УДК 517.925
MSC 34C10, 34D20
Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ЦЕНТРА*

Ю. Н. Бибиков, В. А. Плисс, Н. В. Трушина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Изучаются малые периодические по времени возмущения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Предполагается, что восстанавливающая сила содержит как консервативную, так и диссипативную части. При этом все решения дифференциального уравнения — периодические, т. е. невозмущенное уравнение является осциллятором. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что частота невозмущенных колебаний является бесконечно малой функцией амплитуды.

Рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения возмущенного уравнения. Автономные возмущения были изучены еще Ляпуновым. Он показал, что дело сводится к вычислению постоянной, от знака которой зависит асимптотическая устойчивость нулевого решения или его неустойчивость. Подход Ляпунова, основанный на исключении времени из системы, неприменим к неавтономным возмущениям, в частности, к периодическим.

С помощью модификации метода Ляпунова получены следующие результаты. Вводятся переменные «действие — угол». Построено полиномиальное преобразование переменной «действие», позволяющее вычислить постоянную Ляпунова. В общем случае изучена структура этого преобразования. Оказалось, что «длина» полинома преобразования является периодической функцией показателя консервативной части восстанавливающей силы в невозмущенном уравнении (наименьший период равен 4). Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: устойчивость, периодические возмущения, осциллятор, существенно нелинейные дифференциальные уравнения.

0. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} + ax^{\frac{p-q}{2q}}\dot{x} = X(x, \dot{x}, t) \tag{0.1}$$

при следующих предположениях:

1) p/q — несократимая дробь, p и q — нечетные числа, $p > q$;

2) $X(x, y, t)$ — достаточно гладкая по x, y в окрестности точки $(x = 0, y = 0)$ функция, непрерывная и периодическая по t (в частности, от t не зависящая);

3) разложение $X(x, y, t)$ по степеням x, y не содержит членов порядка ниже, чем $p+1$, если переменной x приписывать порядок q, а переменной y — порядок $(p+q)/2$;

4) выполняется неравенство $a^2 < 2(p+q)/q$.

Из условия 3 следует, что порядок $x^{(p-q)/2q}\dot{x}$ равен порядку $x^{p/q}$, т. е. равен p.

Рассмотрим невозмущенное уравнение, соответствующее (0.1), т. е. уравнение

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} + ax^{\frac{p-q}{2q}}\dot{x} = 0. \tag{0.2}$$

Оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^{\frac{p}{q}} - ayx^{\frac{p-q}{2q}}, \end{cases} \tag{0.3}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.304

траектории которой определяются дифференциальным уравнением

$$ydy + (x^{\frac{p}{q}} + ax^{\frac{p-q}{2q}}y)dx = 0.$$

Интегрируя это уравнение подстановкой $y = zx^{(p+q)/2q}$, находим

$$\frac{p+q}{2}y^2 + aqx^{\frac{p+q}{2q}}y + qx^{\frac{p+q}{q}} = A\exp\left\{\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{p+q}{q}y + ax^{\frac{p+q}{2q}}}{x^{\frac{p+q}{2q}}\sqrt{\Delta}}\right\}, \qquad (0.4)$$

где A — положительная постоянная, $\Delta = \frac{2(p+q)}{q} - a^2$. Согласно условию 4 имеем $\Delta > 0$.

Так как $\Delta > 0$, функция в левой части — определенно положительная. Если при этом $(p+q)/2$ — четное число, то кривые, определяемые уравнением (0.4), — замкнутые, охватывающие начало координат.

При $a = 0$ уравнение (0.1) исследовано в работе [1].

В дальнейшем предполагается, что $a \neq 0$. Уравнение (0.1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^{\frac{p}{q}} - ayx^{\frac{p-q}{2q}} + X(x,y,t). \end{cases} \qquad (0.5)$$

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{p+q}{2}y^2 + aqx^{\frac{p+q}{2q}}y + qx^{\frac{p+q}{q}}$$

и ее производную в силу системы (0.5)

$$DV = -ax^{\frac{p-q}{2q}}V + \left((p+q)y + aqx^{\frac{p+q}{2q}}\right)X(x,y,t).$$

Возможны случаи: 1) $(p+q)/2$ — четное число, соответственно $(p-q)/2$ нечетно, 2) $(p+q)/2$ — нечетное число, соответственно $(p-q)/2$ четно.

Во втором случае вопрос об устойчивости положения равновесия решается в первом приближении: если $a > 0$, положение равновесия асимптотически устойчиво; если $a < 0$, оно неустойчиво. В этом случае особая точка (0,0) системы (0.3) является фокусом.

Заметим, что в случае $\Delta \leq 0$ особая точка (0,0) системы (0.3) является *узлом* (устойчивым при $a > 0$ и неустойчивым при $a < 0$), если $(p+q)/2$ нечетно, и *седлом*, если $(p+q)/2$ четно. Поэтому при $\Delta \leq 0$ вопрос об устойчивости положения равновесия $x = 0$ тоже решается в первом приближении.

Осталось рассмотреть случай 1. Точка (0,0) является центром для системы (0.3).

При сделанных предположениях относительно функции X ее можно рассматривать как малое периодическое возмущение осциллятора (0.2).

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия $x = 0$ уравнения (0.1). При $q = 1$ для автономных возмущений этот вопрос был исследован еще А. М. Ляпуновым [2]. Его исследования были продолжены Г. В. Каменковым [3]. В частности, он показал, что вместо ляпуновских переменных «действие — угол» можно использовать обычные косинус и синус.

1. Разделение переменных. Следуя работе [4], введем в рассмотрение функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$, удовлетворяющие системе (0.3), т. е.

$$\begin{cases} C'(\varphi) = S(\varphi), \\ S'(\varphi) = -C^{\frac{p}{q}}(\varphi) - aSC^{\frac{p-q}{2q}}(\varphi). \end{cases} \tag{1.1}$$

Положим $A = (p+q)/2,\ C(0) = 0$. Тогда в силу (0.4) будем иметь

$$\frac{p+q}{2}S^2 + aqSC^{\frac{p+q}{2q}} + qC^{\frac{p+q}{q}} = \\ = \frac{p+q}{2}\exp\left\{\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{p+q}{q}S + aC^{\frac{p+q}{2q}}}{C^{\frac{p+q}{2q}}\sqrt{\Delta}}\right\} = B(C,S) > 0. \tag{1.2}$$

Следовательно, $S(0) = e^{\pi a/\sqrt{\Delta}}$. Функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ — периодические. Обозначим их период через 2ω. Введем в системе (0.5) переменные «действие — угол», т. е. координаты (r,φ), $r > 0$, согласно формулам

$$x = r^q C(\varphi), \quad y = r^{\frac{p+q}{2}} S(\varphi). \tag{1.3}$$

Получим систему

$$\begin{cases} \dot r = \dfrac{SX\left(r^q C,\, r^{\frac{p+q}{2}}S,\, t\right)}{r^{\frac{p+q}{2}-1}B(C,S)}, \\ \dot\varphi = r^{\frac{p-q}{2}} - \dfrac{CX\left(r^q C,\, r^{\frac{p+q}{2}}S,\, t\right)}{r^{\frac{p+q}{2}}B(C,S)}, \end{cases} \tag{1.4}$$

которую можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot r = a_s(\varphi,t)r^s + a_{s+1}(\varphi,t)r^{s+1} + \dots = R(r,\varphi,t), \\ \dot\varphi = r^\alpha + b_{s-1}(\varphi,t)r^{s-1} + \dots = r^\alpha + \Phi(r,\varphi,t), \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\alpha = (p-q)/2,\ s \geq \alpha + 2$, а многоточием обозначены члены порядка по r выше выписанных.

Эту систему можно трактовать как систему с «медленным временем» [5]. Первые результаты в этом направлении принадлежат Ю. А. Митропольскому [6].

Лемма. *Существует формальный ряд*

$$r = \rho + h_{s-\alpha}(\varphi,t)\rho^{s-\alpha} + \ldots = \rho + h(\rho,\varphi,t), \tag{1.6}$$

приводящий систему (1.5) *к виду*

$$\begin{aligned} &\dot\rho = g_s\rho^s + \ldots = P(\rho), \\ &\dot\varphi = \rho^\alpha + (b_{s-1} + \alpha h_{s-\alpha})\rho^{s-1} + \ldots = \rho^\alpha + Q(\rho,\varphi,t), \end{aligned} \tag{1.7}$$

где g_s — постоянные.

Доказательство. Второе уравнение системы (1.7) получается из второго уравнения системы (1.5) заменой (1.6). Дифференцируя равенство (1.6) по t при учете равенств (1.5) и (1.7), получим соотношение для определения функции $h(\rho, \varphi, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}\rho^{\frac{p-q}{2}} + \frac{\partial h}{\partial t} = R(\rho + h, \varphi, t) - \frac{\partial h}{\partial \varphi}Q - \frac{\partial h}{\partial \rho}P - P. \tag{1.8}$$

Далее используем представление произвольной периодической по φ, t функции

$$F(\varphi, t) = \overline{F} + \widehat{F}(\varphi) + \widetilde{F}(\varphi, t), \tag{1.9}$$

где $\overline{F}$ — среднее значение $F(\varphi, t)$ по φ, t; $\widehat{F}(\varphi)$ — среднее значение разности $F(\varphi, t) - \overline{F}$ по t.

Приравнивая в соотношении (1.8) коэффициенты при ρ^s, получим уравнение

$$\frac{\partial h_{s-\alpha}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_s}{\partial t} = a_s(\varphi, t) - g_s. \tag{1.10}$$

Положим $g_s = \overline{a}_s$ и разобьем уравнение (1.10) на два следующих:

$$\frac{dh_{s-\alpha}}{d\varphi} = \widehat{a}_s(\varphi), \quad \frac{\partial \widetilde{h}_s}{\partial t} = \widetilde{a}_s(\varphi, t).$$

Первое из этих уравнений определяет $h_{s-\alpha}(\varphi)$ как первообразную $\widehat{a}_s(\varphi)$. Рассматривая φ как параметр во втором уравнении, определим $\widetilde{h}_s(\varphi, t)$.

Приравнивая в (1.8) коэффициенты при ρ^i $(i > s)$, получим уравнения

$$\frac{\partial h_{i-\alpha}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_i}{\partial t} = a_i(\varphi, t) - g_i - G_i(\varphi, t), \tag{1.11}$$

где G_i являются известными функциями, если уже определены h_j при $j < i$. При этом $\widetilde{h}_{s-\alpha} = 0, \ldots, \widetilde{h}_{s-1} = 0$. Например, если $s = \alpha + 2$, будем иметь

$$G_{s+1} = s a_s h_{s-\alpha} - \frac{dh_{s-\alpha}}{d\varphi}\left(b_{s-1} + \alpha h_{s-\alpha}\right). \tag{1.12}$$

Положим $F_i = a_i - G_i$, $g_i = \overline{F_i}$, а каждое из уравнений (1.11) разобьем на два следующих:

$$\frac{\partial \widehat{h}_{i-\alpha}}{\partial \varphi} = \widehat{F}_i, \quad \frac{\partial \widetilde{h}_i}{\partial t} = \widetilde{F}_i,$$

откуда $\widehat{h}_{i-\alpha}$ и $\widetilde{h}_i$ определяются квадратурами.

Таким образом, последовательно с возрастанием $i \geq \alpha + 2$ определим все $\widehat{h}_{i-\alpha}$ и $\widetilde{h}_i$, что и доказывает лемму.

Пусть g_β — первая ненулевая среди постоянных $g_s, g_{s+1}, \ldots$. Обрывая ряд (1.6) на членах порядка $i = \beta$ для $\widetilde{h}_i$ и порядка $\beta - \alpha$ для $\widehat{h}_{i-\alpha}$, получим вместо системы (1.7) систему

$$\dot{\rho} = g_\beta \rho^\beta + \ldots, \quad \dot{\varphi} = \rho^\alpha + \ldots,$$

где многоточием отмечены бесконечно малые при $\rho \to 0$ по сравнению с выписанными слагаемыми функции. Так как устойчивость нулевого решения уравнения (0.1) по отношению к x и $\dot{x}$ эквивалентна в силу (0.4) и (1.3) устойчивости по отношению к переменной r, а значит, и ρ, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $g_\beta < 0$, *то нулевое решение уравнения* (0.1) *асимптотически устойчиво, а если* $g_\beta > 0$, *то оно неустойчиво.*

Замечание. Число β — нечетное. Действительно, в противном случае, считая в замене (1.3) $r < 0$, пришли бы к противоположному заключению об устойчивости нулевого решения уравнения (0.1), что невозможно.

Частный случай. Пусть $q = 1$. Тогда $p = 3 + 4\ell$, $\frac{p+q}{2} = 2 + 2\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Представим $X(x, \dot{x}, t)$ в виде

$$X = a(t)x^{4+4\ell} + b(t)x^{2+2\ell}\dot{x} + c(t)\dot{x}^2 + \dots ,$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка, чем $4 + 4\ell$, если переменной x приписать в соответствии с заменой (1.3) измерение 1, а переменной $\dot{x}$ — измерение, равное $2 + 2\ell$.

В рассматриваемом случае имеем

$$\alpha = 1 + 2\ell, \quad s = 3 + 2\ell, \quad s - \alpha = 2.$$

В системе (1.5) получаем

$$a_s = a(t)C^{4+4l}(\varphi)S(\varphi) + b(t)C^{2+2l}(\varphi)S^2(\varphi) + c(t)S^3(\varphi)B^{-1},$$

$$g_s = \overline{a}_s.$$

Так как среднее значение $C^{2+2\ell}S^2$ больше нуля, то в случае общего положения $g_s \neq 0$, а замена (1.6) имеет вид

$$r = \rho + h_2\rho^2 + h_{3+2\ell}(\varphi, t)\rho^{3+2\ell}.$$

Таким образом, при $q = 1$ наблюдается цикличность переменной p в формулах вычисления постоянной g_β. Длина цикла равна 4.

Как увидим далее, подобная цикличность имеет место и при $q > 1$.

2. Исследование цикличности при $q > 1$. Представим функцию $X(x, \dot{x}, t)$ в виде

$$X = a(t)x^n + b(t)x^m\dot{x} + c(t)\dot{x}^2 + \dots ,$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка, чем выписанные, в соответствии с приписываемым им измерением. При этом выписанные члены должны иметь порядок больший, чем порядок $x^{p/q}$, т. е. больший, чем p. Переменная $\dot{x}^2$ имеет порядок $p + q > p + 1$. Соответственно, m и n должны удовлетворять неравенствам

$$qn \geq p + 1, \quad qm + \frac{p+q}{2} \geq p + 1$$

или

$$n \geq \frac{p+1}{q}, \quad m \geq \frac{p-q+2}{2q}. \tag{2.1}$$

Зафиксируем нечетное $q \geq 3$. Разобьем множество нечетных $p > q$ на классы вычетов по модулю $4q$: $p = \widetilde{p} + 4q\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ Положим $\widetilde{p} = q + 2k$, где $k = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, 2q-1$, причем k/q — несократимая дробь. Случаи $k = 0$ и $k = q$

исключены, так как они соответствуют $q = 1$. При этом k — нечетное число, так как $(p-q)/2$ нечетно по предположению. Таким образом, получаем

$$p = q + 2k + 4q\ell.$$

Используя (2.1), вычислим наименьшие возможные значения m и n. Представим m и n в виде $m = \widetilde{m} + 2\ell$, $n = \widetilde{n} + 4\ell$. В результате получим 4 случая:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}: && \widetilde{m} = 1, \quad \widetilde{n} = 2 \quad \text{при } k = 1, \dots, \frac{q-1}{2};\\
&\mathrm{II}: && \widetilde{m} = 1, \quad \widetilde{n} = 3 \quad \text{при } k = \frac{q+1}{2}, \dots, q-2;\\
&\mathrm{III}: && \widetilde{m} = 2, \quad \widetilde{n} = 4 \quad \text{при } k = q+2, \dots, \frac{3q-1}{2};\\
&\mathrm{IV}: && \widetilde{m} = 2, \quad \widetilde{n} = 5 \quad \text{при } k = \frac{3q+1}{2}, \dots, 2q-1.
\end{aligned}$$

При $q = 3$ реализуются только случаи I и IV: имеем либо $p = 5 + 12\ell$, $m = 1 + 2\ell$, $n = 2 + 4\ell$, либо $p = 13 + 12\ell$, $m = 2 + 2\ell$, $n = 5 + 4\ell$. Начиная с $q = 5$, реализуются все 4 случая.

Рассмотрим в разложении функции $X(x, \dot{x}, t)$ член $\Lambda(t)x^{2d}\dot{x}$. В разложении $R(r, \varphi, t)$ ему соответствует член

$$B^{-1}\Lambda(t)C^{2d}(\varphi)S^2(\varphi)r^{2dq+1}.$$

Предположим, что $\overline{\Lambda}(t) \neq 0$, если d — наименьшее из возможных. Заметим, что $m = 1 + 2\ell$ при $k \in [1, q-1)$ и $m = 2 + 2\ell$ при $k \in (q+1, 2q-1]$. И в том, и в другом случаях имеем $d = 1 + \ell$.

Рассмотрим величину g_{2qd+1} при $d = 1 + \ell$. В общем случае $g_{2qd+1} \neq 0$, так как указанный выше член разложения $R(r, \varphi, t)$ является одним из слагаемых суммы, определяющей величину g_{2qd+1}. При этом может оказаться, что существуют $\beta < 2qd + 1$, для которых $g_\beta \neq 0$ (см. конец параграфа). Тем не менее будем вычислять g_i вплоть до g_{2qd+1}. Тогда индексы i функций $\widetilde{h}_i(\varphi, t)$ и индексы $j = i - (p-q)/2$ функций $\widehat{h}_j(\varphi)$ будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned}
&\frac{p-q}{2} + 2 \leq i \leq 2qd + 1,\\
&2 \leq j \leq \frac{1}{2}((4d+1)q - p + 2).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Обозначая через j_2 наибольшее значение для j в (2.2), находим $j_2 = \frac{1}{2}((4d+1)q - q - 2k - 4q\ell + 2)$ или

$$j_2 = 2q + 1 - k. \tag{2.3}$$

Наименьшим значением j_1 для j будет номер, отвечающий либо x^n, либо $x^m\dot{x}$ в зависимости от того, чей порядок ниже. Порядок x^n равен nq, а порядок $x^m\dot{x}$ равен $mq + (p+q)/2$. Рассмотрим их разность $\Delta = (\tilde{n} - \tilde{m} - 1)q - k$. В случаях I и III имеем $\Delta < 0$, а в случаях II и IV — $\Delta > 0$.

Соответственно, в случаях I и III получаем

$$j_1 = nq - \left(\frac{p+q}{2} - 1\right) - \frac{p-q}{2}$$

или

$$j_1 = (\tilde{n} - 1)q + 1 - 2k. \tag{2.4}$$

В обозначениях леммы § 1 запишем $j_1 = s - \alpha$.

В случаях II и IV будем иметь

$$j_1 = mq + \frac{p+q}{2} - \left(\frac{p+q}{2} - 1\right) - \frac{p-q}{2}$$

или

$$j_1 = \tilde{m}q + 1 - k. \tag{2.5}$$

Как было установлено в теореме 1, вопрос об устойчивости нулевого решения решается знаком первого ненулевого коэффициента g_β.

Из (2.3) и (2.5) следует, что в случае IV получаем $j_1 = j_2$. Тогда (1.6) имеет вид

$$r = h_{j_1}(\varphi)\rho^{j_1} + h_{j_1+\frac{p-q}{2}}(\varphi, t)\rho^{j_1+\frac{p-q}{2}},$$

где j_1 вычисляется по формуле (2.5). При этом в формуле (1.10) можем записать

$$a_s = a_{j_1+\frac{p-q}{2}} = B^{-1}\Lambda(t)C^{2d}(\varphi)S^2(\varphi) + \dots .$$

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *При* $4q + 1 + 4q\ell \le p \le 5q - 2 + 4q\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, *нулевое решение уравнения (0.1) асимптотически устойчиво, если* $\overline{a_s(t)} < 0$, *и неустойчиво, если* $\overline{a_s(t)} > 0$.

Замечание. В работе [1] показано, что в случае I первая ненулевая постоянная g_s имеет индекс $s < 2dq+1$. Таким образом, в случае I оценка (2.3) не является точной в отличие от случая IV.

Литература

1. *Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р., Трушина Н. В.* Об устойчивости положения равновесия при периодических возмущениях осциллятора со степенной восстанавливающей силой с рациональным показателем // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, вып. 6. С. 626–636.
2. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения / Собр. соч. в двух томах. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
3. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем // Избранные труды в двух томах. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 1–214.
4. *Бибиков Ю. Н., Плисс В. А.* Бифуркация положения равновесия осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой третьего порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 60(2), вып. 2. С. 171–175.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
6. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

Бибиков Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; bibicoff@yandex.ru

Плисс Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор; anna1918@mail.ru, vapliss@yandex.ru

Трушина Наталия Валерьевна — аспирант; n.v.trushina@gmail.com

ON THE STABILITY OF THE ZERO SOLUTION OF AN ESSENTIALLY NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Yury N. Bibikov, Victor A. Pliss, Natalia V. Trushina

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; bibicoff@yandex.ru; anna1918@mail.ru, vapliss@yandex.ru; n.v.trushina@gmail.com

Small periodic in time perturbations of an essentially non-linear differential equation of the second order, are studied. It is supposed that the restoring force of the unperturbed equation consists of both conservative and dissipative parts, the first one being a root function. It is also supposed that all solutions of the unperturbed equation are periodic. Thus, the unperturbed equation is an oscillator. Peculiarity of the problem under consideration is that the frequency of oscillations is an infinitely small function of the amplitude.

A problem of zero-solution stability is considered. Lyapunov investigated the case of autonomous perturbations. He showed that the asymptotic stability or the instability depends on the sign of a certain constant and presented a method of its calculation. Liapunov's approach can not be applied to non-autonomous, in particular to periodic perturbations because it is based on the possibility to exclude the time variable from the system.

Through modification of Lyapunov's method the following results are obtained.

"Action — angle" variables are introduced. A polynomial transformation of the action variable that permits to calculate Lyapunov's constant is presented. In general case the structure of the polynomial transformation is studied. It appears that the "length" of the polynomial is a periodic function of the exponent of a root function in the conservative part of the restoring force in unperturbed equation. The least period is equal to 4. Refs 6.

Keywords: stability, periodic perturbation, oscillator, essentially nonlinear differential equations.

References

1. Bibikov Yu., Bukaty V., Trushina N., "On the stability of the equilibrium position of an oscillator with power restoring force with a rational exponent", *Applied Mathematics and Mechanics* **80**, issue 6, 626–636 (2016).

2. Lyapunov A. M., *Investigation of one particular case of the problem of stability of motion.* Collected works in 2 vol. (Izd. AN SSSR, Moscow; Leningrad, 1956, **2**, 272–331) [in Russian].

3. Kamenkov G. V., *Stability and oscillations of nonlinear systems.* Collected works in 2 vol. (Nauka, Moscow, 1972, **2**, 214 p.) [in Russian].

4. Bibikov Yu. N., Pliss V. A., "Bifurcation of the state of equilibrium of an oscillator with nonlinear restoring force of Third order", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **48**, Issue 2, 57–60 (2015).

5. Moiseev N. N., *Asymptotic methods of nonlinear mechanics* (Nauka, Moscow, 1969, 379 p.) [in Russian].

6. Mitropolsky Yu. A., *Problems of asymptotic theory of nonstationary oscillations* (Nauka, Moscow, 1964, 432 p.) [in Russian].

Для цитирования: Бибиков Ю. Н., Плисс В. А., Трушина Н. В. Об устойчивости нулевого решения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в случае центра // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 394–401. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.304

For citation: Bibikov Yu. N., Pliss V. A., Trushina N. V. On the stability of the zero solution of an essentially non-linear differential equation of the second order. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 394–401. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.304