 июля 2016), Петрозаводск: Издательство ПетрГУ. 2016. С. 31–35.

3. *Иванов Б. Ф.* Об одном обобщении неравенства Бора // Проблемы анализа. 2013. Т. 2(20), № 2. С. 21–57. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2382.

4. *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I // Issues of Analysis. 2014. Vol. 3(21), N 1. P. 16–34. DOI: 10.15393/j3.art.2014.2501.

5. Функциональный анализ. Серия «Справочная математическая библиотека» / под ред. С. Г. Креина. М.: Наука, 1972.

6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматлит, 1959.

7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

9. *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. II // Issues of Analysis. 2014. Vol. 3(21), N 2. P. 32–51. DOI: 10.15393/j3.art.2014.2569.

10. *Beckner W.* Inequalities in Fourier analysis // Annals of Mathematics. 1975. Vol. 102. P. 159–182.

11. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

12. *Макаров Б. М., Подкорытов А. Н.* Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2016 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторе

Иванов Борис Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент; ivanov-bf@yandex.ru

ON SOME ADDITION TO THE HÖLDER INEQUALITY. I

Boris F. Ivanov

St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
Higher School of Technology and Energy,
ul. Ivan Chernykh, 4, St. Petersburg, 198095, Russian Federation; ivanov-bf@yandex.ru

Let $m \geqslant 2$, numbers $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ satisfy inequality

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1,$$

and functions $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$. We prove that if the set of "resonance" points of each of these functions is not empty and the "non-resonance" condition holds (both concepts have been defined by the author for functions from $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in (1, +\infty]$), then

$$\sup_{a,b \in R^1} \left| \int_a^b \prod_{k=1}^m [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^m \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)},$$

where constant $C > 0$ is independent on functions $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1)$ and $L^{p_k}_{a_k}(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ are specially constructed normed spaces.

Besides, we give a condition of integral boundedness from the product of functions when integrating over a subset of $\mathbb{R}^1$. Refs 12.

Keywords: the Hölder inequality.

References

1. Bourbaki N., *Integration. Measures, integration of measures* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].

2. Ivanov B. F., "On the Hölder Inequality", *Complex analysis and applications. Materials of the VIII Petrozavodsk International Conference (3–9 June 2016)*, 31–35 (Petrozavodsk Univ. Press, Petrozavodsk, 2016) [in Russian].

3. Ivanov B. F., "About a generalization of the Bohr inequality", *Issues of Analysis* **2(20)**(2), 21–57 (2013) [in Russian]. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2382.

4. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I", *Issues of Analysis* **3(21)**(1), 16–34 (2014). DOI: 10.15393/j3.art.2014.2501.

5. *Functional analysis.* In Ser. *The reference mathematical library* (ed S. G. Krein, Nauka, Moskow, 1972) [in Russian].

6. Gel'fand I. M., Shilov G., *The generalized functions and actions over them, release, issue 1* (Fizmatlit, Moscow, 1959) [in Russian].

7. Vladimirov V. S., *Equations of mathematical physics* (Nauka, Moskow, 1971, 512 p.) [in Russian].

8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V., *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Nauka, Moskow, 1968) [in Russian].

9. Ivanov B. F., "Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. II", *Issues of Analysis* **3(21)**(2), 32–51 (2014). DOI: 10.15393/j3.art.2014.2569.

10. Beckner W., “Inequalities in Fourier analysis”, *Annals of Mathematics* **102**, 159–182 (1975).
11. Steyn I., Weiss G., *Introduction to the harmonious analysis on Euclidean spaces.* (Mir, Moskow, 1974) [in Russian].
12. Makarov B. M., Podkorytov A. N., *The lectures on the real analysis* (BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2011) [in Russian].

Для цитирования: Иванов Б. Ф. Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. I // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 436–447. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.306

For citation: Ivanov B. F. On some addition to the Hölder inequality. I. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 436–447. DOI: 10.21638/11701 /spbu01.2017.306