

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Галямин Сергей Николаевич

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ СРЕД СО
СЛОЖНЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Специальность: 01.04.03 – радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Оглавление

Введение	4
Общая характеристика, актуальность и цели работы	4
Краткий обзор литературы	5
Краткое содержание диссертации	8
Положения и результаты, выносимые на защиту	10
Публикации и апробации	11
Глава 1. Электромагнитное поле заряда, движущегося в безграничной среде	12
1.1. Некоторые замечания к общей теории электромагнитного поля заряда, движущегося в изотропной среде	12
1.2. Электромагнитное поле движущегося заряда в случае изотропной пассивной среды с несколькими резонансными частотами	16
1.2.1. Модель среды с несколькими резонансными частотами	16
1.2.2. Аналитическое исследование компонент электромагнитного поля	17
1.2.3. Численный анализ компонент электромагнитного поля и обсуждение результатов	25
1.3. Поле заряда в среде с отрицательным показателем преломления	29
1.3.1. Среда с отрицательным показателем преломления	29
1.3.2. Модель левой среды и аналитическое исследование компонент электромагнитного поля	31
1.3.3. Энергетические характеристики электромагнитного поля движущегося заряда	35
1.3.4. Численный анализ и обсуждение результатов	38
1.4. Поле заряда в анизотропной среде	41
1.4.1. Аналитическое исследование компонент электромагнитного поля	41
1.4.2. Численный анализ и обсуждение результатов	49
1.5. Выводы	51
Глава 2. Электромагнитное поле заряда, пересекающего границу раздела между вакуумом и левой средой	52
2.1. Постановка задачи и общие результаты	52
2.2. Асимптотики поля в вакууме	62
2.2.1. Асимптотики в случае изолированной седловой точки	62
2.2.2. Равномерные асимптотики	70
2.3. Асимптотики поля в левой среде	75
2.4. Влияние потерь в левой среде на поле излучения	82
2.5. Численный расчет и обсуждение результатов	88
2.5.1. Описание численных алгоритмов	88
2.5.2. Численные результаты для Фурье-гармоник	89
2.5.3. Численные результаты для полного поля	100
2.6. Выводы	101
Глава 3. Электромагнитное поле заряда, пересекающего границу раздела между вакуумом и анизотропной средой	103
3.1. Постановка задачи и общие результаты	103

3.2. Асимптотики поля в вакууме	112
3.3. Асимптотики поля в среде	120
3.3.1. Область углов вблизи оси движения	122
3.3.2. Область углов вблизи границы	124
3.4. Влияние потерь в среде на поле излучения	130
3.5. Численные результаты и обсуждение	134
3.6. Выводы	143
Заключение	145
Приложение А. О выводе выражений для компонент поля равномерно движущегося заряда с использованием принципа причинности	147
Приложение Б. О вкладе «третьих» полюсов в асимптотику поля в случае границы раздела между вакуумом и левой средой	153
Приложение В. О вкладе «третьих» полюсов в асимптотику поля в случае границы раздела между вакуумом и анизотропной плазмоподобной средой	159
Список литературы	162

Введение

Общая характеристика, актуальность и цели работы

Проблемы излучения движущихся заряженных частиц в присутствии сред с теми или иными свойствами исследовались начиная с 30-х годов XX века. Несмотря на огромное количество публикаций по этой тематике, ряд вопросов остается не исследованным или недостаточно исследованным до сих пор. К числу таких вопросов относится, в частности, анализ поведения полного электромагнитного поля, создаваемого зарядом (как правило, обычно основное внимание уделялось энергетическим характеристикам поля излучения). Также нужно отметить, что актуальность исследований в этом направлении возрастает в последние годы в связи с бурным развитием методов создания новых материалов с необычными свойствами. Среди них стоит особо отметить так называемые «метаматериалы» – искусственные структуры из макроэлементов, проявляющие порой весьма неожиданные свойства. Одним из ярких примеров таких структур служит «левая» среда, в которой вектор плотности потока энергии противоположен волновому вектору, а излучение Вавилова–Черенкова (ИВЧ) в такой среде носит обратный характер. Процессы излучения заряженных частиц при наличии левой среды представляются довольно перспективными как для детектирования заряженных частиц, так и для диагностики пучков частиц. Также для этих целей могут быть интересны аналогичные процессы в присутствии анизотропных искусственных сред. Стоит отметить, что данные явления могут использоваться и при решении обратной задачи – определении характеристик среды по свойствам того или иного типа излучения. Перечисленные факторы указывают на актуальность исследований в этом направлении.

Цель работы заключается в аналитическом и численном исследовании электромагнитного поля точечного заряда, равномерно движущегося в безграничной среде со сложной или необычной дисперсией либо влетающего в такую среду. При этом анализируются следующие ситуации:

- случай движения заряда в безграничной изотропной среде с несколькими резонансными частотами;
- случай движения заряда в изотропной левой среде с частотной дисперсией;
- случай движения заряда в немагнитной анизотропной негиротропной одноосной среде с плазменной дисперсией компонент тензора диэлектрической проницаемости;
- случай влета заряда из вакуума в левую среду с частотной дисперсией;
- случай влета заряда из вакуума в немагнитную электрически анизотропную негиротропную среду с плазменной дисперсией компонент тензора диэлектрической проницаемости.

Краткий обзор литературы

Настоящий обзор затрагивает теоретические работы, посвященные главным образом излучению заряда, равномерно движущегося в безграничной среде или пересекающего границу раздела двух сред. Он естественным образом разбивается на две части, соответствующие указанным случаям.

Излучение заряда, равномерно движущегося в среде, было открыто С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым в 1934 году при изучении люминесценции растворов солей урана, возбуждаемой γ -лучами [1–3]. Впоследствии это излучение было названо «излучением Вавилова–Черенкова» (ИВЧ), а за рубежом за ним закрепился термин «черенковское излучение». Вскоре после открытия появилась макроскопическая теория эффекта, разработанная И. Е. Таммом и И. М. Франком [4, 5]. Она основывается на решении уравнений Максвелла с точечным источником, движущимся в немагнитной диэлектрической среде без потерь. Были получены интегральные выражения для компонент электромагнитного поля заряда и рассчитана энергия, теряемая им на излучение. Формула для потерь энергии заряда на единицу длины пути впоследствии была названа в честь ее авторов формулой Тамма–Франка. Несколько позже В. Л. Гинзбург [6] исследовал вопрос о поле и энергии частицы в оптически анизотропной среде, а также развил квантовую теорию ИВЧ [7]. В том же году Е. Fermi [8] рассмотрел случай диэлектрической среды с поглощением и исследовал влияние поляризации среды на величину энергетических потерь. Отметим, что в работе [8] были получены формулы для компонент поля заряда, движущегося в среде с диэлектрической проницаемостью, обладающей дисперсией резонансного типа с одной резонансной частотой и поглощением.

С этого времени началось активное развитие теории эффекта Вавилова–Черенкова. Среди первых исследований в данном направлении следует отметить, например, работы [9–12] (O. Halpern, H. Hall, R. M. Sternheimer), где результаты Е. Fermi для потерь энергии заряда были обобщены на случай изотропных веществ с более сложной частотной дисперсией диэлектрической проницаемости, в частности, эмульсий и твердых тел. Первое обобщение формулы Тамма–Франка на случай среды, обладающей как диэлектрическими, так и магнитными свойствами, было произведено в работах А. Г. Ситенко [13], и Д. Д. Иваненко и В. Н. Цытовича [14]. Что касается развития теории ИВЧ в анизотропных средах, то первыми исследованиями в этом направлении были работы А. А. Коломенского [15, 16], М. И. Каганова [17] и А. Г. Ситенко, М. И. Каганова [18], где были получены энергетические потери заряда при его движении вдоль оси одноосного диэлектрического кристалла. Дальнейшее развитие теории как по указанным направлениям, так и по другим аспектам теории ИВЧ, а также более подробный список литературы содержится в обзорах Б. М. Болотовского [19, 20]. Кроме того в последующие годы был опубликован ряд монографий [21–23], где были систематизированы основные результаты теории ИВЧ, а также освещены вопросы применения ИВЧ на практике.

Следует отметить, что одним из основных результатов теории ИВЧ обычно считалась формула, описывающая энергетические потери движущейся частицы, и выводу этой формулы уделялось основное внимание. Среди работ, затрагивавших вопросы исследования

самого электромагнитного поля движущегося заряда, можно отметить лишь несколько. Прежде всего, это работа И. Е. Тамма [5], где был предложен асимптотический метод построения поверхностей, на которых напряженности электромагнитного поля имеют максимум. Численный расчет компонент поля с использованием формул работы [8] был проведен Г. Н. Афанасьевым и В. Г. Картавенко [24], в этой работе также были построены поверхности «гребней» электромагнитного поля, предложенные И. Е. Таммом [5]. Для более сложных сред структура поля в известной нам литературе не исследовалась.

Интересно, что поля зарядов в последние десятилетия более активно исследовались в такой ситуации, когда они движутся в регулярной волноведущей структуре, содержащей ту или иную среду. Данные исследования, начатые еще в середине XX века [20], получили значительное развитие в последнее время, прежде всего в связи с перспективами применения подобных структур для целей так называемого кильватерного ускорения заряженных частиц (см., к примеру, [25–32]). Этот метод ускорения предполагает создание ускоряющего поля большим (ведущим) сгустком заряженных частиц и ускорение в этом поле малого (ведомого) сгустка. Для таких целей рассматривались различные структуры: чаще всего это был круглый волновод с одним или несколькими цилиндрическими слоями того или иного материала [26–32], но анализировались и волноводы иной формы [25]. Слои вещества обычно не обладали существенной дисперсией и поглощением [25–28], однако и задачи с учетом этих факторов также рассматривались [29–34]. Отметим также в этой связи, что в последнее время обсуждается идея применения подобных структур и для целей диагностики пучков частиц [33, 34].

Исследования в рассматриваемой области в значительной степени стимулируются быстрым развитием технологии разработки и производства искусственных «метасред» или «метаматериалов» [35–42]. С помощью метаматериалов могут быть реализованы достаточно сложные дисперсионные закономерности, зачастую не встречающиеся в природе. Одним из примеров является так называемая «левая» среда, или среда с отрицательным показателем преломления [43–45]. Первое описание левых сред было произведено В. Г. Веселаго в работах [43, 44].левой средой было названо изотропное непоглощающее вещество, имеющее одновременно отрицательными диэлектрическую и магнитную проницаемости. Коэффициент преломления в такой ситуации является вещественной величиной, что обеспечивает возможность распространения электромагнитных волн. Основные свойства левых сред, отмеченные В. Г. Веселаго, заключаются в следующем. Вектор электрического поля, вектор магнитного поля и волновой вектор волны образуют левую ортогональную тройку (отсюда и термин «левая среда»), следовательно, вектор Пойтинга противоположен волновому вектору и фазовой скорости. При этом электромагнитная волна, падающая из обычной среды на границу с левой средой, испытывает аномальное (отрицательное) преломление: преломленная волна имеет фазовую скорость, направленную к границе, и групповую скорость, проекция которой на границу раздела противоположна проекции групповой скорости падающей волны. Кроме того в левой среде наблюдаются обращенный эффект Вавилова–Черенкова и обращенный эффект Доплера [43–45].

Следует особо отметить, что вопросы, косвенно касающиеся левых сред, затрагивались различными учеными задолго до работ В. Г. Веселаго [43, 44]. Особо следует отметить

заслугу Л. И. Мандельштама, в работах которого было достигнуто глубокое понимание сути отрицательного преломления [46, 47]. Л. И. Мандельштамом было показано, что в основе отрицательного преломления лежит эффект «отрицательной групповой скорости», когда групповая скорость и поток энергии противоположны фазовой скорости. Таким образом, отрицательное преломление возможно для волн любой природы и, вообще говоря, не обязательно связано с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Упоминания о ранних исследованиях сред с отрицательной групповой скоростью, а также ссылки на соответствующие работы можно найти в обзорах В. М. Аграновича и Ю. Н. Гартштейна [48], В. Г. Веселаго с соавторами [49] и на веб-странице [50].

В работе J. Lu с соавторами [51] теоретически исследовалось излучение Вавилова–Черенкова в левой среде. При этом была предложена оригинальная энергетическая характеристика для описания свойств направленности излучения – энергетическая диаграмма излучения. С помощью нее был продемонстрирован обратный характер ИВЧ в левой среде. С этого времени термин «обратное излучение Вавилова–Черенкова» («reversed Cherenkov radiation») стал достаточно часто встречаться в научной литературе. Этому эффекту посвящен, например, обзор [52]. Также имеются попытки экспериментального наблюдения ИВЧ в левой среде [53, 54]. Следует отметить, что вопросы, связанные с обратным характером ИВЧ в случае отрицательной групповой скорости обсуждались еще в работах В. Е. Пафомова [55, 56]. Отметим, однако, что структура электромагнитного поля заряда, движущегося в левой среде, вовсе не анализировалась в известной нам научной литературе.

Задача о пересечении зарядом границы раздела между двумя средами, отличающимися диэлектрическими свойствами, впервые была рассмотрена в работе В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка [57]. Возникающее при этом излучение было названо переходным излучением (ПИ). С тех пор было опубликовано огромное количество работ по различным аспектам ПИ (см., например, обзор Ф. Г. Баса и В. М. Яковенко [58] и приведенный там список литературы), среди которых следует отметить следующие. В работе Г. М. Гарибяна [59] было произведено обобщение теории В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка на случай, когда среды отличаются как диэлектрическими, так и магнитными свойствами. В этой работе использовался метод перевала, однако в несколько усеченном виде – контур наискорейшего спуска строился только в окрестности седловой точки. В случае вылета заряда из среды в вакуум отмечалась возможность выхода в эту область излучения Вавилова–Черенкова, излученного частицей при движении в среде. В работе Е. А. Канера и В. М. Яковенко [60] рассмотрена задача о переходном излучении на границе вакуум – плазма с учетом пространственной дисперсии. В упоминавшихся работах В. Е. Пафомова [55, 56] рассмотрен случай пролета заряда через пластинку, в том числе анизотропную. В последующей монографии В. Л. Гинзбурга и В. Н. Цытовича [61] были систематизированы основные результаты теории переходного излучения.

Как и в случае с излучением Вавилова–Черенкова, основное внимание в теории ПИ уделялось энергетическим характеристикам, в результате чего некоторые вопросы не получили должного освещения в литературе. К ним относится, прежде всего, анализ электромагнитного поля для тех или иных моделей сред, включая даже классическую модель

резонансно диспергирующей изотропной среды. Что касается конкретного случая вакуум – левая среда, то он лишь частично был рассмотрен в работе [62]. Эффект обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) (без использования данного термина) упоминался и анализировался лишь на уровне энергетических характеристик [55, 62], а его проявление на уровне полей практически не исследовалось.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена исследованию поля точечной заряженной частицы, движущейся в безграничной среде с частотной дисперсией.

В параграфе 1.1 рассматриваются некоторые общие свойства известных интегралов Фурье, определяющих электромагнитное поле движущейся частицы. Определяется «физический» лист римановой поверхности, анализируются свойства подынтегральных функций, находятся области возможной трансформации исходного контура интегрирования и асимптоты контура наискорейшего спуска (КНС). Показывается, что интеграл по симметричному относительно мнимой оси контуру может быть сведен к интегралу по одной его части в правой полуплоскости. Полученные свойства являются базой для дальнейшего исследования.

В параграфе 1.2 рассматривается случай многорезонансной лоренцевской среды при условии, что резонансные частоты существенно превышают плазменные частоты. Анализируется расположение разрезов и полюсов на комплексной плоскости частоты, после чего проводится преобразование интегралов методами теории функций комплексного переменного. Полученные выражения для компонент полного поля представляют собой сумму трех слагаемых: волновое поле (поле излучения Вавилова–Черенкова), «квазикулоновское» (или квазистатическое) поле и так называемый «плазменный след». Такое представление имеет преимущества по сравнению с исходными интегралами по вещественной оси, к числу которых относится ясный физический смысл и определенные преимущества при вычислении отдельных компонент. В параграфе 1.2 также описан эффективный алгоритм численного расчета, использующий определенную трансформацию контура интегрирования. Приводятся типичные графические результаты, полученные при помощи данного алгоритма.

В параграфе 1.3 сходная методика применяется к анализу поля заряда, движущегося в левой среде, у которой диэлектрическая и магнитная проницаемости отрицательны в одном и том же диапазоне частот. При этом используется резонансная модель для магнитной проницаемости и плазменная модель для диэлектрической проницаемости. Получено разложение полного поля на волновую часть, «квазикулоновскую» часть и плазменный след. Представлены типичные графические результаты для полного поля. Проведен анализ энергетических диаграмм излучения. Продемонстрированы различия характеристик излучения в обычной (правой) среде и в левой среде, где излучение Вавилова–Черенкова (ИВЧ) носит «обратный» характер, т. е. максимум диаграммы составляет тупой угол с направлением скорости движения заряда. Отмечены также ситуации, когда имеется как

обычное, так и обратное ИВЧ.

В параграфе 1.4 проведено аналогичное аналитическое и численное исследование для случая анизотропной негиротропной одноосной среды с плазменной зависимостью компонент тензора диэлектрической проницаемости от частоты. Особое внимание уделено такой ситуации, когда ИВЧ носит обратный характер.

Вторая глава посвящена исследованию поля частицы, которая влетает из вакуума в полупространство, заполненное левой средой.

В параграфе 2.1 приводится мотивация необходимости исследования данного явления.

В параграфе 2.2 выполняется постановка задачи, приводятся известные общие интегральные выражения для компонент поля, выбираются модели дисперсии для описания обеих сред. Далее проводится анализ особенностей подынтегральных выражений и описываются применяемые методы (аналитический и численный).

В параграфе 2.3 описывается получение асимптотических представлений для Фурье-гармоник компонент поля в области вакуума. Определяется седловая точка, строится КНС и исследуется возможность захвата полюсов при трансформации исходного контура к КНС. Вклады этих полюсов описывают ИВЧ, вышедшее из левой среды в вакуумную область. Это излучение названо «обратным черенковско-переходным излучением» (ОЧПИ). Подобно переходному излучению (ПИ), оно возникает при наличии границы раздела, а, подобно черенковскому, имеет место при выполнении в среде черенковского условия. Показывается, что ОЧПИ в вакууме, является «двухбарьерным» эффектом: оно генерируется в определенном диапазоне скоростей движения частицы. Нижний предел – это черенковский барьер для левой среды, а верхний предел связан с полным внутренним отражением волн ИВЧ от границы раздела. Показывается также, что вакуумное ОЧПИ является двухпороговым эффектом и по частоте, что представляется весьма перспективным для приложений. Проведенное исследование включает также анализ поведения поля в переходных областях (областях «полутени»).

В параграфе 2.4 проведено аналогичное исследование для полупространства, заполненного левой средой. Получены асимптотические представления, справедливые, в том числе, и в областях «полутени».

В параграфе 2.5 проводится анализ влияния малых потерь в среде на распространение волн излучения. Показано, что потери в среде приводят к ослаблению излучения не только в среде, но и в вакууме. Даются оценки областей существенности ПИ, ИВЧ и ОЧПИ. Эти оценки показывают, что вакуумное ОЧПИ может быть обнаружено в эксперименте.

В параграфе 2.6 описывается алгоритм численного расчета как Фурье-гармоник поля, так и полного поля. При этом никаких ограничений не накладывается, расчет проводится по строгим формулам. Представлены типичные численные результаты, иллюстрирующие основные эффекты, в том числе эффект ОЧПИ. Для Фурье-гармоник дано сравнение результатов численного расчета и расчета по асимптотическим формулам, демонстрирующее хорошее совпадение в области применимости последних. Результаты расчета полного поля показывают, что ОЧПИ является доминирующим эффектом при определенных временах и расстояниях.

В третьей главе рассматривается задача о влете частицы в электрически анизотропную негиротропную одноосную среду, компоненты тензора диэлектрической проницаемости которой обладают дисперсией плазменного типа, а оптическая ось ортогональна границе раздела.

Проводится анализ особенностей подынтегральных выражений для Фурье-образов компонент электромагнитного поля (параграф 3.2). С помощью метода перевала строятся асимптотики в дальней (по отношению к точке влета) зоне в вакууме (параграф 3.3) и в среде (параграф 3.4).

В процессе получения асимптотик поля получены, в частности, условия генерации вакуумного ОЧПИ. Показано, что ОЧПИ в такой ситуации имеет только один порог по скорости (причем он связан с эффектом полного внутреннего отражения), но, тем не менее, два порога по частоте. Проведена оценка областей «полутени». Выявлено влияние диссипации в среде на ОЧПИ в вакууме. Оценены области существенности ОЧПИ. Для полупространства, заполненного средой, также построены асимптотики, оценены области «полутени» и рассмотрено влияние диссипации на различные компоненты поля.

Численные расчеты проводятся на основании строгих формул (параграф 3.5). Описывается алгоритм численного расчета, приводятся характерные графические результаты, которые сравниваются с результатами расчета по асимптотическим формулам. Проводится также сравнение с соответствующими результатами для случая левой среды. Отмечены, в частности, существенные отличия свойств ОЧПИ в этих двух задачах.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В приложении А приводится вывод выражений для поля равномерно движущегося заряда с использованием принципа причинности. **В приложениях Б и В** производится анализ возможности генерации поверхностных волн на границе раздела в случае изотропной левой среды и в случае рассматриваемой анизотропной среды.

Положения и результаты, выносимые на защиту

1. Результаты исследования электромагнитного поля заряда, равномерно движущегося в изотропной многорезонансной среде, изотропной левой среде и анизотропной одноосной среде с плазменной дисперсией компонент тензора диэлектрической проницаемости, из которых вытекает следующее:
 - а) Поле равномерно движущегося заряда представимо в виде суммы волнового поля, квазистатического поля и «плазменного следа».
 - б) Для численного расчета поля целесообразно использовать алгоритм интегрирования по определенному контуру в комплексной плоскости, обеспечивающему плавное поведение подынтегральных функций и их наискорейшее убывание при больших значениях переменной интегрирования.
 - в) Поле излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) в левой среде сильнее отстает от заряда по сравнению со случаем обычной среды.

2. Результаты исследования полного поля заряда, влетающего из вакуума в изотропную левую среду, которые подтверждают возможность обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) и выявляют следующие его свойства:
 - а) ОЧПИ в вакууме имеет как нижний порог по скорости (связанный с порогом генерации ИВЧ), так и верхний порог (связанный с полным внутренним отражением ИВЧ от границы); диапазон частот ОЧПИ также имеет нижнюю и верхнюю границы.
 - б) Наличие поглощения в среде приводит к ослаблению ОЧПИ не только в среде, но и в вакууме, причем в вакууме влияние диссипации минимально в областях «полутени».
 - в) ОЧПИ в вакууме может быть основным видом излучения при определенных временах наблюдения.
3. Результаты исследования электромагнитного поля заряда, влетающего из вакуума в анизотропную одноосную среду с плазменной дисперсией компонент тензора диэлектрической проницаемости, из которых вытекает следующее:
 - а) Как и в случае левой среды, объемное излучение в вакуумной области может содержать ОЧПИ, однако, в отличие от случая левой среды, волны ОЧПИ не интерферируют друг с другом.
 - б) В отличие от случая левой среды, ОЧПИ в вакууме имеет только нижний порог по скорости, связанный с полным внутренним отражением ИВЧ от границы; диапазон частот ОЧПИ ограничен как снизу, так и сверху.
 - в) Наличие поглощения в среде приводит к ослаблению ОЧПИ в вакууме, причем наименьшее ослабление имеет место в областях «полутени».

Публикации и апробации

Все основные результаты диссертации отражены в 12 публикациях [63–74], в том числе статьях [70–74], тезисах докладов на конференциях [63–66] и полнотекстовых докладах в трудах конференций [67–69]. Ещё одна статья принята к печати [75].

Вошедшие в диссертацию результаты докладывались на X Всероссийской научной конференции студентов-радиофизиков (СПб, 2006) [63], Региональных XI, XIV и XVI конференциях по распространению радиоволн (СПб, 2005, 2008 и 2010) [64–66], ведущих международных конференциях в области физики ускорителей «Particle Accelerator Conference (PAC09)» (Ванкувер, Канада, 2009) [67] и «International Particle Accelerator Conference (IPAC10)» (Киото, Япония, 2010) [68], международной конференции «Days on Diffraction» (СПб, 2009) [69] и VIII международном симпозиуме «Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS-09)» (Москва, Звенигород, 2009) [70].

Глава 1

Электромагнитное поле заряда, движущегося в безграничной среде с резонансной дисперсией

1.1. Некоторые замечания к общей теории электромагнитного поля заряда, движущегося в изотропной среде

В данном разделе будет описан общий подход к анализу интегралов, определяющих компоненты поля заряда, равномерно движущегося в изотропной среде с произвольной частотной дисперсией. В отличие от традиционного в теории излучения Вавилова–Черенкова подхода, рассматривающего интегралы по вещественной оси частот, мы будем активно использовать методы теории функций комплексного переменного. Как будет видно из дальнейшего, такой подход дает существенные преимущества как для аналитического описания полей, так и разработки алгоритмов его расчета.

Пусть точечный заряд q движется с постоянной скоростью $\vec{V} = V\vec{e}_z$ (где $V > 0$). Положение заряда в момент времени t определяется соотношениями $x = y = 0$, $z = Vt$. Среду будем считать изотропной, однородной, линейной и не обладающей пространственной дисперсией. Квадрат показателя преломления среды равен $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$. Как известно, в цилиндрической системе координат ρ , φ , z компоненты электромагнитного поля заряда могут быть записаны в следующем виде [4, 5, 8, 19, 21–24]:

$$\{E_\rho^q, E_z^q, H_\varphi^q\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{E_{\rho\omega}^q(\omega), E_{z\omega}^q(\omega), H_{\varphi\omega}^q(\omega)\} \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega, \quad (1.1.1)$$

$$E_{\rho\omega}^q(\omega) = \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{i\pi s(\omega)}{\varepsilon(\omega)} H_1^{(1)}(s(\omega)\rho),$$

$$E_{z\omega}^q(\omega) = \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{-\pi\beta c}{\omega\varepsilon(\omega)} s^2(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)\rho), \quad (1.1.2)$$

$$H_{\varphi\omega}^q(\omega) = \frac{q}{2\pi\beta c} i\pi\beta s(\omega) H_1^{(1)}(s(\omega)\rho),$$

где $\zeta = z - Vt$, $\beta = V/c$, c – скорость света в вакууме, $H_V^{(1)}(\xi)$ – функции Ханкеля,

$$s(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{V^2} (n^2(\omega)\beta^2 - 1)}. \quad (1.1.3)$$

Контуром интегрирования в формулах (1.1.1) является вещественная ось. Выражения (1.1.1)

– (1.1.3) удовлетворяют уравнениям Максвелла и материальным соотношениям независимо от того, как будет фиксирован корень при нахождении функции $s(\omega)$ (1.1.3). При выборе «физической ветви» данного радикала следует опираться на то или иное «условие на бесконечности» (или «принцип излучения»). В рамках данной работы мы будем использовать физически очевидное требование затухания волнового процесса, справедливое во всех пассивных средах. Именно, будем считать, что среда, в которой происходит движение частицы, обладает малой диссипацией, приводящей к наличию малых мнимых частей у проницаемостей: $\text{Im}\varepsilon(\omega) > 0$, $\text{Im}\mu(\omega) > 0$ ($\omega > 0$). В конечных результатах мы можем устремлять диссипацию к нулю. «Физическое» решение будем выбирать по принципу затухания, определяя функцию $s(\omega)$ (на вещественных частотах) таким образом, чтобы волны убывали при распространении от оси движения заряда,

$$\text{Im}s(\omega) > 0. \quad (1.1.4)$$

Данный принцип применительно к теории электромагнитного поля движущегося заряда использовался в работе [8]. Отметим, что выражения (1.1.1) – (1.1.4) могут быть также получены из начальной задачи с использованием принципа причинности (см. приложение А).

Суть нашего подхода к исследованию интегралов (1.1.1) заключается в том, чтобы рассмотреть их на комплексной плоскости ω . Для этого, прежде всего, необходимо рассмотреть на комплексной плоскости ветвящуюся функцию $s(\omega)$. Функция $s(\omega)$ должна быть определена таким образом, чтобы на вещественной оси было выполнено требование (1.1.4). При этом, естественно, возможны различные варианты проведения разрезов. Представляется целесообразным провести их по таким отрезкам, где $\text{Im}s = 0$, фиксируя «физический» лист римановой поверхности требованием (1.1.4).

Отметим существенные для дальнейшего анализа свойства функции $s(\omega)$ и функций (1.1.2) на «физическом» листе римановой поверхности. Для этого воспользуемся известным соотношением [76, 77] $n^2(-\bar{\omega}) = \bar{n}^2(\omega)$, где черта означает операцию комплексного сопряжения (это свойство вытекает из вещественности компонент электромагнитного поля). Тогда из (1.1.3) и (1.1.4) вытекает, что

$$s(-\bar{\omega}) = \exp(i\pi) \bar{s}(\omega). \quad (1.1.5)$$

Также непосредственно из вещественности компонент электромагнитного поля (1.1.1) следует, что

$$E_{\rho\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{\rho\omega}^q(\omega), \quad E_{z\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{z\omega}^q(\omega), \quad H_{\varphi\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{H}_{\varphi\omega}^q(\omega). \quad (1.1.6)$$

Из (1.1.6) вытекает возможность заменять интеграл по контуру, симметричному относительно мнимой оси, на интеграл по той его части, которая лежит в области $\text{Re}\omega \geq 0$. Пусть контур Γ состоит из двух частей, одна из которых (Γ_+) лежит в области $\text{Re}\omega \geq 0$, а другая (Γ_-) – в области $\text{Re}\omega \leq 0$ (рис. 1.1). Если контур Γ_+ переходит в Γ_- при замене ω на $-\bar{\omega}$ (то есть суммарный контур Γ симметричен относительно мнимой оси), то с помощью (1.1.6) получаем тождество

$$\int_{\Gamma} F_{\omega}^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega = 2 \int_{\Gamma_+} \text{Re} \left[F_{\omega}^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega \right], \quad (1.1.7)$$

где F_ω^q – любая из функций $E_{\rho\omega}^q(\omega)$, $E_{z\omega}^q(\omega)$, $H_{\varphi\omega}^q(\omega)$. Таким образом, при вычислении (1.1.1) можно ограничиться рассмотрением полуплоскости $\text{Re } \omega > 0$, что мы и будем делать в дальнейшем при проведении численных расчетов. Например, если контур Γ представляет собой два луча, исходящих из нуля, лежащих, соответственно, в I и II четвертях комплексной плоскости ω и составляющих углы α и $\pi - \alpha$ с положительным направлением вещественной оси, то

$$\int_{\Gamma} F_\omega^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega = 2 \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[F_\omega^q(|\omega| e^{i\alpha}) \exp\left(i|\omega| e^{i\alpha} \frac{\zeta}{V} + i\alpha\right) \right] d|\omega|, \quad (1.1.8)$$

Если эти отрезки лежат на вещественной оси ($\alpha = 0$), то

$$\int_{\Gamma} F_\omega^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega = 2 \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[F_\omega^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) \right] d\omega. \quad (1.1.9)$$

Если же отрезки лежат на мнимой оси ($\alpha = \pi/2$), то

$$\int_{\Gamma} F_\omega^q \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega = -2 \int_0^{+\infty} \text{Im} \left[F_\omega^q(i\varpi) \right] \exp\left(-\varpi \frac{\zeta}{V}\right) d\varpi. \quad (1.1.10)$$

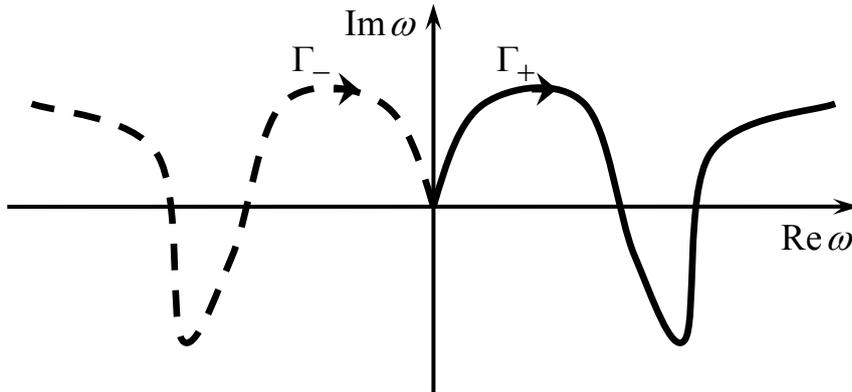


Рис. 1.1. С помощью формулы (1.1.7) интеграл по контуру $\Gamma = \Gamma_- + \Gamma_+$, симметричному относительно мнимой оси, может быть заменен на интеграл по контуру Γ_+ , лежащему в правой полуплоскости.

Выпишем теперь асимптотику функции $s(\omega)$ на «физическом» листе. Учитывая, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ для всех реальных сред $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ и $\mu(\omega) \rightarrow 1$, имеем

$$s(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \beta^2} V^{-1} \sqrt{-\omega^2},$$

где $\sqrt{-\omega^2}$ должен пониматься таким образом, чтобы было выполнено требование (1.1.4) $\text{Im} \sqrt{-\omega^2} > 0$. Легко видеть, что оно удовлетворяется, если $\sqrt{-\omega^2} = i\omega \text{sgn}(\text{Re } \omega)$. Таким образом, окончательно получим следующий вид асимптотики:

$$s(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{V} i\omega \text{sgn}(\text{Re } \omega). \quad (1.1.11)$$

Подчеркнем, что наличие разрыва в асимптотике связано с фиксацией «физического» листа по правилу $\text{Im} s(\omega) > 0$.

Используя (1.1.11) и асимптотики функций Ханкеля, нетрудно показать, что подынтегральные функции в (1.1.1) будут экспоненциально убывать с ростом $|\omega|$ в следующих областях комплексной плоскости ω :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \omega > -|\operatorname{Re} \omega| \rho \sqrt{1-\beta^2} / \zeta & \quad \text{при} \quad \zeta > 0 \\ \operatorname{Im} \omega < |\operatorname{Re} \omega| \rho \sqrt{1-\beta^2} / |\zeta| & \quad \text{при} \quad \zeta < 0 \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

При $\zeta = 0$ подынтегральные функции в (1.1.1) будут экспоненциально убывать при $|\omega| \rightarrow \infty$ на всем «физическом» листе (за исключением мнимой оси) за счет требования (1.1.4) и асимптотики (1.1.11). Неравенства (1.1.12) необходимо учитывать при трансформации контура интегрирования на бесконечности. Сегменты экспоненциального убывания для областей перед ($\zeta > 0$) и за ($\zeta < 0$) зарядом показаны штриховкой на рис. 1.2.

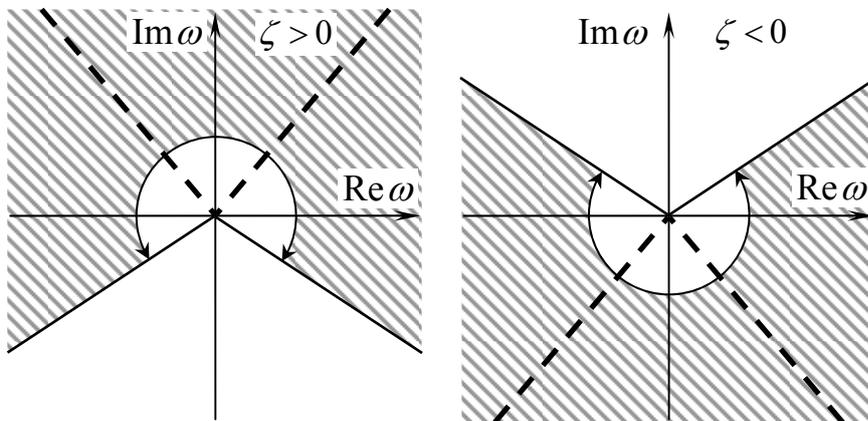


Рис. 1.2. Области убывания подынтегральных функций (штриховка) и асимптоты КНС (пунктир), лежащие в этих областях.

В дальнейшем существенную роль будут играть асимптоты контура наискорейшего спуска (КНС). Сам контур не может быть найден без конкретизации модели среды, однако его поведение на бесконечности определяется лишь асимптотикой $s(\omega)$ (1.1.11). Асимптоты КНС лежат в областях экспоненциального убывания, определяемых неравенствами (1.1.12), и даются уравнением $\operatorname{Re}(s\rho + \omega\zeta V^{-1}) = \text{const}$ (при $|\omega| \rightarrow \infty$ значение константы несущественно). С учетом (1.1.11) оно записывается в виде

$$\rho \sqrt{1-\beta^2} \operatorname{Im} \omega = \zeta |\operatorname{Re} \omega|. \quad (1.1.13)$$

На рис. 1.2 асимптоты показаны пунктирными лучами. Дальнейшее продвижение связано с применением техники контурного интегрирования совместно с (1.1.7) – (1.1.13) к вычислению интегралов (1.1.1), определяющих компоненты поля.

Завершая данный раздел, подчеркнем, что в нем были рассмотрены свойства подынтегральных функций, входящих в выражения для компонент поля движущегося заряда (1.1.1), без конкретизации модели дисперсии среды. В последующем на конкретных примерах будет показано, что эти свойства весьма полезны при аналитическом исследовании поля и построении алгоритмов для численных расчетов.

1.2. Электромагнитное поле движущегося заряда в случае изотропной пассивной среды с несколькими резонансными частотами

1.2.1. Модель среды с несколькими резонансными частотами

В данном разделе мы будем рассматривать изотропную пассивную среду с частотной дисперсией резонансного типа, предполагая при этом, что имеется несколько резонансных частот $\omega_{\Gamma m}$ (для определенности положим, что $\omega_{\Gamma m+1} > \omega_{\Gamma m}$). Выражение для показателя преломления среды запишем в следующем типичном виде [21, 22]:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega) = 1 + \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{\omega_{\Gamma m}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega}, \quad (1.2.1)$$

где параметры ω_{pm} с некоторой долей условности могут быть названы «плазменными частотами», а параметры $\omega_{\text{dm}} \ll \omega_{\text{pm}}$ определяют диссипацию электромагнитной энергии в среде. Отметим, что пока нам не важно, диэлектрическая (ε) или магнитная (μ) проницаемость среды отвечает за ее резонансные свойства.

Отметим также, что обычно в литературе встречается следующее соотношение для квадрата показателя преломления многорезонансной среды, которое получается при моделировании молекул (атомов) в виде лоренцевских осцилляторов [77, 78]:

$$\frac{n^2(\omega) - 1}{n^2(\omega) + 2} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{\omega_{\Gamma m}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega} \quad (1.2.2)$$

(сходное выражение, отличающееся лишь модификацией параметров ω_{pm} , получается и в рамках более точной квантовой теории). Из (1.2.2) для $n^2(\omega)$ получаем

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\sum_{m=1}^M \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{\omega_{\Gamma m}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega}}{1 - \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{\omega_{\Gamma m}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega}}. \quad (1.2.3)$$

Выражение (1.2.3) может быть преобразовано к виду

$$n^2 = 1 + \frac{\sum_{m=1}^M \omega_{\text{pm}}^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\omega_{\Gamma j}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dj}}\omega)}{\prod_{m=1}^M (\omega_{\Gamma m}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega) - \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{3} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\omega_{\Gamma j}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{\text{dj}}\omega)}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{m=1}^M \omega_{pm}^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\omega_{rj}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{dj}\omega)}{\sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left(\omega_{rm}^2 - \frac{M\omega_{pm}^2}{3} - \omega^2 - 2i\omega_{dm}\omega \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\omega_{rj}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{dj}\omega)},$$

откуда видно, что при выполнении неравенств

$$\omega_{rm}^2 \gg \frac{M\omega_{pm}^2}{3}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1.2.4)$$

формула (1.2.3) сводится к (1.2.1). Таким образом, при наличии относительно небольшого числа резонансов модель (1.2.1) оказывается справедливой, если все резонансные частоты существенно превышают все плазменные частоты. Как показывает более детальное рассмотрение [78], переход от формулы (1.2.2) к формуле (1.2.1) соответствует отождествлению локального (действующего) и падающего поля. Такое приближение справедливо в достаточно разреженных средах, например, в большинстве газов. В плотных средах, строго говоря, необходимо пользоваться формулой (1.2.3). Однако, как мы увидим дальше, в частных случаях возможна аппроксимация реальной зависимости $n^2(\omega)$ с помощью формулы (1.2.1) даже для твердых тел.

Итак, в случае зависимости (1.2.1) функция $s^2(\omega)$ может быть представлена в следующем виде:

$$s^2(\omega) = \frac{(\beta^2 - 1)\omega^2}{V^2} \frac{\prod_{m=1}^M (\omega_{rm}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{dm}\omega) + \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \sum_{m=1}^M \omega_{pm}^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\omega_{rj}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{dj}\omega)}{\prod_{m=1}^M (\omega_{rm}^2 - \omega^2 - 2i\omega_{dm}\omega)}. \quad (1.2.5)$$

Нули числителя в этом выражении могут быть, в принципе, найдены численно либо (при $M \leq 2$) аналитически.

1.2.2. Аналитическое исследование компонент электромагнитного поля

При аналитическом исследовании мы будем пренебрегать диссипацией в среде, т. е. будем полагать $\omega_{dm} = 0$, $m = 1, 2, \dots, M$. Ненулевые значения ω_{dm} будут использоваться только для определения ветви радикала $s(\omega)$ и установления взаимного расположения контуров и особенностей на комплексной плоскости, после чего будет осуществляться предельный переход $\omega_{dm} \rightarrow 0$.

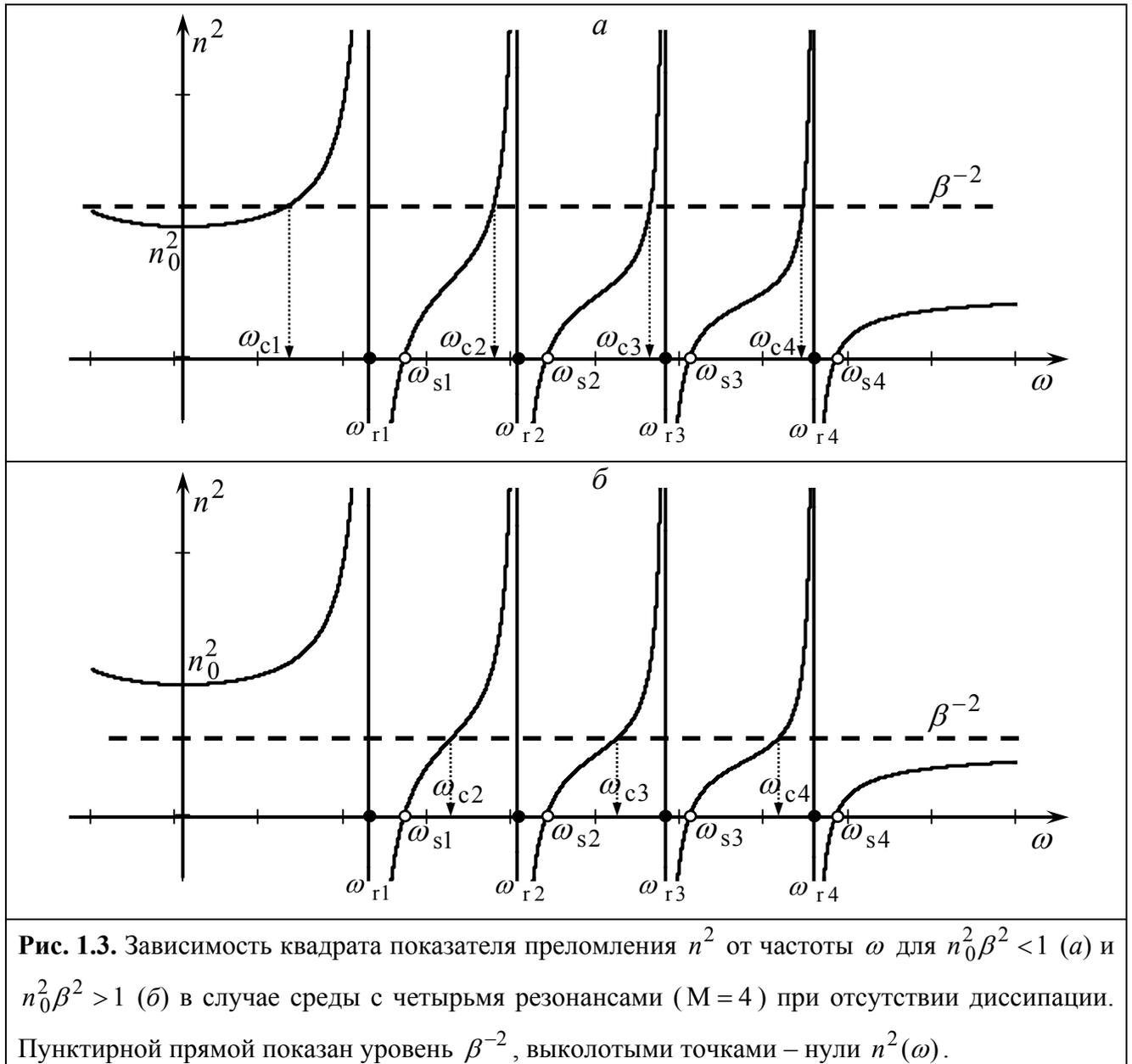


Рис. 1.3. Зависимость квадрата показателя преломления n^2 от частоты ω для $n_0^2 \beta^2 < 1$ (а) и $n_0^2 \beta^2 > 1$ (б) в случае среды с четырьмя резонансами ($M = 4$) при отсутствии диссипации. Пунктирной прямой показан уровень β^{-2} , выколотыми точками – нули $n^2(\omega)$.

Обозначая как ω_{cm} нули числителя в (1.2.5), имеем

$$s^2(\omega) = \frac{(\beta^2 - 1)\omega^2}{V^2} \frac{\prod_{m=1}^M (\omega^2 - \omega_{cm}^2)}{\prod_{m=1}^M (\omega_{gm}^2 - \omega^2)}. \quad (1.2.6)$$

Для дальнейшего важно различать две ситуации. Положим сначала, что $n_0^2 \beta^2 < 1$, где $n_0^2 = n^2(0) = 1 + \sum_{m=1}^M \omega_{pm}^2 \omega_{gm}^{-2}$ – показатель преломления для волн, частота которых много меньше частоты низшего резонанса. Данное условие означает, что фазовая скорость низкочастотных волн $V_{ph0} = c\beta_0$ больше скорости движения заряда ($\beta_0 \equiv n_0^{-1} > \beta$). На рис. 1.3, *a* изображена зависимость $n^2(\omega)$, а штрихованной прямой линией показан уровень β^{-2} , соответствующий рассматриваемому случаю. Как видим, в данном случае имеется M вещественных положительных нулей функции $s^2(\omega)$ (решений уравнения $n^2(\omega)\beta^2 = 1$). Отрезки вещественной оси, где $n^2(\omega) > \beta^{-2}$, являются диапазонами частот излучения Вавилова–Черенкова. Действительно, на этих частотах $s^2 > 0$, функция s вещественна и (1.1.1) представляет собой суперпозицию распространяющихся цилиндрических волн (при $|s| \rho \gg 1$):

$$\{E_{\rho\omega}^q, E_{z\omega}^q, H_{\phi\omega}^q\} \exp\left(i\omega \frac{z}{V}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp\left[i\left(s\rho + \omega \frac{z}{V} - \omega t\right)\right].$$

Верхними границами диапазонов излучения являются резонансные частоты ω_{gm} , а нижними – частоты ω_{cm} .

На комплексной плоскости ω проведем разрезы по отрезкам $\text{Im}s = 0$, фиксируя «физический» лист римановой поверхности требованием $\text{Im}s > 0$. Система таких разрезов показана на рис. 1.4, *a* жирными линиями. Чтобы установить взаимное расположение контура интегрирования и разрезов, рассмотрим предельный переход от случая ненулевых потерь к случаю $\omega_{dm} = 0$. При $\omega_{dm} > 0$, как видно из (1.2.5), нули знаменателя $s^2(\omega)$ имеют вид

$$\omega \approx \omega_{gm} - i\omega_{dm}, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

т. е. опускаются в нижнюю полуплоскость. Можно показать, что нули числителя $s^2(\omega)$ (за исключением точки $\omega = 0$) также опускаются в нижнюю полуплоскость. В итоге разрезы $\text{Im}s = 0$ (за исключением разрезов, идущих вдоль мнимой оси), оказываются ниже контура интегрирования (вещественной оси). В пределе $\omega_{dm} \rightarrow 0$ получаем, что контур интегрирования идет по верхним берегам этих разрезов. Отметим, что на верхних берегах разрезов $\text{sgn}s = \text{sgn}\omega$, т. е. выполнено условие излучения Зоммерфельда, согласно которому фазовая скорость распространяющихся волн \vec{V}_{ph} должна быть направлена от источника, что

приводит к требованию $V_{\text{ph}\rho} = s\omega / (\omega^2 c^{-2} n^2) > 0$. Подчеркнем, что при этом автоматически выполняется и более фундаментальное условие излучения Мандельштама, согласно которому групповая скорость $\vec{V}_g = d\omega/d\vec{k}$ должна быть направлена от источника [46, 47, 79]. В рассматриваемой нами ситуации принцип Мандельштама приводит к требованию $V_{g\rho} = d\omega/ds > 0$. Поскольку $ds^2/d\omega = 2s ds/d\omega$, то это требование можно записать в виде $s^{-1} ds^2/d\omega > 0$ или $\text{sgn } s = \text{sgn } ds^2/d\omega$, которое удовлетворяется в силу нормального характера дисперсии ($\omega dn^2/d\omega > 0$).

Отметим, что при извлечении радикала из (1.2.6), функция $\sqrt{\omega^2}$ записывается в виде

$$\sqrt{\omega^2} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = |\omega| \exp\left(\frac{i}{2}(\psi_0^+ + \psi_0^-)\right), \quad (1.2.7)$$

где $\psi_0^\pm = \arg(\omega \mp i\delta)|_{\delta \rightarrow +0}$, причем $-3\pi/2 < \psi_0^+ < \pi/2$, $-\pi/2 < \psi_0^- < 3\pi/2$. Легко убедиться, что именно при таком определении радикала на тех частях контура интегрирования, где $s^2 < 0$, выполнено требование убывания «местных волн» (т. е. $s = i|s|$). Контур интегрирования проходит между точками ветвления $\pm i\delta$ (рис. 1.4).

Таким образом, контур интегрирования обходит точки ветвления функции $s(\omega) \pm \omega_{cm}$ и $\pm \omega_{gm}$ сверху. Отметим, что поскольку контур интегрирования может быть дополнен до замкнутого контура полуокружностью в верхней полуплоскости при $\zeta > 0$ и полуокружностью в нижней полуплоскости при $\zeta < 0$ (см. свойство (1.1.12) и рис. 1.2), то разрезы, лежащие на вещественной оси, дают вклад только в области $\zeta < 0$. Таким образом, волновое поле (поле излучения Вавилова–Черенкова), связанное с вкладом этих разрезов, существует только позади источника, что вполне естественно.

Кроме отмеченных особенностей, подынтегральные выражения для компонент электрического поля E_ρ и E_z могут содержать полюсы $\pm \omega_{sm}$ – нули диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ (разумеется, это имеет место лишь в том случае, когда частотная зависимость (1.2.1) определяется функцией $\varepsilon(\omega)$, а не функцией $\mu(\omega)$). Данные особенности определяют так называемый «плазменный след» источника, который представляет собой плазменные колебания, возбуждаемые по пути движения источника и не переносящие электромагнитную энергию [19]. Как можно показать из (1.2.1), при наличии ненулевых потерь эти полюсы смещаются с вещественной оси в нижнюю полуплоскость, и в пределе $\omega_{dm} \rightarrow 0$ оказываются бесконечно близко, но ниже контура интегрирования. Таким образом, эта часть электромагнитного поля также существует только в области позади источника.

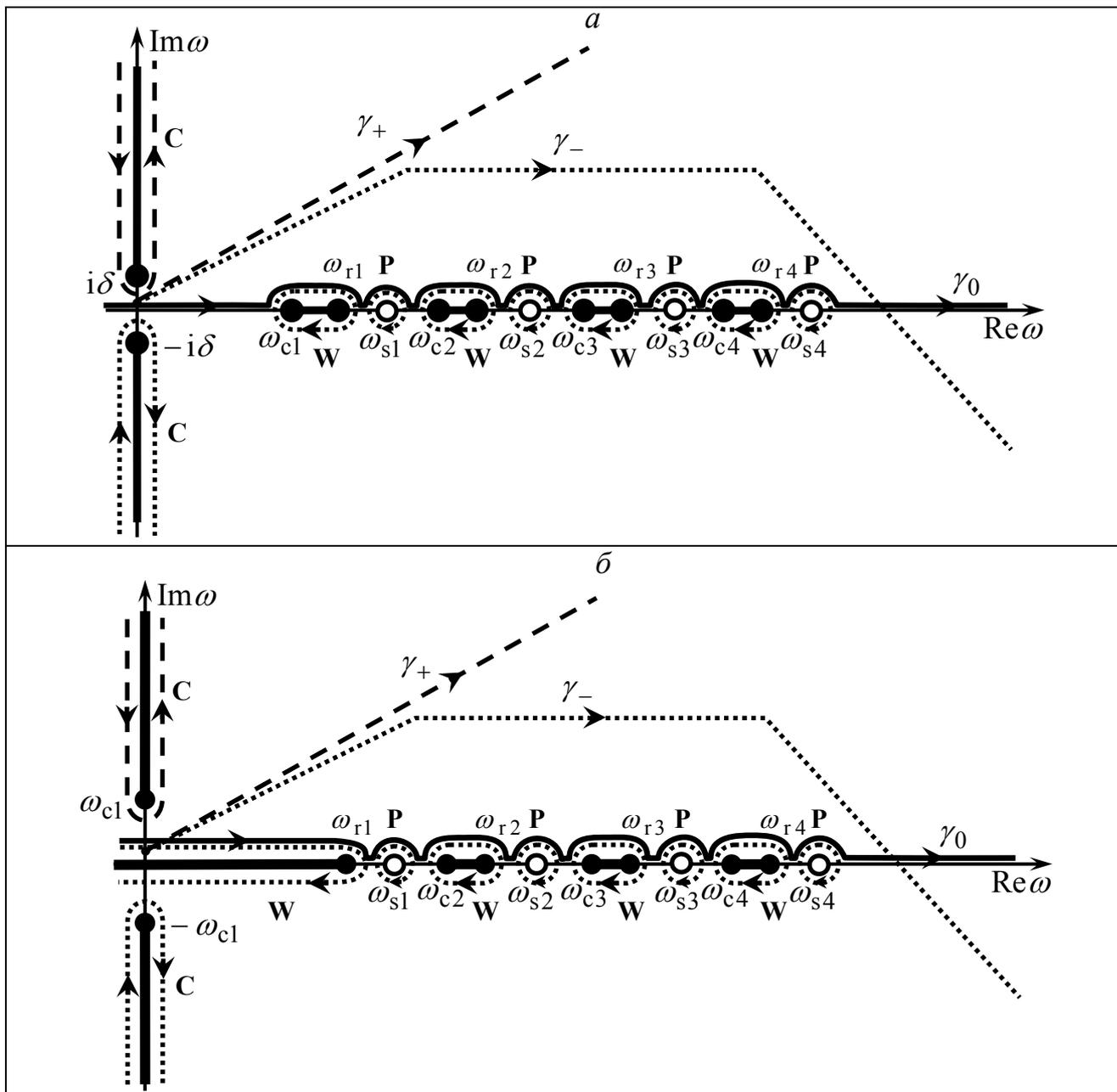


Рис. 1.4. Характерный вид комплексной плоскости ω при $n_0^2 \beta^2 < 1$ (а) и $n_0^2 \beta^2 > 1$ (б) в случае среды с четырьмя резонансами ($M=4$). Жирными линиями показаны разрезы, выколотыми точками – полюса подынтегральных выражений. Контура, показанные пунктиром, соответствуют области перед зарядом, контура, показанные мелким пунктиром – области за зарядом, γ_0 – исходный контур интегрирования, γ_{\pm} – контура, использовавшиеся для численного расчета полного поля. Показана только правая полуплоскость ($\text{Re } \omega > 0$), т. к. полюса и разрезы расположены симметрично относительно мнимой оси.

Рассмотрим теперь случай $n_0^2 \beta^2 > 1$, когда фазовая скорость низкочастотных волн меньше скорости движения заряда. При этом точки ветвления $\pm \omega_{c1}$ оказываются чисто мнимыми, тогда как значения $\pm \omega_{cm}$ при $m \geq 2$ остаются вещественными, и спектр излучения Вавилова–Черенкова начинается от нулевой частоты (на рис. 1.3, б показана сплошная прямая линия β^{-2} , соответствующая такому случаю). Структура разрезов, определяемых уравнением $\text{Im}s = 0$, и контур интегрирования показаны на рис. 1.4, б. Отметим, что выражение (1.2.7) для входящего в $s(\omega)$ множителя $\sqrt{\omega^2}$ в данном случае заменено на выражение

$$\sqrt{\omega^2} = |\omega| \exp(i \arg \omega), \quad (1.2.8)$$

где $-\pi < \arg \omega < \pi$. Разрезы, лежащие на мнимой оси, при этом исходят из точек $\pm \omega_{c1}$.

Дальнейшие аналитические преобразования выражений (1.1.1) сводятся к следующему. Как уже отмечалось, на основании свойств (1.1.12) исходный контур интегрирования (вещественную ось) можно дополнить полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в области $\text{Im} \omega \geq 0$ при $\zeta > 0$ (перед зарядом) или в области $\text{Im} \omega \leq 0$ при $\zeta < 0$ (за зарядом), и образовать замкнутый контур интегрирования. После этого все компоненты могут быть записаны в виде сумм интегралов по разрезам и вычетов в полюсах. Контур интегрирования, охватывающие указанные особенности, показаны на рис. 1.4, а, б крупным и мелким пунктиром для областей перед зарядом и за зарядом, соответственно. При $\zeta > 0$ вклад в интегралы вносит только контур, охватывающий разрез на мнимой положительной полуоси. Он дает «квазикулоновское» (квазистатическое) поле, представляющее собой предвестник, движущийся вместе с зарядом впереди него. При $\zeta < 0$ в интегралы вносит вклад как контур, охватывающий разрез на мнимой отрицательной полуоси («квазикулоновское» поле), так и контуры, которые охватывают разрезы, расположенные на вещественной оси (волновое поле, т. е. поле излучения Вавилова–Черенкова). Кроме того, если диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ является функцией частоты (например, в случае $\mu = 1$, $n^2 = \varepsilon$), то в компоненты E_ρ и E_z вносят вклад полюсы $\pm \omega_{sm}$, являющиеся нулями функции $\varepsilon(\omega)$ (они определяют так называемый «плазменный след»). В результате ряда несложных преобразований из (1.1.1) с учетом соотношений (1.1.7), (1.1.9), (1.1.10), можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_\rho^q &= E_{\rho C}^q + E_{\rho W}^q + E_{\rho P}^q, \\ E_z^q &= E_{z C}^q + E_{z W}^q + E_{z P}^q, \\ H_\phi^q &= H_{\phi C}^q + H_{\phi W}^q, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho C}^q \\ E_{zC}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{array} \right\} = \frac{q}{\beta c} \int_{\Omega_0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s(i\tilde{\omega})|}{\beta \varepsilon(i\tilde{\omega})} J_1(\rho |s(i\tilde{\omega})|) \\ \frac{\beta c}{\varepsilon(i\tilde{\omega}) \tilde{\omega}} s^2(i\tilde{\omega}) J_0(\rho |s(i\tilde{\omega})|) \text{sgn}(\zeta) \\ \beta |s(i\tilde{\omega})| J_1(\rho |s(i\tilde{\omega})|) \end{array} \right\} \exp\left(-\tilde{\omega} \frac{|\zeta|}{V}\right) d\tilde{\omega}, \quad (1.2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho W}^q \\ E_{zW}^q \\ H_{\varphi W}^q \end{array} \right\} = \frac{2q}{\beta c} \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m}^{\omega_{r_m}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s(\omega)|}{\varepsilon(\omega)} J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \\ \frac{-\beta c}{\omega \varepsilon(\omega)} s^2(\omega) J_0(\rho |s(\omega)|) \cos\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \\ \beta |s(\omega)| J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \end{array} \right\} d\omega \Theta(-\zeta), \quad (1.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho P}^q \\ E_{zP}^q \end{array} \right\} = \frac{4q}{c^2 \beta^2} \Theta(-\zeta) \sum_{m=1}^M \frac{\omega}{d\varepsilon/d\omega} \left\{ \begin{array}{l} K_1\left(\frac{\rho \omega}{V}\right) \sin\left(\frac{\zeta \omega}{V}\right) \\ -K_0\left(\frac{\rho \omega}{V}\right) \cos\left(\frac{\zeta \omega}{V}\right) \end{array} \right\} \Bigg|_{\omega=\omega_{sm}}, \quad (1.2.12)$$

где $\Omega_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta < \beta_0 \\ \omega_{c1} & \text{при } \beta > \beta_0 \end{cases}$, $\Omega_1 = \begin{cases} \omega_{c1} & \text{при } \beta < \beta_0 \\ 0 & \text{при } \beta > \beta_0 \end{cases}$, $\Omega_m = \omega_{cm}$ при $m \geq 2$, $\beta_0 = n_0^{-1}$,

$J_\nu(\xi)$ и $K_\nu(\xi)$ – соответственно функция Бесселя и модифицированная функция Ханкеля порядка ν ($\nu = 0, 1$), $\Theta(\xi)$ – единичная функция Хэвисайда: $\Theta(\xi) = 0$ при $\xi < 0$, $\Theta(\xi) = 1$ при $\xi > 0$. Здесь индексом «С» снабжены «квазикулоновские» части компонент поля, индексом «W» – их волновые составляющие, а индексом «P» – компоненты «плазменного следа» (контура интегрирования, охватывающие соответствующие особенности, также помечены символами «С», «W» и «P» на рис. 1.4). «Квазикулоновское» поле присутствует как позади, так и впереди движущегося заряда и быстро убывает по мере удаления от него. Волновое поле (поле излучения Вавилова–Черенкова) имеется только позади заряда и осциллирует по мере удаления от него. Аналогичным образом ведет себя «плазменный след», однако, в отличие от поля излучения, он сосредоточен в основном вблизи к траектории движения заряда и быстро (экспоненциально) убывает при удалении от нее.

Обсудим предельный переход к случаю неподвижного заряда. Рассмотрим интегралы (1.2.10) для «квазикулоновских» составляющих. При $\beta \rightarrow 0$ нижний предел $\Omega_0 = 0$, $\zeta = z$, а функция $|s(i\tilde{\omega})|$ имеет следующий вид:

$$|s(i\tilde{\omega})| = \left| \sqrt{\frac{-\tilde{\omega}^2}{c^2 \beta^2} (n^2(i\tilde{\omega}) \beta^2 - 1)} \right| \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\omega}}{c \beta}. \quad (1.2.17)$$

Для интегралов (1.2.10) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho C}^q \\ E_{zC}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{array} \right\} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{q}{\beta^2 c^2} \int_0^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon(i\tilde{\omega})} J_1\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \\ \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon(i\tilde{\omega})} J_0\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \operatorname{sgn}(z) \\ \beta \tilde{\omega} J_1\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \end{array} \right\} \exp\left(-\tilde{\omega} \frac{|z|}{c\beta}\right) d\tilde{\omega}. \quad (1.2.18)$$

Экспоненциальный множитель в (1.2.18) при $\beta \rightarrow 0$ убывает бесконечно быстро, поэтому существенной для интегрирования является малая окрестность точки $\tilde{\omega} = 0$, и медленно меняющуюся функцию $\varepsilon(i\tilde{\omega})$ можно вынести из-под знака интеграла:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho C}^q \\ E_{zC}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{array} \right\} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{q}{\beta^2 c^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon(0)} \int_0^{+\infty} \tilde{\omega} J_1\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \exp\left(-\tilde{\omega} \frac{|z|}{c\beta}\right) d\tilde{\omega} \\ \frac{1}{\varepsilon(0)} \int_0^{+\infty} \tilde{\omega} J_0\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \exp\left(-\tilde{\omega} \frac{|z|}{c\beta}\right) d\tilde{\omega} \operatorname{sgn}(z) \\ \beta \int_0^{+\infty} \tilde{\omega} J_1\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{c\beta}\right) \exp\left(-\tilde{\omega} \frac{|z|}{c\beta}\right) d\tilde{\omega} \end{array} \right\}. \quad (1.2.19)$$

Полученные интегралы являются табличными [80], в результате получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho C}^q \\ E_{zC}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{array} \right\} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{q}{\beta^2 c^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta^2 c^2}{\varepsilon(0)} \rho (\rho^2 + |z|^2)^{-3/2} \\ \frac{\beta^2 c^2}{\varepsilon(0)} |z| \operatorname{sgn}(z) (\rho^2 + |z|^2)^{-3/2} \\ \beta^3 c^2 \rho (\rho^2 + |z|^2)^{-3/2} \end{array} \right\}. \quad (1.2.20)$$

Из формулы (1.2.20) видно, что при $\beta \rightarrow 0$ отличными от нуля остаются только компоненты электрического поля, при этом

$$\begin{aligned} E_{\rho C}^q &= \frac{q \sin \theta}{\varepsilon(0) R^2}, & E_{zC}^q &= \frac{q \cos \theta}{\varepsilon(0) R^2}, \\ E_C^q &= \sqrt{\left(E_{\rho C}^q\right)^2 + \left(E_{zC}^q\right)^2} = \frac{q}{\varepsilon(0) R^2}, \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

где θ – угол между направлением на точку наблюдения и положительным направлением оси z . Таким образом, квазистатические составляющие (1.2.10) в пределе $\beta \rightarrow 0$ дают кулоновское поле покоящегося заряда, что оправдывает введенный для них термин «квазикулоновское» поле при $\beta \neq 0$.

Как следует из (1.2.11), волновые части поля обращаются в нуль при $\beta \rightarrow 0$. Действительно, как видно, например, из (1.2.5) (см. также рис. 1.3), в рассматриваемом пределе нули ω_{cm} числителя s^2 совпадают с резонансными частотами $\omega_{\Gamma m}$, нижний и

верхний пределы интегрирования в (1.2.11) совпадают, и интегралы равны нулю. Составляющие «плазменного следа» (1.2.12) при $\beta \rightarrow 0$ отличны от нуля только в бесконечно малой окрестности оси z позади заряда. Если учесть в среде малые потери, то нули диэлектрической проницаемости ω_{sm} опустятся на малую величину в нижнюю полуплоскость: $\omega_{sm} = \omega'_{sm} - i\omega''_{sm}$, $\omega''_{sm} > 0$. При этом выражения (1.2.12) приобретут дополнительный множитель $\exp(-|\zeta|\omega''_{sm}(\beta c)^{-1}) > 0$, в результате чего при $\beta \rightarrow 0$ «плазменный след» будет существенен только в бесконечно малой окрестности точки расположения заряда, что фактически означает его отсутствие.

Из формул (1.2.9) – (1.2.12) легко получить результаты для случая среды с одной резонансной частотой – для этого достаточно положить $\omega_{pm} = 0$ для всех значений $m \geq 2$. При этом в выражениях для волнового поля останется только один интеграл по промежутку $[\Omega_1, \omega_{r1}]$. Отметим, что такая задача подробно рассматривалась в [24]. Однако формулы (1.2.9) – (1.2.12) даже в частном случае одной резонансной частоты обладают существенными преимуществами по сравнению с выражениями, приведенными в работе [24]. В этой работе выражения для компонент поля представлены в виде двух интегралов по отрезкам вещественной оси. Однако подынтегральные функции в выражениях для волнового поля содержат функцию Неймана $N_0(\xi)$, которая имеет особенность при $\xi \rightarrow 0$ (что имеет место, когда $\rho \rightarrow 0$ или $s(\omega) \rightarrow 0$). В выражениях (1.2.9) – (1.2.12) функция Неймана отсутствует, поэтому численный расчет волновых составляющих поля по формулам (1.2.9) – (1.2.12) оказывается более простым. Кроме того, в [24] «квазикулоновская» часть и «плазменный след» не разделяются, а представлены одним интегралом, содержащим функцию Макдональда, также имеющую особенность при $\rho \rightarrow 0$. В этом смысле результат, полученный в настоящей работе имеет существенно более прозрачную физическую интерпретацию, поскольку расходящаяся в нуле составляющая «плазменного следа» выделена в отдельное слагаемое. Поэтому (1.2.10), (1.2.11) удобны для вычисления волновой и «квазикулоновской» составляющей поля при малых значениях ρ , включая $\rho = 0$ [71].

1.2.3. Численный анализ компонент электромагнитного поля и обсуждение результатов

Отметим, что еще более эффективной схемой численного интегрирования выражений (1.1.1) по сравнению с расчетом по формулам (1.2.9) – (1.2.12) оказалась следующая. Воспользуемся свойством (1.1.9) и заменим в исходных формулах (1.1.1) интеграл по всей вещественной оси интегралом по положительной полуоси. Далее, трансформируем полученный контур интегрирования, опираясь на проведенный выше анализ его расположения относительно особенностей подынтегральных функций. Для лучшей сходимости интеграла при больших значениях переменной интегрирования удобно трансформировать контур таким образом, чтобы он шел параллельно асимптоте КНС (1.1.13)

при $\text{Re } \omega > 0$. При относительно небольших значениях ω целесообразно трансформировать контур таким образом, чтобы он проходил на достаточном удалении от точек ветвления и полюсов. К примеру, для области $\zeta > 0$ можно взять контур в виде полубесконечного луча, определяемого формулой (1.1.13) (контур γ_+ на рис. 1.4, а, б). Для области $\zeta < 0$ можно взять трапецевидный контур, полубесконечная часть которого параллельна асимптоте (1.1.13), а длина конечных отрезков достаточна для обхода всех особенностей сверху (контур γ_- на рис. 1.4, а, б). При такой трансформации не пересекаются никакие особенности подынтегральных выражений.

На основе описанного подхода была разработана программа расчета компонент поля в среде *Mathcad*. Кроме того, были написаны программы расчета по полученным выше формулам (1.2.9) – (1.2.12), а также по исходным формулам (1.1.1), (1.1.2). Сравнение трех различных алгоритмов по совокупности скорости и качества счета показало, что наименее эффективным является алгоритм, основанный на выражениях (1.1.1), (1.1.2), что связано с близостью контура к особенностям подынтегральных выражений. Более удачным оказался алгоритм, основанный на выражениях (1.2.9) – (1.2.12), так как он избавлен от данного недостатка. Однако наибольшую эффективность показал алгоритм, основанный на описанной выше трансформации контура интегрирования. Это связано с тем, что для конкретных параметров задачи можно подбирать наиболее удобные с точки зрения численного счета параметры контура: угол, определяющий начальный отрезок контура интегрирования для области за зарядом, длину данного отрезка, а также длину горизонтальной части трапецевидного контура.

На рис. 1.5, 1.6 приведены примеры численного расчета компонент электромагнитного поля E_z^q , E_ρ^q и H_ϕ^q (в единицах $q\omega_{r1}^2 c^{-2}$) от $\zeta = z - Vt$ (в единицах $c\omega_{r1}^{-1}$) для $\beta = 0.4$ (рис. 1.5) и $\beta = 0.99$ (рис. 1.6) в случае двухрезонансной среды (рубин, $M = 2$) на расстоянии $\rho = 5 \cdot c\omega_{r1}^{-1}$ от оси движения. Как уже отмечалось, для плотных веществ зависимость $n^2(\omega)$ должна описываться формулой (1.2.3), однако, для данного конкретного вещества эта зависимость в терагерцовом диапазоне частот была аппроксимирована по известным данным [81] с помощью более простой формулы (1.2.1) при $M = 2$. Параметры аппроксимации приведены в подписях к рис. 1.5, 1.6.

Из рис. 1.5, 1.6 видно, что зависимости различных компонент поля от ζ качественно совпадают. При относительно небольших скоростях (рис. 1.5) вблизи плоскости расположения заряда ($\zeta = 0$) важную роль играет «квазикулоновская» составляющая поля, а позади – осциллирующее волновое поле (поле излучения Вавилова–Черенкова). На достаточно большом удалении от заряда хорошо видны биения на двух относительно близких частотах, что связано с бирезонансностью среды. При больших скоростях (рис. 1.6) «квазикулоновский» предвестник становится практически незаметным на фоне сильного волнового поля.

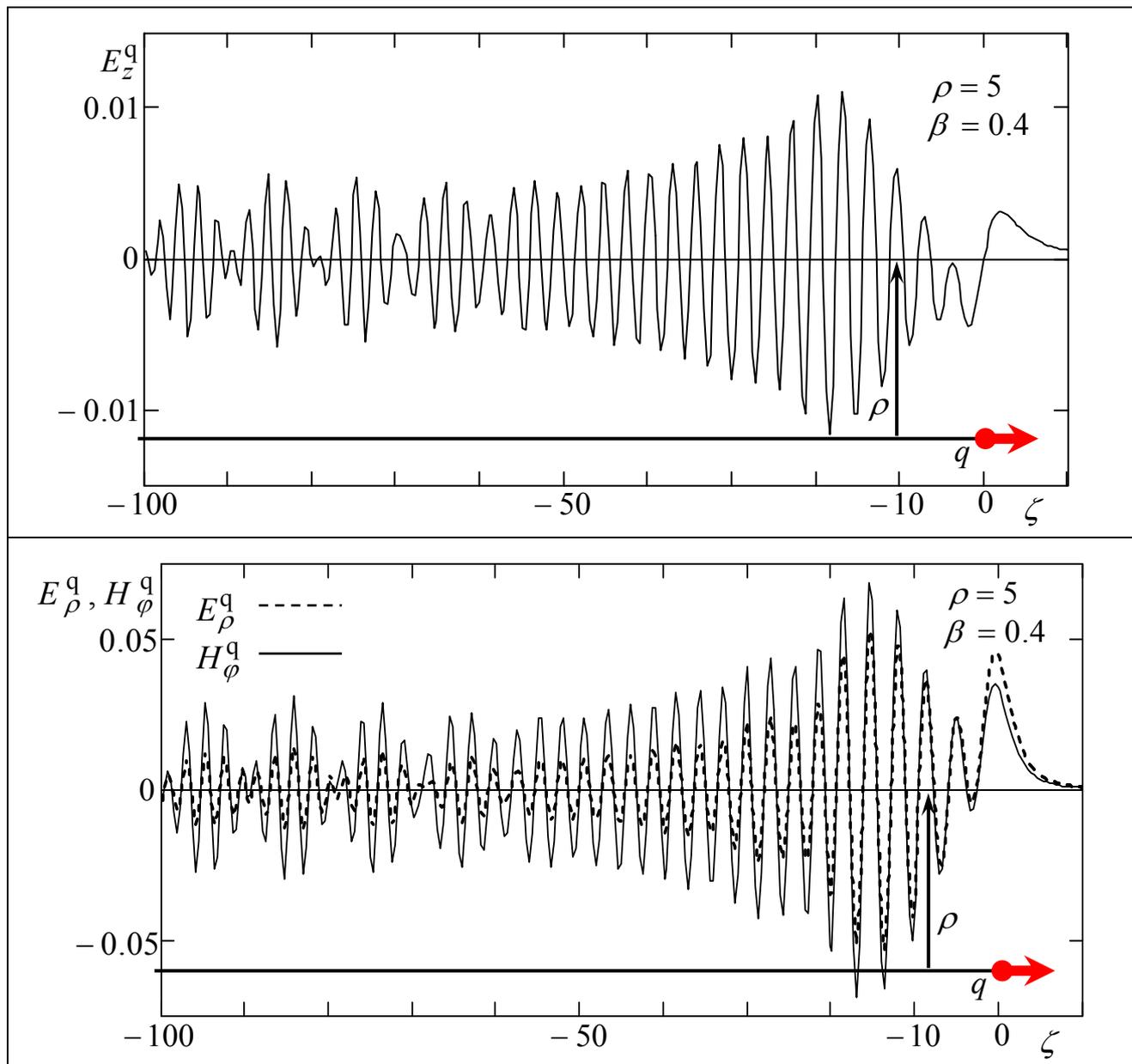


Рис. 1.5. Зависимость компонент электромагнитного поля (в единицах $q\omega_{r1}^2 c^{-2}$) от относительного расстояния $\zeta = z - Vt$ (в единицах $c\omega_{r1}^{-1}$) для $\beta = 0.4$ в случае рубина: $M = 2$, $\omega_{r1} = 2\pi \cdot 11 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$, $\omega_{r2} = 14/11 \cdot 10^{-2} \omega_{r1}$, $\omega_{p1} = 13/11 \omega_{r1}$, $\omega_{p2} = 21/11 \omega_{r1}$, $\omega_{d1} = 2/11 \cdot 10^{-2} \omega_{r1}$, $\omega_{d2} = 6/11 \cdot 10^{-2} \omega_{r1}$, $\rho = 5 \cdot c\omega_{r1}^{-1}$.

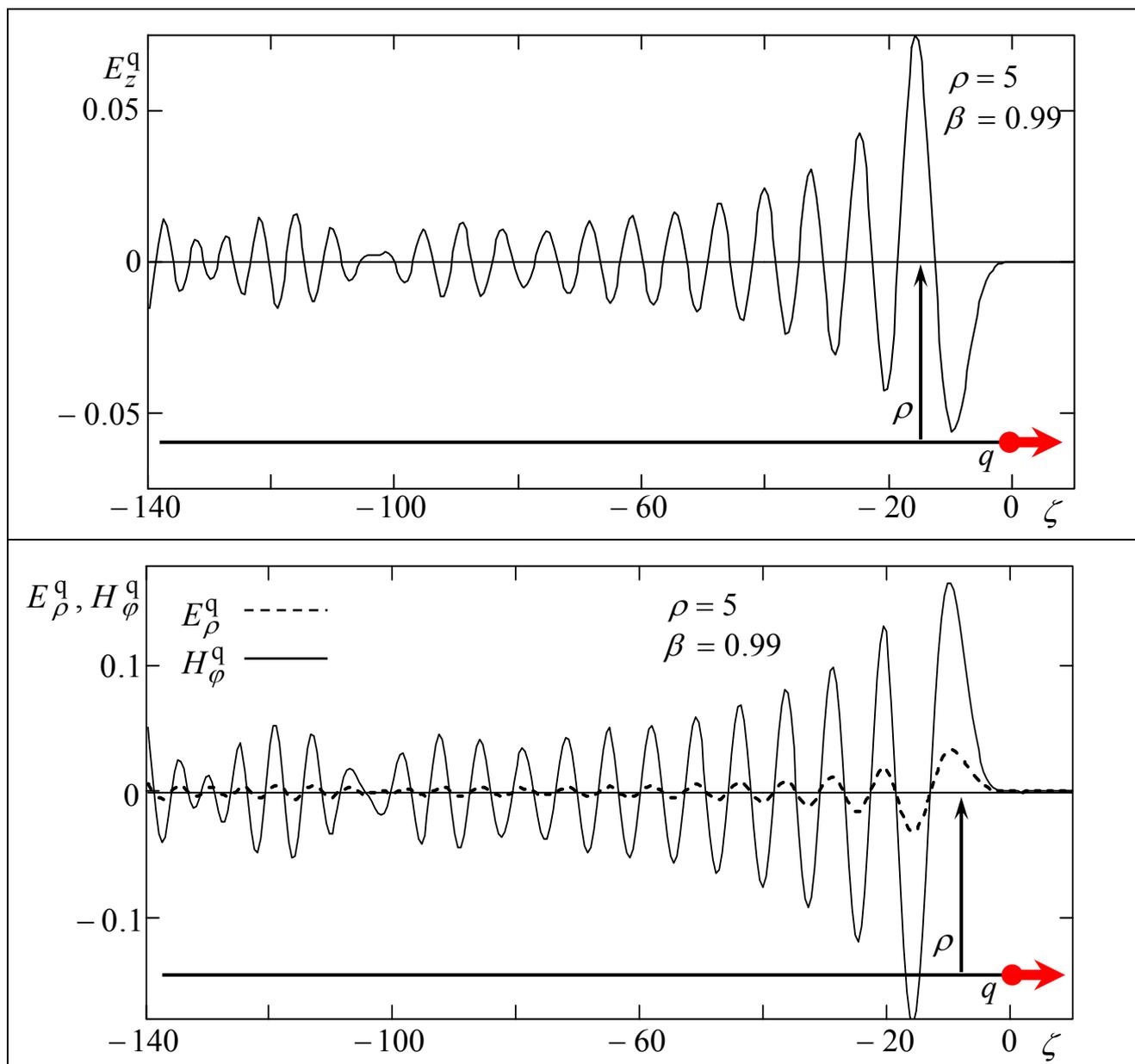


Рис. 1.6. Зависимость компонент электромагнитного поля от относительного расстояния $\zeta = z - Vt$ для $\beta = 0.99$ в случае рубина (параметры см. в подписи к рис. 1.5).

Завершая данный раздел, отметим, что в нем развитый в разделе 1.1 подход был применен к случаю пассивной среды с произвольным числом резонансных частот. Компоненты электромагнитного поля были представлены в виде суммы «квазикулоновской» (квазистатической) составляющей, волновой составляющей и составляющей «плазменного следа». Было показано, что полученные для них выражения (1.2.9) – (1.2.12) обладают рядом преимуществ по сравнению с ранее известными. Также был разработан эффективный метод численного расчета компонент поля, использующий определенную трансформацию исходного контура интегрирования.

1.3. Поле заряда в среде с отрицательным показателем преломления

1.3.1. Среда с отрицательным показателем преломления

Успехи последних лет в области производства «метаматериалов» – искусственных периодических структур с размером элементарной ячейки существенно меньшим длины волны рассматриваемого излучения – дали возможность реализовать некоторые необычные условия для распространения электромагнитных волн. Одним из ярких примеров «экзотических» сред являются так называемые «левые» среды или среды с отрицательным показателем преломления.

Теоретическое описание левых сред было произведено В. Г. Веселаго в работах [43, 44].евой средой было названо изотропное непоглощающее вещество, имеющее одновременно отрицательными диэлектрическую (ε) и магнитную (μ) проницаемости. Такая терминология связана с тем, что в среде с одновременно отрицательными ε и μ вектора \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют левую ортогональную тройку (в отличие от «правой» среды с положительными ε и μ , где \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку). В англоязычной литературе левые среды получили название «left-handed media», а правые, соответственно, «right-handed media», т. е. «леворукие» и «праворукие», что более точно отражает их свойства.

Часто в литературе встречается термин «среда с отрицательным показателем преломления», который эквивалентен термину «левая среда» при некоторых уточнениях. Действительно, из уравнений Максвелла однозначно определяется только квадрат показателя преломления $n^2 = \varepsilon\mu$. Считая среду поглощающей, имеем

$$n^2 = (\varepsilon' + i\varepsilon'')(\mu' + i\mu'') = \text{Re } n^2 + i \text{Im } n^2,$$
$$\text{Re } n^2 = \varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'', \quad \text{Im } n^2 = \varepsilon'\mu'' + \mu'\varepsilon'', \quad \varepsilon'', \mu'' > 0.$$

Для правой среды ($\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$) имеем $\text{Im } n^2 > 0$, в то время как для левой среды ($\varepsilon' < 0$, $\mu' < 0$) $\text{Im } n^2 < 0$. Естественно определить показатель преломления следующим образом:

$$n = \sqrt{n^2}, \quad \text{Im } n > 0.$$

Следствия такого определения иллюстрируются на рис. 1.7, где выколотыми точками показаны возможные корни, найденные по правилу $n^\pm = \sqrt{|n^2|} \exp(i \arg n^2 / 2 + i\pi m)$, $m = 0, 1$. Выбор корня с положительной мнимой частью приводит к тому, что в левой среде $\text{Re } n < 0$. В пределе $\varepsilon'' \rightarrow 0$, $\mu'' \rightarrow 0$ получаем, что в левой среде $n < 0$.

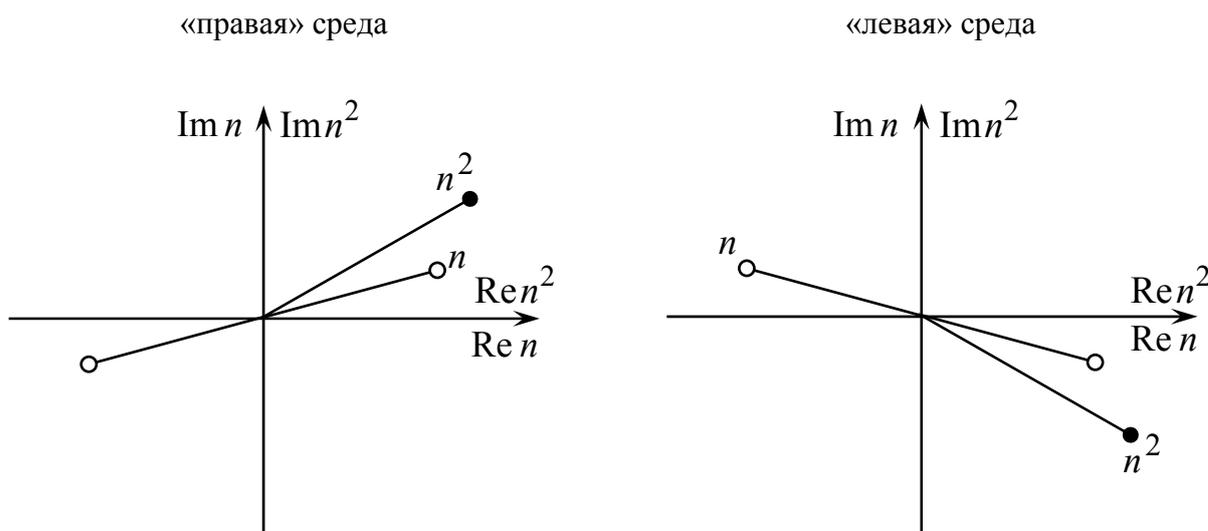


Рис. 1.7. К определению показателя преломления n по правилу $\text{Im } n > 0$.

Отличительной особенностью левых сред является тот факт, что волновой вектор \vec{k} и вектор Умова–Пойтинга \vec{S} направлены в противоположные стороны. Действительно, по определению

$$\vec{S} = c / 4\pi [\vec{E}, \vec{H}],$$

откуда видно, что \vec{E} , \vec{H} и \vec{S} всегда образуют правую тройку. Поскольку \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} в левой среде образуют левую тройку, то \vec{S} и \vec{k} противоположны. При этом электромагнитная волна, падающая из обычной среды на границу с левой средой, испытывает аномальное (отрицательное) преломление: преломленная волна имеет фазовую скорость, направленную к границе, и групповую скорость, проекция которой на границу раздела противоположна проекции групповой скорости падающей волны. Кроме описанных эффектов в левой среде должны наблюдаться обращенный черенковский эффект («обратное» излучение Вавилова–Черенкова) и обращенный эффект Доплера [43–45].

Среди природных материалов вещества с отрицательной магнитной проницаемостью до недавнего времени не встречались, поэтому обсуждение левых сред было чисто умозрительным. При этом вопросы, косвенно касающиеся левых сред, затрагивались различными учеными задолго до работы Веселаго [43] (см. [46–50]). Особо следует отметить заслугу Л. И. Мандельштама, в работах которого было достигнуто глубокое понимание сути отрицательного преломления [46, 47]. Мандельштамом было показано, что в основе отрицательного преломления лежит эффект «отрицательной групповой скорости», когда групповая скорость и поток энергии противоположны фазовой скорости. Таким образом, отрицательное преломление возможно для волн любой природы и, вообще говоря, не обязательно связано с отрицательными проницаемостями ϵ и μ . Заметим, что уже после реализации левых сред с помощью метаматериалов [35–42] вещества с $\mu < 0$ были обнаружены в природе [82].

В принципе «левые» свойства могут наблюдаться только в ограниченном диапазоне частот [45]. Поэтому, было бы правильнее говорить о «левом частотном диапазоне» (ЛЧД),

где наблюдаются «левые» свойства, и о «правом частотном диапазоне» (ПЧД), где имеют место обычные свойства:

$$\text{ПЧД: } \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 0, \operatorname{Re} \mu(\omega) > 0; \quad (1.3.1)$$

$$\text{ЛЧД: } \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 0, \operatorname{Re} \mu(\omega) < 0.$$

Однако термин «левая среда» прочно утвердился в научном обиходе. Мы также будем его использовать, имея в виду, что левая среда – это среда, имеющая как ЛЧД, так и ПЧД, в то время как обычная (правая) среда имеет только ПЧД (один или несколько).

1.3.2. Модель левой среды и аналитическое исследование компонент электромагнитного поля

При описании левой среды будем опираться на типичные дисперсионные зависимости, используемые в литературе [35–41]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 + 2i\omega_{\text{de}}\omega}, \quad \mu(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\text{pm}}^2}{\omega_{\text{gm}}^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega - \omega^2}, \quad (1.3.2)$$

где ω_{gm} – магнитная резонансная частота, ω_{pe} и ω_{pm} – соответственно электрическая и магнитная «плазменные» частоты, ω_{de} и ω_{dm} – параметры, ответственные за диссипацию.

Отметим, что иногда в формуле для $\mu(\omega)$ вместо ω_{pm}^2 используется функция $F\omega^2$ ($0 < F < 1$). Однако это обстоятельство несущественно для описания принципиальных свойств излучения. В дальнейшем будем в основном считать диссипацию пренебрежимо малой ($\omega_{\text{de}} \rightarrow 0$, $\omega_{\text{dm}} \rightarrow 0$), учитывая ее только для определения $s(\omega)$ согласно (1.1.3), (1.1.4) и определения взаимного расположения контура и разрезов на комплексной плоскости ω .

Дальнейший анализ сходен со случаем многорезонансной среды, изложенным в разделе 1.2. Частотные диапазоны излучения соответствуют вещественным частотам, на которых $s^2(\omega) > 0$. Неравенство $s^2(\omega) > 0$ есть не что иное, как условие наличия излучения Вавилова–Черенкова на частоте ω . Согласно (1.1.3) его можно записать в виде $n^2(\omega)\beta^2 > 1$. При $\omega_{\text{pe}} < \omega_{\text{gm}}$ среда является правой и имеет только два ПЧД ($0 < \omega < \omega_{\text{gm}}$ и $\omega > \omega_{\text{sm}} = \sqrt{\omega_{\text{gm}}^2 + \omega_{\text{pm}}^2}$). В первом ПЧД лежит диапазон излучения Вавилова–Черенкова $\omega_{\text{c}} < \omega < \omega_{\text{gm}}$ (рис. 1.8, I, a). В случае $\omega_{\text{pe}} > \omega_{\text{gm}}$ среда является левой, т. е. наряду с ПЧД имеет и ЛЧД ($\omega_{\text{gm}} < \omega < \omega_{\text{pe}}$), внутри которого находится диапазон излучения Вавилова–Черенкова $\omega_{\text{gm}} < \omega < \omega_{\text{c}}$ (рис. 1.8, II, a). Граничная частота ω_{c} определяется из уравнения $s(\omega_{\text{c}}) = 0$:

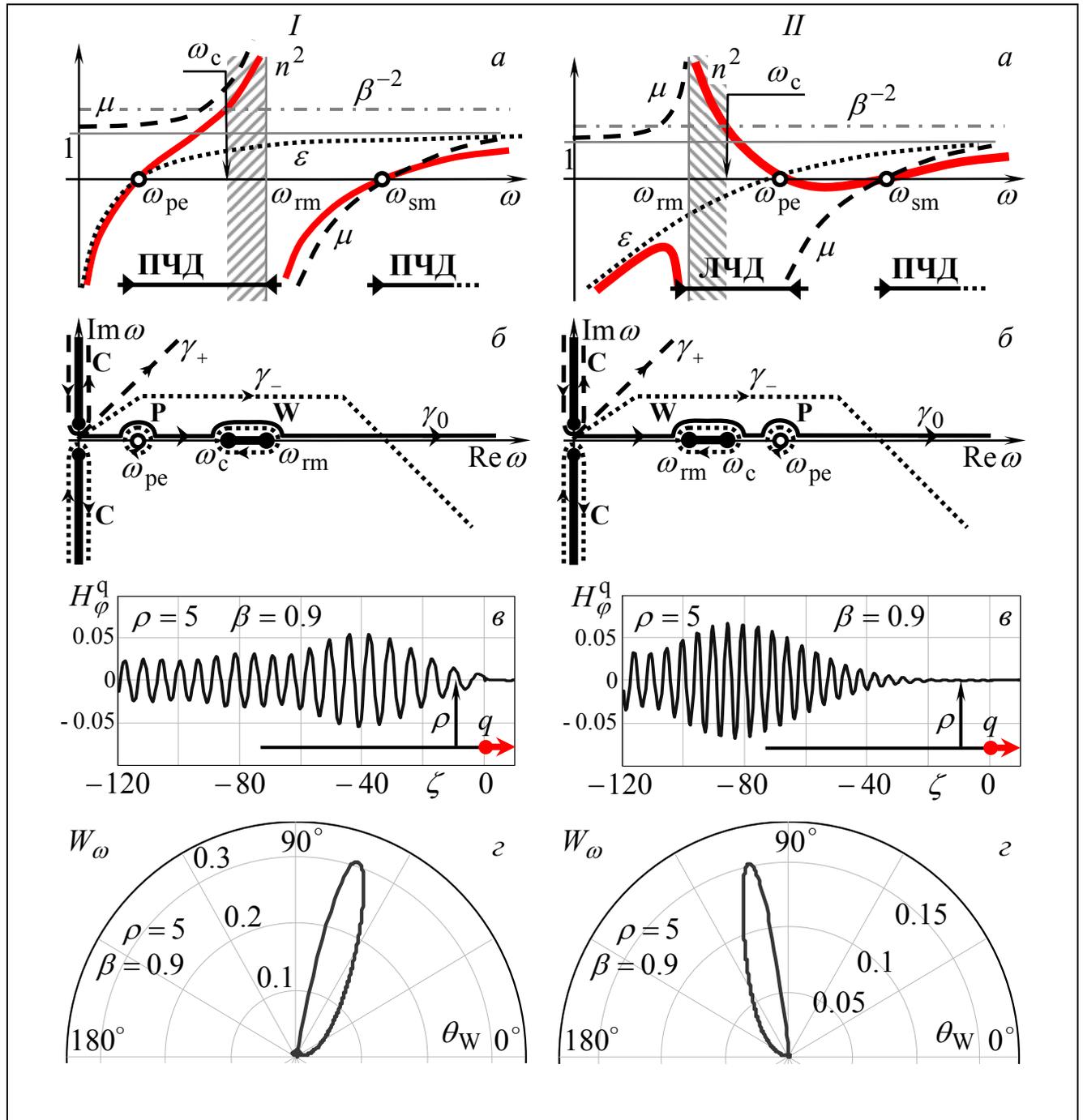


Рис. 1.8. Характерный вид дисперсионных закономерностей (а), комплексной плоскости ω (показана только правая полуплоскость $\text{Re } \omega > 0$, т.к. разрезы и полюса расположены симметрично относительно мнимой оси) (б), зависимости магнитного поля H_ϕ^q (в единицах $q\omega_{rm}^2 c^{-2}$) от относительного расстояния $\zeta = z - Vt$ (в) и энергетических диаграмм ИВЧ (д) в случае правой (I) и левой (II) среды. Среда описывается дисперсионными зависимостями (1.3.2) со следующими параметрами (в единицах ω_{rm}): (I) – $\omega_{pm} = 1$, $\omega_{pe} = 0.6$; (II) – $\omega_{pm} = 1$, $\omega_{pe} = 2$. W_ω измеряется в единицах $q^2 \omega_{rm}^3 c^{-3}$, ζ и ρ – в единицах $c\omega_{rm}^{-1}$.

$$\omega_c^2 = \frac{1}{2(1-\beta^2)} \left\{ \omega_{\text{rm}}^2(1-\beta^2) - (\omega_{\text{pe}}^2 + \omega_{\text{pm}}^2) + \right. \\ \left. + \left[\left(\omega_{\text{rm}}^2(1-\beta^2) - (\omega_{\text{pe}}^2 + \omega_{\text{pm}}^2) \right)^2 + 4\beta^2(1-\beta^2)\omega_{\text{pe}}^2(\omega_{\text{rm}}^2 + \omega_{\text{pm}}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

На рис. 1.8, *I, б*, *II, б* показаны разрезы и исходный путь интегрирования γ_0 на комплексной плоскости ω . Важно отметить, что γ_0 идет по верхним берегам разрезов, где $\text{sgn } s = \text{sgn } \omega$ для правой среды и $\text{sgn } s = -\text{sgn } \omega$ для левой среды (малые потери смещают разрезы в нижнюю полуплоскость). Действительно, при наличии малых потерь из определения (1.1.3) следует, что $\text{Re } s^2 \sim \text{Re } n^2 \beta^2 - 1$, $\text{Im } s^2 \sim \text{Im } n^2$. Определение ветви радикала согласно (1.1.4) (см. рис. 1.7) приводит к тому, что в диапазонах излучения ($\text{Re } s^2 > 0$) функция $s(\omega)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\text{Re } s(\omega)) &= \text{sgn } \omega, & (\text{диапазон излучения в ПЧД}) \\ \text{sgn}(\text{Re } s(\omega)) &= -\text{sgn } \omega. & (\text{диапазон излучения в ЛЧД}) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

При стремлении диссипации к нулю получаем $\text{sgn } s = \pm \text{sgn } \omega$ для правой и левой среды соответственно. Условие (1.3.3) также означает, что проекция фазовой скорости на радиальное направление $V_{\text{ph}\rho} = \omega s / (\omega^2 c^{-2} n^2)$ положительна для правой среды и отрицательна для левой, т. е. в случае левой среды принцип излучения Зоммерфельда нарушается.

Как и в случае многорезонансной среды (см. раздел 1.2), один из путей взятия интегралов (1.1.1) состоит в «замыкании» исходного контура γ_0 в верхнюю полуплоскость (при $\zeta > 0$) или в нижнюю полуплоскость (при $\zeta < 0$) с последующим вычислением вкладов соответствующих особенностей. Контур, охватывающие эти особенности (разрезы и полюса), показаны на рис. 1.8, *I, б*, *II, б* крупным и мелким пунктиром для областей $\zeta > 0$ и $\zeta < 0$ соответственно. В результате, после некоторых вычислений с использованием (1.1.7), (1.1.9), (1.1.10), получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} E_{\rho}^{\text{q}} &= E_{\rho\text{C}}^{\text{q}} + E_{\rho\text{W}}^{\text{q}} + E_{\rho\text{P}}^{\text{q}}, \\ E_z^{\text{q}} &= E_{z\text{C}}^{\text{q}} + E_{z\text{W}}^{\text{q}} + E_{z\text{P}}^{\text{q}}, \\ H_{\varphi}^{\text{q}} &= H_{\varphi\text{C}}^{\text{q}} + H_{\varphi\text{W}}^{\text{q}}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho C}^q \\ E_{z C}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{array} \right\} = \frac{q}{\beta c} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s(i\bar{\omega})|}{\varepsilon(i\bar{\omega})} J_1(\rho |s(i\bar{\omega})|) \\ \frac{\beta c s^2(i\bar{\omega})}{\varepsilon(i\bar{\omega}) \bar{\omega}} J_0(\rho |s(i\bar{\omega})|) \operatorname{sgn}(\zeta) \\ \beta |s(i\bar{\omega})| J_1(\rho |s(i\bar{\omega})|) \end{array} \right\} \exp\left(-\bar{\omega} \frac{|\zeta|}{V}\right) d\bar{\omega}, \quad (1.3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho W}^q \\ E_{z W}^q \\ H_{\varphi W}^q \end{array} \right\} = \frac{2q}{\beta c} \Theta(-\zeta) \int_{\min(\omega_c, \omega_m)}^{\max(\omega_c, \omega_m)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s(\omega)|}{\varepsilon(\omega)} J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\frac{\omega \zeta}{V}\right) \\ -\frac{\beta c s^2(\omega)}{\omega \varepsilon(\omega)} J_0(\rho |s(\omega)|) \cos\left(\frac{\omega \zeta}{V}\right) \\ \beta |s(\omega)| J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\frac{\omega \zeta}{V}\right) \end{array} \right\} d\omega, \quad (1.3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho P}^q \\ E_{z P}^q \end{array} \right\} = \frac{2q \omega_{pe}^2}{c^2 \beta^2} \Theta(-\zeta) \left\{ \begin{array}{l} K_1(\rho \omega_{pe} V^{-1}) \sin(\omega_{pe} \zeta V^{-1}) \\ K_0(\rho \omega_{pe} V^{-1}) \cos(\omega_{pe} \zeta V^{-1}) \end{array} \right\}, \quad (1.3.7)$$

где $J_\nu(\xi)$ и $K_\nu(\xi)$ – функции Бесселя и модифицированные функции Ханкеля соответственно, $\Theta(\xi)$ – единичная функция включения (Хэвисайда). В формулах (1.3.4) – (1.3.7) индекс «С» соответствует «квазикулоновской» части поля (вклады разрезов вдоль мнимой оси), индекс «W» соответствует волновой части поля (вклады разрезов вдоль вещественной оси), а индекс «P» соответствует так называемому «плазменному следу» (вклады полюсов $\omega = \pm \omega_{pe}$) (рис. 1.8, I, б, II, б). «Квазикулоновское» поле существует как впереди так и позади заряда и быстро убывает при удалении от него. Волновое поле (излучение Вавилова–Черенкова) существует только позади заряда и осциллирует по мере удаления от него. «Плазменный след» сконцентрирован в основном вблизи траектории заряда и экспоненциально убывает с ростом расстояния от оси движения. Аналогичные выражения для случая резонансной «правой» среды были получены в разделе 1.2 (см. также [71, 72]).

Среди достоинств представления (1.3.4) – (1.3.7) можно отметить ясный физический смысл отдельных составляющих. Кроме того, это представление имеет определенные преимущества для численных расчетов. Одно из них заключается в том, что подынтегральные выражения в (1.3.5), (1.3.6) не содержат функций Ханкеля, в отличие от исходных формул (1.1.2). Поэтому (1.3.5), (1.3.6) удобны для вычисления волновой и квазикулоновской составляющей поля при малых значениях ρ , включая $\rho = 0$.

1.3.3. Энергетические характеристики электромагнитного поля движущегося заряда

Наиболее распространенной энергетической характеристикой для описания свойств электромагнитного поля движущегося заряда является энергия, теряемая зарядом на излучение при прохождении единицы длины пути, dW/dz [4, 5, 8, 19, 21–23]. Один из способов получения этой характеристики заключается в интегрировании поперечной составляющей вектора Пойтинга $\vec{S} = c/4\pi[\vec{E}, \vec{H}]$ по поверхности Σ бесконечного цилиндра, окружающего траекторию заряда:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} S_{\rho} d\sigma = -\frac{c}{4\pi V} \int_{\Sigma} E_z^q H_{\phi}^q d\sigma = \\ &= -\frac{c}{4\pi V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho E_z^q H_{\phi}^q dz = -\frac{c\rho}{2V} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^q H_{\phi}^q dz. \end{aligned}$$

После подстановки интегральных представлений для E_z^q и H_{ϕ}^q и ряда довольно громоздких преобразований [76], для среды без поглощения получается формула Тамма–Франка для потерь энергии на излучение:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 \beta^2 - 1}{n^2 \beta^2} \mu(\omega) \omega d\omega, \quad (n^2 \beta^2 > 1)$$

где интегрирование ведется по частотам излучения (частотам, где $s^2 \sim n^2 \beta^2 - 1 > 0$). Недостатком величины dW/dz является то, что она описывает только величину энергии, теряемой на излучение, и ничего не говорит о направленности этого излучения. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим другую характеристику, предложенную в работе [51] – энергетическую диаграмму излучения Вавилова–Черенкова. Как мы увидим, эта диаграмма оказывается весьма удобной для иллюстрации направленности излучения, что особенно актуально при рассмотрении левой и анизотропной среды (см. раздел 1.4).

Энергетическая диаграмма излучения Вавилова–Черенкова определяется следующим образом. Следуя [51], рассмотрим вектор плотности полной энергии

$$\vec{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{S} dt = W_{\rho} \vec{e}_{\rho} + W_z \vec{e}_z. \quad (1.3.8)$$

Компонентой W_{ρ} этого вектора является энергия, проходящая за все время движения частицы через единичную площадку, нормаль к которой ориентирована в поперечном направлении (перпендикулярно скорости частицы):

$$\begin{aligned}
W_\rho &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\rho dt = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^q H_\varphi^q dt = \\
&= -\frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{z\omega}^q \exp\left(i\omega \left(\frac{z}{V} - t \right) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\omega} H_{\varphi\omega}^q \exp\left(i\bar{\omega} \left(\frac{z}{V} - t \right) \right).
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Аналогично, компонентой W_z является энергия, проходящая за все время движения через площадку, нормаль к которой ориентирована в продольном направлении (вдоль скорости частицы):

$$\begin{aligned}
W_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_z dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\rho^q H_\varphi^q dt = \\
&= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\rho\omega}^q \exp\left(i\omega \left(\frac{z}{V} - t \right) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{\omega} H_{\varphi\omega}^q \exp\left(i\bar{\omega} \left(\frac{z}{V} - t \right) \right).
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Меняя в (1.3.9) и (1.3.10) порядок интегрирования и используя известное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega + \bar{\omega})t) dt = 2\pi \delta(\omega + \bar{\omega}),$$

приходим к следующим формулам:

$$W_\rho = -\frac{c}{2} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} E_{z\omega}^q(\omega) H_{\varphi\omega}^q(-\omega) d\omega, \tag{1.3.11}$$

$$W_z = \frac{c}{2} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\rho\omega}^q(\omega) H_{\varphi\omega}^q(-\omega) d\omega, \tag{1.3.12}$$

Используя соотношения (1.1.6) и (1.1.9), получаем

$$W_\rho = -\frac{c}{2} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(E_{z\omega}^q(\omega) \overline{H_{\varphi\omega}^q(\omega)} \right) d\omega, \tag{1.3.13}$$

$$W_z = \frac{c}{2} \left(\frac{q}{2\pi\beta} \right)^2 \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(E_{\rho\omega}^q(\omega) \overline{H_{\varphi\omega}^q(\omega)} \right) d\omega. \tag{1.3.14}$$

Учитывая конкретный вид величин $E_{\rho\omega}^q$, $E_{z\omega}^q$ и $H_{\varphi\omega}^q$ (1.1.2), окончательно получаем:

$$\vec{W} = \int_0^{+\infty} \vec{W}_\omega d\omega, \quad \vec{W}_\omega = W_{\rho\omega} \vec{e}_\rho + W_{z\omega} \vec{e}_z, \tag{1.3.15}$$

$$W_{\rho\omega} = \frac{q^2}{4} \operatorname{Im} \left(\frac{|s|^2 s}{\omega \varepsilon(\omega)} H_0^{(1)}(\rho s) \overline{H_1^{(1)}(\rho s)} \right), \tag{1.3.16}$$

$$W_{z\omega} = \frac{q^2}{4\beta c} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|^2}{\varepsilon(\omega)} H_1^{(1)}(\rho s) \overline{H_1^{(1)}(\rho s)} \right). \tag{1.3.17}$$

Вдали от оси движения, когда выполнено неравенство $\rho |s| \gg 1$ и верны асимптотики функций Ханкеля, формулы (1.3.16), (1.3.17) приобретают следующий вид:

$$W_{\rho\omega} \approx \frac{q^2}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|s}{\omega\varepsilon(\omega)} \exp(-2\rho \operatorname{Im}s) \right), \quad (1.3.18)$$

$$W_{z\omega} \approx \frac{q^2}{2\pi\rho\beta c} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|}{\varepsilon(\omega)} \exp(-2\rho \operatorname{Im}s) \right). \quad (1.3.19)$$

Из (1.3.18) следует, что при отсутствии диссипации величина $W_{\rho\omega}$ в дальней зоне ($\rho |s| \gg 1$) отлична от нуля только на частотах излучения, где $s^2 > 0$ и, следовательно, величина s вещественна.

Энергетической диаграммой излучения Вавилова–Черенкова называется полярная диаграмма, на которой по радиальной оси откладывается модуль вектора \vec{W}_ω

$$W_\omega = \sqrt{W_{\rho\omega}^2 + W_{z\omega}^2}, \quad (1.3.20)$$

а в качестве угловой переменной используется угол θ_W между этим вектором и направлением движения частицы:

$$\theta_W = \operatorname{arctg}(W_{\rho\omega} / W_{z\omega}). \quad (1.3.21)$$

В случае отсутствия диссипации в дальней зоне на частотах излучения имеем

$$\operatorname{tg} \theta_W = W_{\rho\omega} / W_{z\omega} \approx c\beta s \omega^{-1}. \quad (1.3.22)$$

Нетрудно показать, что θ_W совпадает с углом наклона групповой скорости $\vec{V}_g = d\omega/d\vec{k}$ к оси z . Действительно, рассмотрим дисперсионное уравнение для изотропной среды

$$\Delta = k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 c^{-2} n^2 = 0, \quad (1.3.23)$$

откуда групповая скорость может быть вычислена по формуле

$$\vec{V}_g = d\omega/d\vec{k} = -\frac{\partial\Delta/\partial\vec{k}}{\partial\Delta/\partial\omega}. \quad (1.3.24)$$

При этом получим:

$$\vec{V}_g = -(\partial\Delta/\partial\omega)^{-1} (2k_x \vec{e}_x + 2k_z \vec{e}_z). \quad (1.3.25)$$

Вектор \vec{V}_g составляет с направлением движения угол θ_g :

$$\operatorname{tg} \theta_g = k_x/k_z. \quad (1.3.26)$$

Учитывая, что для волн излучения Вавилова–Черенкова $k_x = k_\rho = s$, $k_z = \omega V^{-1}$, из (1.3.26) получаем

$$\operatorname{tg} \theta_g = c\beta s / \omega, \quad (1.3.27)$$

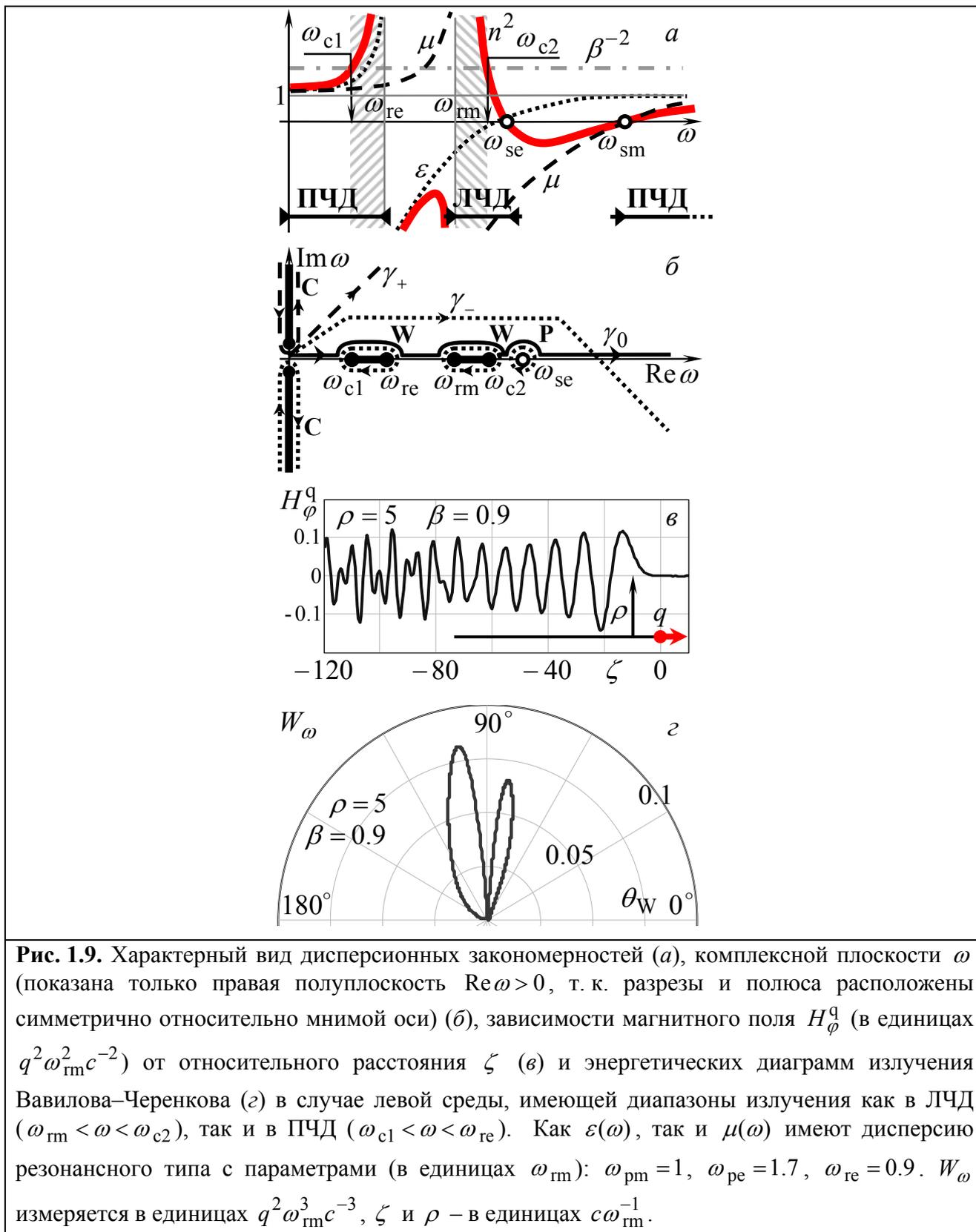
что в дальней зоне совпадает с $\operatorname{tg} \theta_W$ (1.3.22).

Как было показано в разделе 1.3.2 (см. формулу (1.3.3)), если диапазон излучения лежит в ПЧД, то $\varepsilon(\omega) > 0$, $\text{sgn } s = \text{sgn } \omega$, следовательно $W_{\rho\omega} > 0$, $W_{z\omega} > 0$, $\theta_W = \theta_g \in [0, \pi/2]$. Если же диапазон излучения лежит в ЛЧД, то $\varepsilon(\omega) < 0$, $\text{sgn } s = -\text{sgn } \omega$, $W_{\rho\omega} > 0$, $W_{z\omega} < 0$ и $\theta_W = \theta_g \in [\pi/2, \pi]$. Таким образом, в случае правой и левой среды полярная диаграмма будет сосредоточена в разных угловых диапазонах. В связи с этим она оказывается очень удобной для иллюстрации свойств излучения.

1.3.4. Численный анализ и обсуждение результатов

Удобный алгоритм численного расчета поля опирается, как и ранее, на определенную трансформацию исходного контура интегрирования. Прежде всего, воспользуемся свойством (1.1.9) и заменим интеграл по всей вещественной оси интегралом по положительной полуоси. Для относительно малых значений ω полученный контур удобно трансформировать таким образом, чтобы он обходил сверху на достаточном расстоянии все точки ветвления и полюса. При больших значениях ω для наилучшей сходимости целесообразно трансформировать контур так, чтобы он шел параллельно асимптоте КНС (1.1.13). В итоге, при $\zeta > 0$ новый контур представляет собой полубесконечный луч, параллельный асимптоте КНС (γ_+ на рис. 1.8, I, б, II, б). При $\zeta < 0$ мы используем трапецеидальный контур, причем его полубесконечная часть параллельна асимптоте КНС (γ_- на рис. 1.8, I, б, II, б). Такая трансформация позволяет избежать пересечения особенностей подынтегральных выражений, а главное её достоинство заключается в возможности выбрать наиболее подходящий контур для конкретных параметров задачи.

Некоторые результаты вычислений зависимости компоненты H_φ^q от расстояния ζ представлены на рис. 1.8, I, в, II, в. Как было показано в разделе (1.2.3), зависимости различных компонент поля от ζ качественно совпадают, поэтому для иллюстрации основных эффектов достаточно рассмотреть одну какую-либо компоненту, например H_φ^q . На рис. 1.8, I, г, II, г представлены соответствующие энергетические диаграммы (см. раздел 1.3.3). Рис. 1.8, I, в, г относится к случаю среды, имеющей диапазон излучения только в ПЧД, тогда как рис. 1.8, II, в, г относится к случаю среды, имеющей диапазон излучения только в ЛЧД. Можно видеть, что энергетическая диаграмма в случае ЛЧД «перевернута», что свидетельствует об обратном характере излучения. Кроме того, увеличение амплитуды поля с ростом $|\zeta|$ в левой среде происходит медленнее, чем в правой. Действительно, первый максимум огибающей в случае правой среды (рис. 1.8, I, в) наблюдается при $\zeta \approx -40$, а в случае левой среды (рис. 1.8, II, в) – при $\zeta \approx -80$. Это объясняется тем, что волновое поле в левой среде отстает от заряда сильнее, чем в правой среде.



На рис. 1.9, а–г показан случай более сложной левой среды. Для ее описания мы используем магнитную проницаемость $\mu(\omega)$ резонансного типа (как в (1.3.2)), а также резонансную диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega_{\text{re}}^2 - 2i\omega_{\text{dm}}\omega - \omega^2}.$$

На рис. 1.9, *а*, *б* показаны зависимости величин ε , μ и n^2 от частоты, а также характерный вид комплексной плоскости ω , причем параметры среды подобраны таким образом, чтобы имелись диапазоны излучения Вавилова–Черенкова как в ПЧД ($\omega_{\text{c1}} < \omega < \omega_{\text{re}}$), так и в ЛЧД ($\omega_{\text{tm}} < \omega < \omega_{\text{c2}}$), где $s(\omega_{\text{c1,2}}) = 0$. Для поля заряда, движущегося в такой среде, можно получить представление, аналогичное (1.3.4) – (1.3.7). При этом волновые части поля будут состоять из двух слагаемых, соответствующих двум диапазонам излучения Вавилова–Черенкова (см. рис. 1.9, *б*). Энергетическая диаграмма излучения Вавилова–Черенкова (рис. 1.9, *в*) также имеет два лепестка, соответствующих прямому и обратному излучению Вавилова–Черенкова. На графике для магнитного поля (рис. 1.9, *г*) видно, что для относительно малых значений $|\zeta|$ поле близко к синусоидальному, а при $|\zeta| > 70$ поведение поля становится более сложным. Это связано с «включением» излучения Вавилова–Черенкова в ЛЧД на достаточно больших расстояниях.

Завершая данный раздел, отметим, что в нем была рассмотрена задача об электромагнитном поле заряда, движущегося в изотропной левой среде. С помощью метода, разработанного в предыдущих разделах, компоненты электромагнитного поля были представлены в виде суммы «квазикулоновской» (квазистатической) составляющей, волновой составляющей и «плазменного следа». Данное представление обладает физической ясностью и имеет определенные преимущества для расчетов по сравнению с исходными выражениями. Также с использованием указанного метода был разработан эффективный метод численного расчета компонент поля, использующий определенную трансформацию исходного контура интегрирования. Продемонстрирован эффект более сильного отставания волнового поля от заряда в левой среде по сравнению со случаем обычной (правой) среды.

1.4. Поле заряда в анизотропной среде

В данном разделе речь пойдет об электромагнитном поле заряда, движущегося в негиротропной анизотропной среде, описываемой тензором диэлектрической проницаемости вида

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

и скалярной магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Будем считать, что компоненты тензора $\hat{\varepsilon}$ обладают дисперсией плазменного типа с малыми потерями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_{p\perp}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d\perp}}, & \omega_{d\perp} \ll \omega_{p\perp}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_{p\parallel}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d\parallel}}, & \omega_{d\parallel} \ll \omega_{p\parallel}. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Интерес к данной задаче обусловлен следующими причинами. В предыдущем разделе было проанализировано излучение Вавилова–Черенкова в левой среде и был продемонстрирован обратный характер этого излучения. Как будет видно в дальнейшем (см. раздел 2.2), обратное излучение Вавилова–Черенкова приводит к интересным эффектам при наличии границы раздела с левой средой. Впечатляющие успехи последних лет в области разработки и производства метаматериалов уже привели к реализации материалов, свойства которых похожи на свойства левых сред [35–42]. Однако создание в чистом виде изотропной левой среды по-прежнему остается трудной задачей. В этой связи целесообразно обратиться к исследованию менее экзотических сред, в частности, анизотропных, в которых, как известно [22, 55, 56], при определенных условиях возможен эффект обратного излучения Вавилова–Черенкова. Обращение к анизотропным средам тем более оправдано, поскольку реальные метаматериалы, на основе которых и представляется возможным реализовать левую среду, в настоящее время обладают определенной анизотропией. Более того, под это рассмотрение подпадают и обычные одноосные кристаллы. Что касается выбора дисперсии плазменного типа (1.4.2), то для кристаллов такое поведение будет характерно на частотах, существенно превышающих все резонансные частоты. Для анизотропных «метасред» дисперсия вида (1.4.2) также достаточно характерна [83–90].

1.4.1. Аналитическое исследование компонент электромагнитного поля

В цилиндрической системе координат ρ , φ , z компоненты электромагнитного поля заряда q , движущегося в среде (1.4.1) с постоянной скоростью $\vec{V} = V\vec{e}_z$, могут быть записаны в следующем виде [22]:

$$\{E_{\rho}^q, E_z^q, H_{\phi}^q\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{E_{\rho\omega}^q(\omega), E_{z\omega}^q(\omega), H_{\phi\omega}^q(\omega)\} \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega, \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned} E_{\rho\omega}^q(\omega) &= \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{i\pi s(\omega)}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} H_1^{(1)}(s(\omega)\rho), \\ E_{z\omega}^q(\omega) &= \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{-\pi\omega}{\beta c \varepsilon_{\perp}(\omega)} \left(\varepsilon_{\perp}(\omega)\beta^2 - 1\right) H_0^{(1)}(s(\omega)\rho), \\ H_{\phi\omega}^q(\omega) &= \frac{q}{2\pi\beta c} i\pi\beta s(\omega) H_1^{(1)}(s(\omega)\rho), \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

где $\zeta = z - Vt$, $\beta = V/c$, c – скорость света в вакууме, $H_V^{(1)}(\xi)$ – функции Ханкеля,

$$s(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{V^2} \frac{\varepsilon_{\parallel}(\omega)}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} \left(\varepsilon_{\perp}(\omega)\beta^2 - 1\right)}. \quad (1.4.5)$$

Контуром интегрирования в формулах (1.4.3) является вещественная ось. Как и в случае изотропной среды, выражения (1.4.3) – (1.4.5) удовлетворяют уравнениям Максвелла и материальным соотношениям независимо от того, как будет фиксирован корень при нахождении функции $s(\omega)$ (1.4.5). При выборе «физической ветви» данного радикала мы будем опираться на принцип затухания. Поскольку среда, в которой происходит движение частицы, обладает диссипацией, то «физическое» решение соответствует волнам, убывающим при распространении от оси движения заряда,

$$\text{Im}s(\omega) > 0. \quad (1.4.6)$$

В конечных результатах мы устремим диссипацию к нулю. На всей комплексной плоскости ω функция $s(\omega)$ должна быть определена так, чтобы на вещественной оси было выполнено требование (1.4.6). Разрезы, как обычно, проведем по таким отрезкам, где $\text{Im}s = 0$, «физический» лист римановой поверхности фиксируем требованием (1.4.6).

Аналогично случаю изотропной среды, имеют место следующие свойства функции $s(\omega)$ и функций (1.4.4) на «физическом» листе римановой поверхности (черта означает комплексное сопряжение):

$$s(-\bar{\omega}) = \exp(i\pi) \bar{s}(\omega), \quad (1.4.7)$$

$$E_{\rho\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{\rho\omega}^q(\omega), \quad E_{z\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{z\omega}^q(\omega), \quad H_{\phi\omega}^q(-\bar{\omega}) = \bar{H}_{\phi\omega}^q(\omega), \quad (1.4.8)$$

$$\int_{\Gamma} F_{\omega}^q(\omega) \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega = 2 \int_{\Gamma_+} \text{Re} \left[F_{\omega}^q(\omega) \exp\left(i\omega \frac{\zeta}{V}\right) d\omega \right], \quad (1.4.9)$$

где $F_{\omega}^q(\omega)$ – любая из функций (1.4.4), Γ – контур, симметричный относительно мнимой оси, Γ_+ – его часть, лежащая в области $\text{Re } \omega \geq 0$. Из (1.4.9) следуют также частные случаи, аналогичные (1.1.8) – (1.1.10).

Асимптотика функции $s(\omega)$ на «физическом» листе имеет вид

$$s(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} V^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} i \omega \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \omega),$$

что совпадает с формулой (1.1.11) изотропного случая. Отсюда следует, что области экспоненциального убывания и асимптоты контура наискорейшего спуска (КНС) в рассматриваемой задаче также совпадают со случаем изотропной среды и определяются формулами, соответственно, (1.1.12) и (1.1.13).

Следуя логике разделов 1.2 и 1.3, получим представление для полного поля аналогичное (1.2.9) и (1.3.4). При отсутствии диссипации ($\omega_{d\parallel} = \omega_{d\perp} = 0$) функция $s^2(\omega)$ может быть представлена в следующем виде

$$s^2(\omega) = -\frac{1 - \beta^2 (\omega^2 - \omega_{p\parallel}^2) (\omega^2 - \omega_c^2)}{\beta^2 c^2 (\omega^2 - \omega_{p\perp}^2)}, \quad (1.4.10)$$

где $\omega_c = i \omega_{p\perp} \sqrt{\beta^2 / (1 - \beta^2)}$. Разрезы, идущие по линиям $\operatorname{Im} s = 0$, показаны на рис. 1.10.

Как видно из (1.4.10), диапазоном излучения ($s^2 > 0$) является отрезок вещественной оси между плазменными частотами. Осуществляя предельный переход от случая ненулевых потерь к случаю $\omega_{d\parallel} = \omega_{d\perp} = 0$, можно показать, что контур интегрирования будет идти по верхнему берегу данного разреза, причем при $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ на этом берегу выполнено равенство $\operatorname{sgn} s = -\operatorname{sgn} \omega$, а при $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ выполнено равенство $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} \omega$. Таким образом, в случае $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ фазовая скорость волн ИВЧ направлена к источнику, $V_{ph\rho} = s \omega / (\omega^2 c^{-2} n^2) < 0$, т. е. принцип излучения Зоммерфельда нарушается. В случае $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ фазовая скорость ИВЧ направлена от источника, $V_{ph\rho} = s \omega / (\omega^2 c^{-2} n^2) > 0$, т. е. принцип Зоммерфельда выполнен. Этот результат согласуется с результатом, который можно получить, пользуясь общепринятым в кристаллооптике принципом отбора физического решения по групповой скорости (принципом Манделъштама): в диапазонах излучения всегда $V_{g\rho} > 0$ [46, 47, 79]. Действительно, дисперсионное уравнение в среде (1.4.1) имеет следующий вид:

$$\Delta = k_x^2 / \varepsilon_{\parallel} + k_z^2 / \varepsilon_{\perp} - \omega^2 / c^2 = 0. \quad (1.4.11)$$

Групповая скорость может быть вычислена по формуле

$$\vec{V}_g = d\omega / d\vec{k} = -\frac{\partial \Delta / \partial \vec{k}}{\partial \Delta / \partial \omega}. \quad (1.4.12)$$

Используя (1.4.11) и (1.4.2), получаем при $\omega > 0$:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega} = -\left(\frac{k_x^2 \partial \varepsilon_{\parallel} / \partial \omega}{\varepsilon_{\parallel}^2} + \frac{k_z^2 \partial \varepsilon_{\perp} / \partial \omega}{\varepsilon_{\perp}^2} + \frac{2\omega}{c^2} \right) = -\left| \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|, \quad (1.4.13)$$

$$\vec{V}_g = \left| \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|^{-1} \left(\frac{2k_x}{\varepsilon_{\parallel}} \vec{e}_x + \frac{2k_z}{\varepsilon_{\perp}} \vec{e}_z \right). \quad (1.4.14)$$

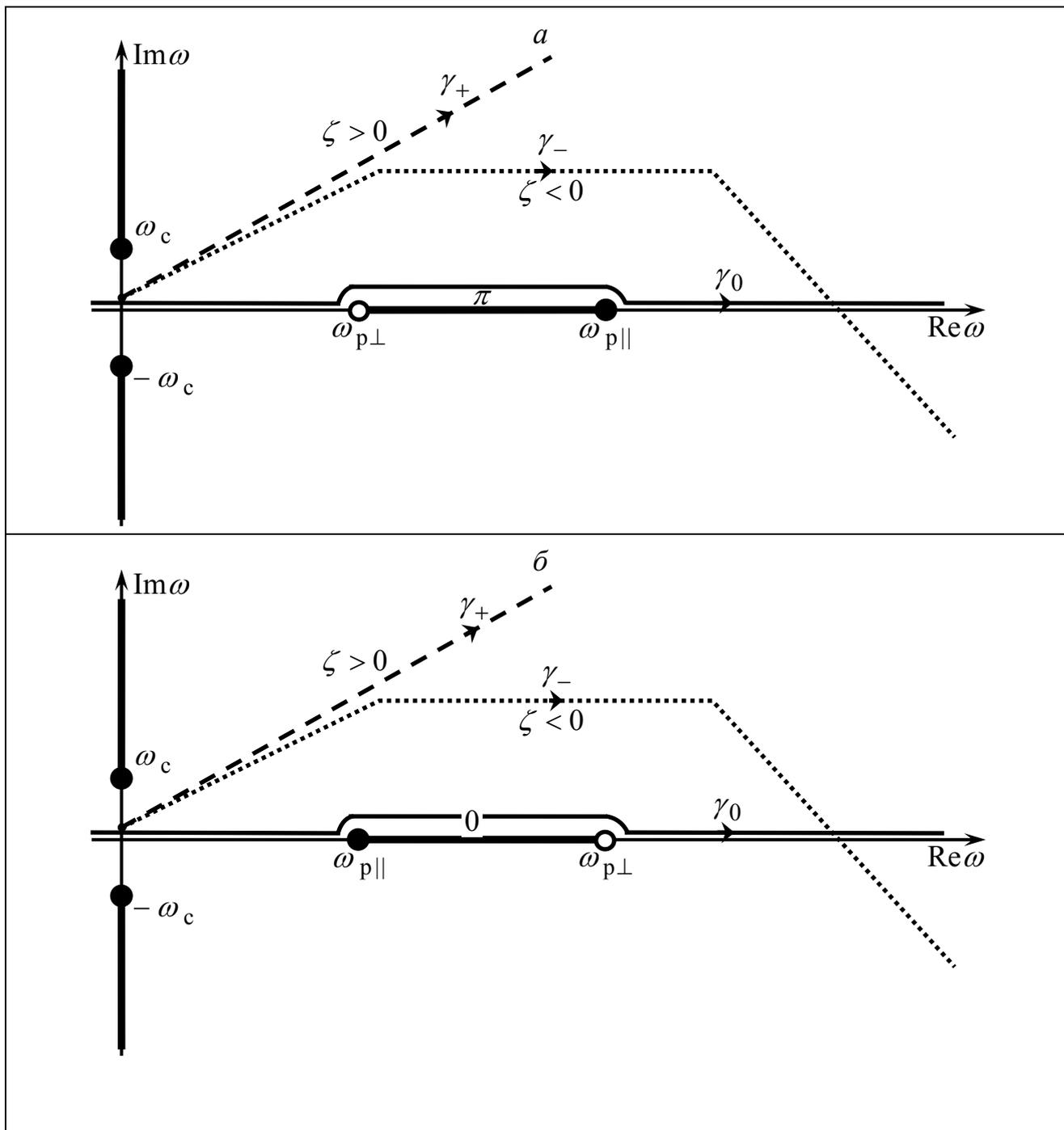


Рис. 1.10. Вид разрезв и контуров интегрирования на комплексной плоскости ω при $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ (а) и при $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ (б) в случае анизотропной среды (1.4.1), (1.4.2). Жирными линиями показаны разрезв, выколотыми точками – нули $\varepsilon_{\perp}(\omega)$, γ_0 – исходный контур интегрирования, γ_{\pm} – контура, использовавшиеся для численного расчета полного поля. Показана только правая полуплоскость ($\text{Re } \omega \geq 0$), т. к. полюса и разрезв расположены симметрично относительно мнимой оси. Цифра на верхнем берегу разреза означает аргумент функции $s(\omega)$.

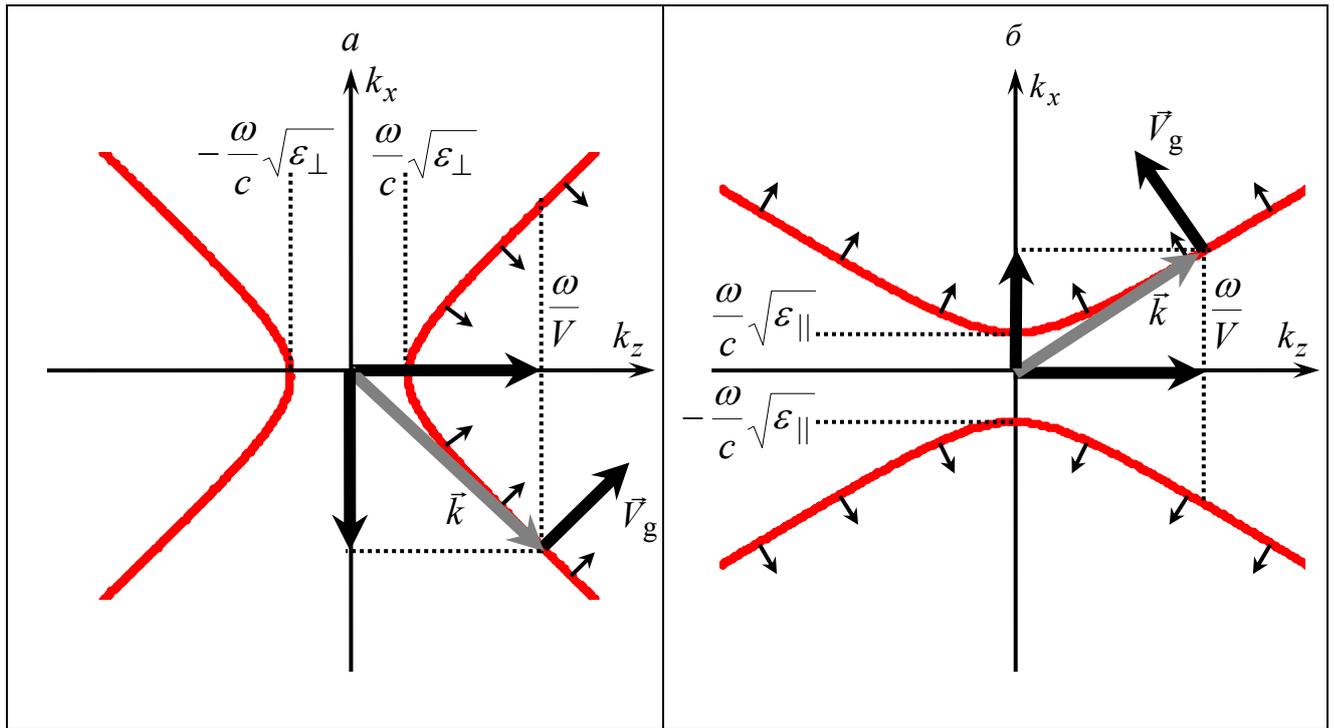


Рис. 1.11. Поверхности волновых векторов и направления групповой скорости (тонкие стрелки) для среды (1.4.1), (1.4.2) в случае $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ (а) и в случае $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ (б). Жирными стрелками показаны волновой вектор волны излучения Вавилова–Черенкова \vec{k} , которому соответствует групповая скорость, направленная от источника ($V_{g\rho} > 0$), а также сама групповая скорость \vec{V}_g .

Гиперболы, отвечающие уравнению (1.4.11) при $\min(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp}) < \omega < \max(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp})$, для случаев $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ ($\varepsilon_{\parallel} < 0$, $\varepsilon_{\perp} > 0$) и $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ ($\varepsilon_{\parallel} > 0$, $\varepsilon_{\perp} < 0$) показаны на рис. 1.11, а и 1.11, б, соответственно. Тонкими стрелками на гиперболах показано направление групповой скорости согласно (1.4.14). Составляющая волнового вектора ИВЧ вдоль оси z в нашем случае, согласно (1.4.3), равна ωV^{-1} . Волновой вектор рассматриваемой волны, соответствующий групповой скорости, направленной от оси движения заряда ($V_{g\rho} > 0$), а также соответствующий вектор групповой скорости показаны жирными стрелками. Как видно из рис. 1.11, в случае (а) эта волна по фазе бежит к источнику (к оси движения), а в случае (б) – от него (от оси). Таким образом, мы доказали эквивалентность принципа Мандельштама и принципа затухания ($\text{Im}s > 0$) в рассматриваемой ситуации.

Дальнейшие аналитические преобразования выражений (1.4.3), как и в разделах 1.2, 1.3 сводятся к замыканию исходного контура интегрирования в верхней полуплоскости при $\zeta > 0$ или в нижней полуплоскости при $\zeta < 0$ (согласно (1.1.12)). После этого все компоненты могут быть записаны в виде сумм интегралов по разрезам. При $\zeta > 0$ вклад в интегралы вносит только разрез, идущий вдоль мнимой положительной полуоси и

описывающий квазистатическое поле. При $\zeta < 0$ в интегралы вносит вклад как разрез, идущий по мнимой отрицательной полуоси (квазистатическое поле), так и разрез, расположенный на вещественной оси (волновое поле, т. е. поле излучения Вавилова–Черенкова). В результате ряда преобразований с учетом соотношений (1.4.7) – (1.4.9), (1.1.11), (1.1.12) можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_{\rho}^q &= E_{\rho C}^q + E_{\rho W}^q, \\ E_z^q &= E_{zC}^q + E_{zW}^q, \\ H_{\varphi}^q &= H_{\varphi C}^q + H_{\varphi W}^q, \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho C}^q \\ E_{zC}^q \\ H_{\varphi C}^q \end{Bmatrix} = \frac{q}{\pi \beta c} \int_{|\omega_c|}^{\infty} \begin{Bmatrix} \frac{\pi |s(i\bar{\omega})|}{\varepsilon_{\perp}(i\bar{\omega})} J_1(\rho |s(i\bar{\omega})|) \\ \frac{\pi \beta c}{\varepsilon_{\parallel}(i\bar{\omega}) \bar{\omega}} |s(i\bar{\omega})|^2 J_0(\rho |s(i\bar{\omega})|) \operatorname{sgn}(\zeta) \\ \pi \beta |s(i\bar{\omega})| J_1(\rho |s(i\bar{\omega})|) \end{Bmatrix} \exp\left(-\bar{\omega} \frac{|\zeta|}{V}\right) d\bar{\omega}, \quad (1.4.16)$$

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho W}^q \\ E_{zW}^q \\ H_{\varphi W}^q \end{Bmatrix} = \frac{2q}{\pi \beta c} \int_{\omega_{p\parallel}}^{\omega_{p\perp}} \begin{Bmatrix} \frac{\pi |s(\omega)|}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \\ \frac{-\pi \beta c}{\omega \varepsilon_{\parallel}(\omega)} |s(\omega)|^2 J_0(\rho |s(\omega)|) \cos\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \\ \pi \beta |s(\omega)| J_1(\rho |s(\omega)|) \sin\left(\omega \frac{|\zeta|}{V}\right) \end{Bmatrix} d\omega \Theta(-\zeta), \quad (1.4.17)$$

где $|\omega_c| = \omega_{p\perp} \sqrt{\beta^2 / (1 - \beta^2)}$, $\Theta(\xi)$ – единичная функция Хэвисайда. Отметим, что в формулах (1.4.15) – (1.4.17) диссипация не учитывается, $\omega_{d\parallel} = \omega_{d\perp} = 0$. Как и ранее, индексом «С» снабжены «квазикулоновские» части соответствующих компонент, а индексом «W» – их волновые составляющие. «Квазикулоновское» поле присутствует как позади, так и впереди движущегося заряда и быстро убывает по мере удаления от него. Волновое поле (поле излучения) имеется только позади заряда и осциллирует по мере удаления от него.

Отметим, что в случае изотропных сред из-за вклада полюсов $\varepsilon(\omega) = 0$ в аналогичных представлениях возникал «плазменный след». В данном случае, несмотря на присутствие в знаменателе подынтегральных выражений для компонент электрического поля величины ε_{\perp} (см. формулы (1.4.2)), в представлении (1.4.15) составляющая «плазменного следа» отсутствует. Покажем на примере компоненты E_{zW}^q , что подынтегральное выражение не имеет особенности при $\omega \rightarrow \omega_{p\perp}$.

Рассмотрим случай $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$. При $\omega = \omega_{p\perp} + \delta$ ($\delta \rightarrow +0$) имеем

$$s(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_{p\perp} + \delta} \sqrt{\frac{(\omega_{p\parallel}^2 - \omega_{p\perp}^2) \omega_{p\perp}}{2\beta^2 c^2 (\omega - \omega_{p\perp})}}, \quad (1.4.18)$$

$$J_0(\rho | s(\omega) |) \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_{p\perp} + \delta} \sqrt{\frac{4\beta^2 c^2 \sqrt{\omega - \omega_{p\perp}}}{\pi \rho \sqrt{(\omega_{p\parallel}^2 - \omega_{p\perp}^2) \omega_{p\perp}}}} \cos \left[\rho \sqrt{\frac{(\omega_{p\parallel}^2 - \omega_{p\perp}^2) \omega_{p\perp}}{2\beta^2 c^2 (\omega - \omega_{p\perp})}} - \frac{\pi}{4}} \right]. \quad (1.4.19)$$

В окрестности $\omega_{p\perp}$ интеграл (1.4.17) для компоненты E_{zW}^q имеет следующий вид:

$$E_{zW}^q \sim \int_{\omega_{p\perp} + \delta}^{\omega_{p\perp}} \frac{\cos \left[\rho \sqrt{\frac{(\omega_{p\parallel}^2 - \omega_{p\perp}^2) \omega_{p\perp}}{2\beta^2 c^2 (\omega - \omega_{p\perp})}} - \frac{\pi}{4}} \right]}{(\omega - \omega_{p\perp})^{3/4}} d\omega. \quad (1.4.20)$$

Переходя в (1.4.20) к новой переменной интегрирования $\xi = 1/\sqrt{\omega - \omega_{p\perp}}$, получаем интеграл

$$E_{zW}^q \sim \int_{1/\sqrt{\delta}}^{+\infty} \cos \left[\rho \sqrt{\frac{(\omega_{p\parallel}^2 - \omega_{p\perp}^2) \omega_{p\perp}}{2\beta^2 c^2}} \xi - \frac{\pi}{4}} \right] \xi^{-3/2} d\xi, \quad (1.4.21)$$

который является сходящимся. Аналогичным образом можно показать, что в интеграле для компоненты $E_{\rho W}^q$ особенность также отсутствует.

Отметим, что из проведенного анализа следует, что диапазон излучения Вавилова–Черенкова в рассматриваемой среде не зависит от скорости частицы. Действительно, при отсутствии диссипации в диапазоне $\min(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp}) < \omega < \max(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp})$ имеем $s^2 > 0$ независимо от β , поэтому волновое поле (1.4.17), соответствующее разрезу на вещественной оси частот, существует при любой скорости. Более того, как нетрудно убедиться, подынтегральные выражения в (1.4.17) при $\beta \rightarrow 0$ ведут себя как $\beta^{-3/2}$, т. е. волновое поле при бесконечно малой скорости становится бесконечно большим. Описанный парадокс можно разрешить, если учесть малые потери в среде.

Рассмотрим положительные частоты ($\omega > 0$) и учтем ненулевые мнимые части компонент тензора: $\varepsilon_{\parallel}'' > 0$, $\varepsilon_{\perp}'' > 0$. В диапазоне излучения $\min(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp}) < \omega < \max(\omega_{p\parallel}, \omega_{p\perp})$ из (1.4.5), (1.4.6) имеем (при $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$):

$$\text{Res} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} -\frac{\omega}{c\beta} \sqrt{\frac{|\varepsilon'_{\parallel}|}{\varepsilon'_{\perp}}}, \quad \text{Im}s \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{\omega}{2c\beta} \sqrt{\frac{|\varepsilon'_{\parallel}|}{\varepsilon'_{\perp}}} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{|\varepsilon'_{\parallel}|} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} \right).$$

Из исходных формул (1.4.3) получаем:

$$\left\{ E_{\rho\omega}^q, E_{z\omega}^q, H_{\phi\omega}^q \right\} \sim \left| H_V^{(1)}(\rho s) \right| \sim \left| \exp(i\rho s) \right| = \exp(-\rho \text{Im}s) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0.$$

Поскольку в реальных средах всегда присутствуют ненулевые потери, при малых скоростях излучение Вавилова–Черенкова отсутствует, и поле определяется

квазистатической составляющей. Тем самым, предельный переход от случая движущейся частицы к случаю неподвижной частицы оказывается выполненным.

Энергетические диаграммы для рассматриваемой анизотропной среды могут быть получены аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.3.3. Опуская промежуточные выкладки, выпишем конечный результат:

$$\vec{W} = \int_0^{+\infty} \vec{W}_\omega d\omega, \quad \vec{W}_\omega = W_{\rho\omega} \vec{e}_\rho + W_{z\omega} \vec{e}_z, \quad (1.4.22)$$

$$W_{\rho\omega} = \frac{q^2}{4} \operatorname{Im} \left(\frac{|s|^2 s}{\omega \varepsilon_{\parallel}(\omega)} H_0^{(1)}(\rho s) \overline{H_1^{(1)}(\rho s)} \right), \quad (1.4.23)$$

$$W_{z\omega} = \frac{q^2}{4\beta c} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|^2}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} H_1^{(1)}(\rho s) \overline{H_1^{(1)}(\rho s)} \right). \quad (1.4.24)$$

Вдали от оси движения, когда выполнено неравенство $\rho|s| \gg 1$ и верны асимптотики функций Ханкеля, формулы (1.4.23), (1.4.24) приобретают следующий вид:

$$W_{\rho\omega} \approx \frac{q^2}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|s}{\omega \varepsilon_{\parallel}(\omega)} \exp(-2\rho \operatorname{Im}s) \right), \quad (1.4.25)$$

$$W_{z\omega} \approx \frac{q^2}{2\pi\rho\beta c} \operatorname{Re} \left(\frac{|s|}{\varepsilon_{\perp}(\omega)} \exp(-2\rho \operatorname{Im}s) \right). \quad (1.4.26)$$

В случае отсутствия диссипации в дальней зоне θ_W совпадает с углом наклона вектора групповой скорости $\vec{V}_g = d\omega/d\vec{k}$ к оси движения заряда:

$$\operatorname{tg} \theta_W \approx \operatorname{tg} \theta_g = c s \varepsilon_{\perp} \beta (\omega \varepsilon_{\parallel})^{-1}. \quad (1.4.27)$$

Из (1.4.27) также можно сделать выводы относительно направления излучения. Как было показано, при $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ выполнено равенство $\operatorname{sgn} s = -\operatorname{sgn} \omega$, поэтому $\theta_W \in [0, \pi/2]$, и излучение Вавилова–Черенкова направлено вперед. При $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$, имеем $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} \omega$, $\theta_W \in [\pi/2, \pi]$ и излучение Вавилова–Черенкова носит обратный характер. Это полностью согласуется с результатами, полученными из анализа поверхностей волновых векторов (см. рис. 1.11). Таким образом, в среде (1.4.1), (1.4.2) проекция групповой скорости и потока энергии излучения Вавилова–Черенкова на направление движения заряда будет отрицательной при условии, что в частотном диапазоне излучения $\varepsilon_{\perp} < 0$ или, другими словами, при условии $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$.

1.4.2. Численный анализ и обсуждение результатов

Для численного расчета компонент использовался метод, развитый в разделах 1.2.3 и 1.3.3. На основании (1.1.7) перейдем к полубесконечному контуру, лежащему в правой полуплоскости. В исходных формулах (1.4.3) трансформируем контур интегрирования, опираясь на проведенный выше анализ его расположения относительно особенностей подынтегральных функций. Для области $\zeta > 0$ можно взять контур в виде полубесконечного луча, определяемого формулой (1.1.13). Для области $\zeta < 0$ можно взять трапецевидный контур, полубесконечная часть которого параллельна асимптотам (1.1.13), а длина конечных отрезков достаточна для обхода всех особенностей сверху (рис. 1.9, а, б). На основе описанного подхода была разработана программа расчета компонент поля в среде *Mathcad*, результаты расчетов как полного электромагнитного поля, так и энергетических диаграмм ИВЧ в случае рассматриваемой анизотропной среды приведены на рис. 1.12 для различного соотношения параметров.

Прежде всего, рис. 1.12, II подтверждает выводы об обратном характере излучения Вавилова–Черенкова при выполнении условия $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$. Действительно, при этом условии максимум энергетических диаграмм на рис. 1.12, II направлен под тупым углом к направлению движения частицы ($\theta = 0^\circ$). Более того, как видно из рис. 1.12, II, при увеличении разницы между плазменными частотами, максимум энергетических диаграмм приближается либо к направлению движения частицы (в случае прямого ИВЧ, $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$), либо к противоположному направлению (в случае обратного ИВЧ, $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$).

Графики зависимости магнитного поля H_ϕ^q от относительного расстояния $\zeta = z - Vt$ (рис. 1.12, III) существенно различаются в указанных случаях, главным образом частотой заполнения. Из представленных результатов можно сделать вывод, что эта частота определяется параметром $\omega_{p\perp}$. Также из сравнения этих графиков можно заметить, что максимум огибающей в случае обратного ИВЧ наблюдается при большем значении $|\zeta|$ по сравнению со случаем прямого ИВЧ. Это свидетельствует о более сильном отставании обратного ИВЧ от заряда по сравнению с прямым ИВЧ. Аналогичный, но гораздо более выраженный эффект демонстрировался нами ранее для случая изотропной левой среды в разделе 1.3.3.

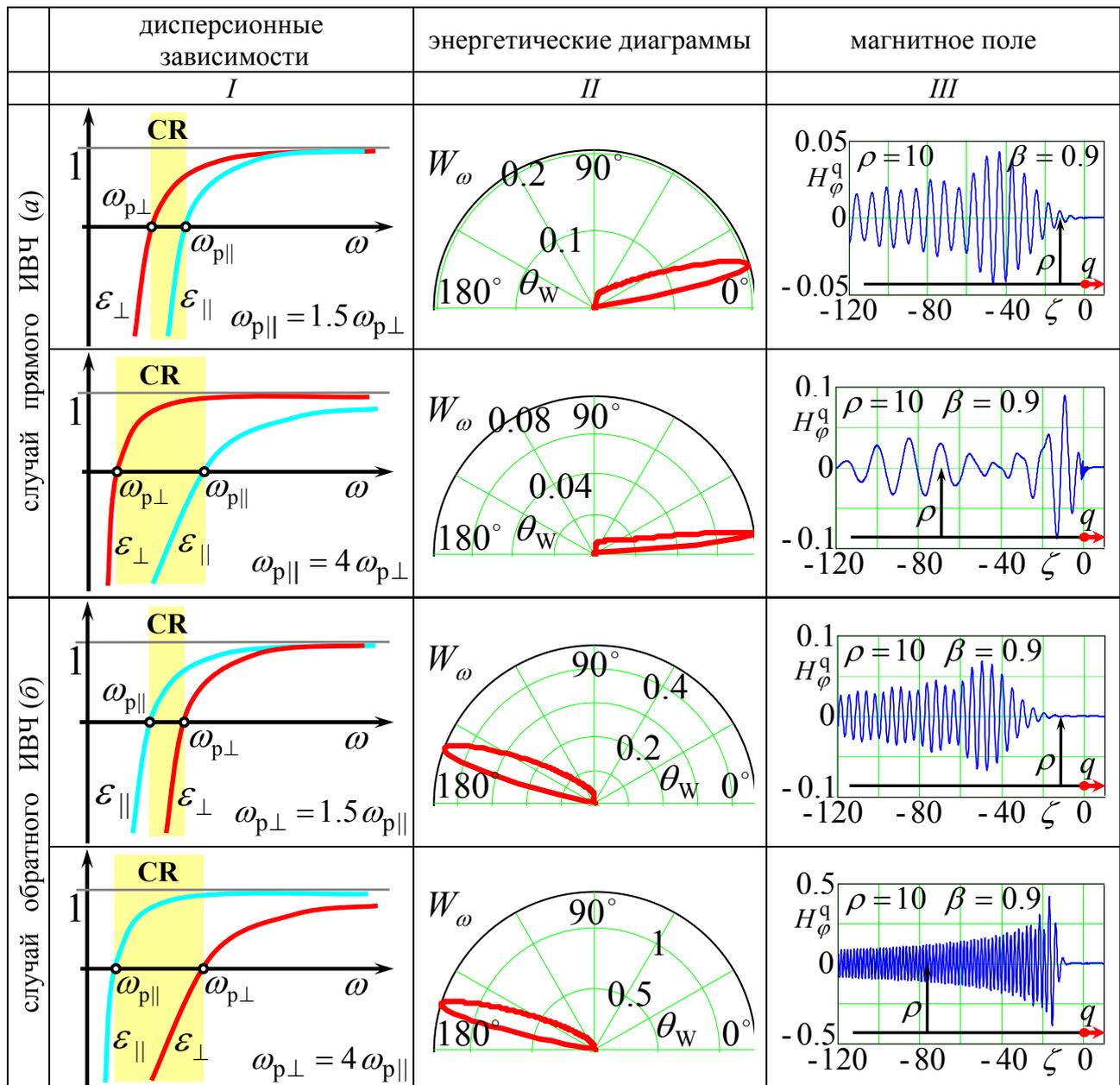


Рис. 1.12. Характерный вид дисперсионных закономерностей (*I*), энергетических диаграмм ИВЧ (*II*) и зависимостей магнитного поля H_ϕ^q от относительного расстояния ζ (*III*) в случае анизотропной среды (1.4.1) с дисперсионными зависимостями (1.4.2) при различных соотношениях между плазменными частотами (указаны на рисунках). H_ϕ^q измеряется в единицах $q^2 \omega_{p\parallel}^2 c^{-2}$, W_ω – в единицах $q^2 \omega_{p\parallel}^3 c^{-3}$, ζ и ρ – в единицах $c \omega_{p\parallel}^{-1}$; $\omega_{d\parallel} = \omega_{d\perp} = 0.001 \omega_{p\parallel}$.

1.5. Выводы

В данной главе были рассмотрены общие свойства подынтегральных функций, входящих в интегральные выражения для компонент поля точечного заряда, движущегося как в изотропной среде с произвольной частотной дисперсией, так и в анизотропной немагнитной среде с одноосным тензором диэлектрической проницаемости. На базе полученных свойств был разработан подход к исследованию поля заряда, опирающийся на применение методов теории функций комплексного переменного, в частности, методов контурного интегрирования. Этот подход позволяет в ряде случаев получить более ясные и удобные для анализа выражения для компонент поля, а также разработать эффективные алгоритмы численного расчета.

С помощью описанного подхода было исследовано три задачи. Первые две задачи посвящены анализу поля заряда, движущегося в изотропной среде со сложной или необычной частотной дисперсией. Одна из них – это случай среды с произвольным числом резонансных частот, другая – случай левой среды, или среды с отрицательным показателем преломления. В обоих случаях компоненты электромагнитного поля были представлены в виде суммы физически различных составляющих: квазистатической составляющей, волновой составляющей и «плазменного следа». Было показано, что полученные выражения обладают рядом преимуществ по сравнению с ранее известными. Также был разработан эффективный алгоритм численного расчета полного поля, использующий определенную трансформацию исходного контура интегрирования. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие наиболее яркие эффекты, среди которых следует отметить более сильное отставание волнового поля от заряда в случае левой среды по сравнению со случаем обычной (правой) среды. Данный эффект является следствием обратного характера излучения Вавилова–Черенкова в левой среде.

Третья задача посвящена анализу поля заряда, движущегося в анизотропной немагнитной среде с одноосным тензором диэлектрической проницаемости, компоненты которого обладают дисперсией плазменного типа. Были рассмотрены кинематические закономерности, выявлены условия, при которых излучение Вавилова–Черенкова носит обратный характер, получено представление полного поля в виде суммы квазистатической и волновой составляющих, а также разработан алгоритм численного расчета компонент поля по трансформированному контуру. Среди результатов следует отметить эффект более сильного отставания волнового поля от заряда в режиме обратного излучения Вавилова–Черенкова по сравнению с режимом прямого излучения. Данный эффект менее выражен по сравнению с аналогичным явлением в левой среде.

Глава 2

Электромагнитное поле заряда, пересекающего границу раздела между вакуумом и левой средой

В данной главе будет рассмотрена задача о пересечении зарядом границы раздела между вакуумом и левой средой, или средой с отрицательным показателем преломления (см. раздел 1.3). В отличие от других работ в данной области, основное внимание будет уделяться исследованию структуры электромагнитного поля. Для сравнения параллельно будет рассматриваться также и задача с обычной (правой) средой.

2.1. Постановка задачи и общие результаты

Рассмотрим сначала достаточно общую формулировку задачи. Будем анализировать электромагнитное поле, возникающее при пересечении точечным зарядом q границы раздела (плоскость $z = 0$) между двумя пассивными, однородными, изотропными, частотно-диспергирующими средами, описываемыми проницаемостями: $\varepsilon_1(\omega)$, $\mu_1(\omega)$ для области $z < 0$ и $\varepsilon_2(\omega)$, $\mu_2(\omega)$ для области $z > 0$ (рис. 2.1). Будем считать, что среда, расположенная при $z < 0$ является правой, а полупространство $z > 0$ заполнено левой средой, причем правая и левая среды понимаются в смысле определения (1.3.1). Положение заряда в момент времени t определяется соотношениями $z = Vt = c\beta t$, $x = y = 0$.

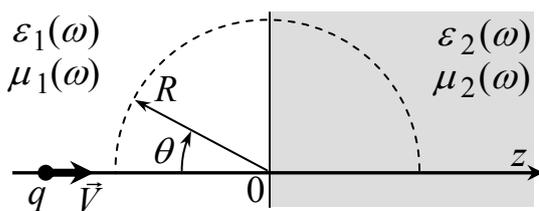
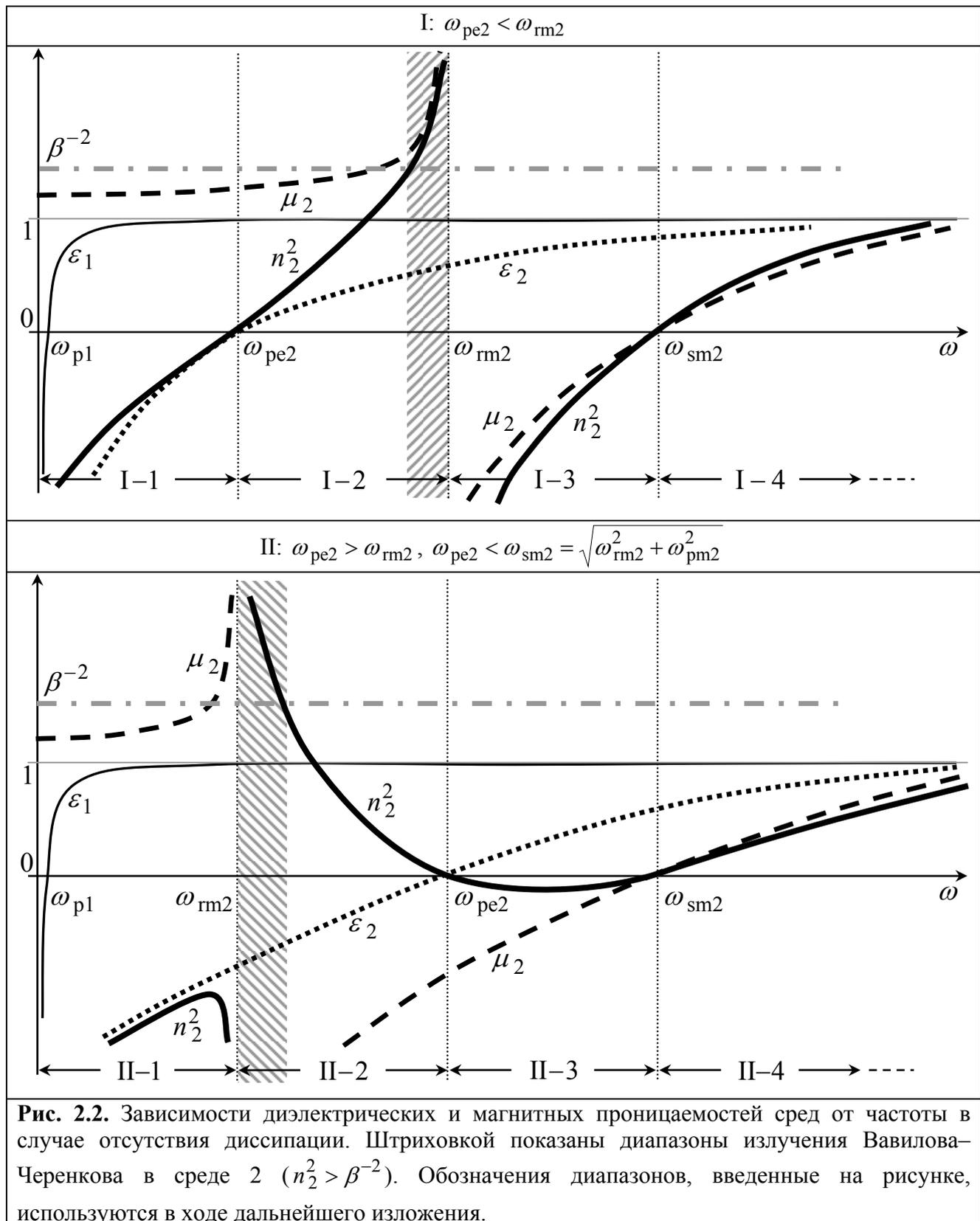


Рис. 2.1. Геометрия задачи.

Для описания левой среды ($z > 0$) будем использовать те же модели, что и в разделе 1.3,

$$\varepsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe2}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{de2}}, \quad \omega_{de2} \ll \omega_{pe2},$$

$$\mu_2(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pm2}^2}{\omega_{rm2}^2 - 2i\omega\omega_{dm2} - \omega^2}, \quad \omega_{dm2} \ll \omega_{pm2}.$$
(2.1.1)



Для описания среды 1 ($z < 0$) будем использовать следующие модели

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d1}}, \quad \mu_1 = 1, \quad \omega_{d1} \ll \omega_{p1}. \quad (2.1.2)$$

При этом будем считать, что

$$\omega_{p1} \ll \omega_{pe2}, \quad \omega_{p1} \ll \omega_{pm2}. \quad (2.1.3)$$

В дальнейшем при аналитическом исследовании мы всюду будем считать, что рассматриваемые частоты удовлетворяют неравенству $|\omega| \gg \omega_{p1}$. При этом полупространство $z < 0$ фактически является вакуумом с $\varepsilon_1 \approx 1$ (см. рис. 2.2), а плазменная зависимость (2.1.2) есть удобный способ корректно ввести малые потери. Поскольку в конечных результатах будет осуществляться предельный переход к случаю вакуума ($\omega_{p1} \rightarrow 0$), указанное неравенство будет нарушаться только в пределах пренебрежимо малого интервала частот в окрестности $\omega = 0$.

Мы рассмотрим два частных случая соотношения параметров среды 2:

I: $\omega_{pe2} < \omega_{m2}$, (правая среда)

II: $\omega_{pe2} > \omega_{m2}$, $\omega_{pe2} < \omega_{sm2} = \sqrt{\omega_{m2}^2 + \omega_{pm2}^2}$. (левая среда) (2.1.4)

В случае I среда 2 является правой, поскольку имеет два ПЧД (диапазоны I–2 и I–4 на рис. 2.2). В случае II среда 2 имеет ЛЧД (диапазон II–2 на рис. 2.2), поэтому является левой. В дальнейшем мы будем ссылаться на различные диапазоны с помощью обозначений, приведенных на рис. 2.2. Как будет видно, диапазоны I–2 и II–2 представляют наибольший интерес, и им будет уделено наибольшее внимание.

В общем виде данная задача рассмотрена, к примеру, в монографии [61]. Если индекс 1 относится к области $z < 0$, а индекс 2 – к области $z > 0$, то полное поле может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} E_\rho^{(1,2)} \\ E_z^{(1,2)} \\ H_\varphi^{(1,2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_\rho^{q(1,2)} \\ E_z^{q(1,2)} \\ H_\varphi^{q(1,2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_\rho^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_\varphi^{b(1,2)} \end{Bmatrix}. \quad (2.1.5)$$

По терминологии В. Л. Гинзбурга [61] верхний индекс «q» соответствует «вынужденному» полю (т. е. полю заряда), а индекс «b» – «свободному» полю в соответствующей безграничной среде. На границе раздела (в плоскости $z = 0$), как обычно, используются условия непрерывности касательных компонент векторов \vec{E} и \vec{H} .

Вынужденное поле в правой среде с произвольным числом резонансов рассмотрено в разделе 1.2. Все формулы этого раздела (в частности, разложение (1.2.9) – (1.2.12)) применимы и в случае зависимости (2.1.2). Вынужденное поле в левой среде, описываемой зависимостями (2.1.1), подробно рассмотрено в разделе 1.3. В частности, имеет место разложение (1.3.4) – (1.3.7). Свободное поле дается следующими выражениями [61]:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi}^{b(1,2)} \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1,2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (2.1.6)$$

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1,2)} \end{Bmatrix} = \frac{q}{2\pi\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \frac{ck_{\rho}^2}{\omega\varepsilon_{1,2}} H_1^{(1)}(\rho k_{\rho}) \\ \mp i c k_{\rho}^3 \\ \frac{\omega\varepsilon_{1,2} k_z^{(1,2)}}{\omega\varepsilon_{1,2} k_z^{(1,2)}} H_0^{(1)}(\rho k_{\rho}) \\ \frac{\mp k_{\rho}^2}{k_z^{(1,2)}} H_1^{(1)}(\rho k_{\rho}) \end{Bmatrix} B^{(1,2)}(k_{\rho}, \omega) \exp(ik_z^{(1,2)}|z|) dk_{\rho}, \quad (2.1.7)$$

$$B^{(1,2)}(k_{\rho}, \omega) = \frac{k_z^{(1,2)}}{g_3(k_{\rho}, \omega)} \left(\pm \frac{\beta\varepsilon_{1,2} k_z^{(2,1)} \mp \omega c^{-1} \varepsilon_{2,1}}{k_{\rho}^2 - s_{1,2}^2} + \frac{\beta^2 \varepsilon_{1,2}}{\omega c^{-1} \pm \beta k_z^{(2,1)}} \right), \quad (2.1.8)$$

$$k_z^{(1,2)}(k_{\rho}, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_{1,2}^2 - k_{\rho}^2}, \quad (2.1.9)$$

$$g_3(k_{\rho}, \omega) = \varepsilon_1 k_z^{(2)} + \varepsilon_2 k_z^{(1)}, \quad (2.1.10)$$

$n_{1,2}^2 = \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}$, а функции $s_{1,2}(\omega)$ определены формулой (1.1.3) и требованиями (1.1.4)

$\text{Im} s_{1,2} > 0$. Выбор физических ветвей радикалов $k_z^{(1,2)}$ будем производить также в соответствии с принципом затухания. Для волн свободного поля это означает, что они должны поглощаться по мере удаления от границы раздела, что приводит к следующим требованиям:

$$\text{Im} k_z^{(1)} > 0, \quad \text{Im} k_z^{(2)} > 0. \quad (2.1.11)$$

Отсюда легко получить, что для всех положительных частот в области $z < 0$ выполнено $\text{Re} k_z^{(1)} > 0$, в то время как в левой среде (область $z > 0$) $\text{Re} k_z^{(2)} > 0$ для ПЧД и $\text{Re} k_z^{(2)} < 0$ для ЛЧД (это показывается так же, как для показателя преломления n – см. раздел 1.3.1).

Поясним, как удовлетворяются граничные условия в рассматриваемой задаче. Как следует из (1.1.1), (1.1.2), зависимости Фурье-гармоник касательных компонент вынужденного поля от координаты ρ различны при $z < 0$ ($\sim H_1^{(1)}(\rho s_1)$) и $z > 0$ ($\sim H_1^{(1)}(\rho s_2)$). Для того, чтобы убедиться в выполнении граничных условий, можно воспользоваться разложением для Фурье-гармоник вынужденного поля [76]

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega}^{q(1,2)} \\ E_{z\omega}^{q(1,2)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(1,2)} \end{array} \right\} = \frac{q}{2\pi\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{\rho}^2}{\varepsilon_{1,2}(k_{\rho}^2 - s_{1,2}^2)} H_1^{(1)}(\rho k_{\rho}) \\ i\beta c s_{1,2}^2 k_{\rho} \\ \omega \varepsilon_{1,2}(k_{\rho}^2 - s_{1,2}^2) H_0^{(1)}(\rho k_{\rho}) \\ \frac{\beta k_{\rho}^2}{k_{\rho}^2 - s_{1,2}^2} H_1^{(1)}(\rho k_{\rho}) \end{array} \right\} dk_{\rho}, \quad (2.1.12)$$

которое возникает естественным образом при выводе выражений (1.1.1), (1.1.2) с помощью четырехкратного преобразования Фурье. В выражениях (2.1.12) и (2.1.7) зависимости вынужденного и свободного поля от ρ совпадают, и в выполнении граничных условий можно убедиться непосредственной проверкой.

Также отметим, что при совпадении сред 1 и 2 и, следовательно, отсутствии границы раздела, свободное поле отсутствует, что вполне естественно. Действительно, в этом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $s_1 = s_2 = s$, $k_z^{(1)} = k_z^{(2)} = k_z$, $g_3 = 2\varepsilon k_z$. С учетом равенства

$$k_{\rho}^2 - s^2 = \beta^{-2} \left(\frac{\omega}{c} + \beta k_z \right) \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z \right)$$

из (2.2.8) получаем

$$\begin{aligned} B^{(1,2)} &= \frac{k_z}{2\varepsilon k_z} \left(- \frac{\beta^2 \varepsilon (\omega c^{-1} \mp \beta k_z)}{(\omega c^{-1} - \beta k_z)(\omega c^{-1} + \beta k_z)} + \frac{\beta^2 \varepsilon}{\omega c^{-1} \pm \beta k_z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(- \frac{\beta^2}{\omega c^{-1} \pm \beta k_z} + \frac{\beta^2}{\omega c^{-1} \pm \beta k_z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Для Фурье-гармоник свободного поля (2.1.7) имеют место свойства симметрии аналогичные свойствам (1.1.6) для вынужденного поля

$$E_{\rho\omega}^b(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{\rho\omega}^b(\omega), \quad E_{z\omega}^b(-\bar{\omega}) = \bar{E}_{z\omega}^b(\omega), \quad H_{\varphi\omega}^b(-\bar{\omega}) = \bar{H}_{\varphi\omega}^b(\omega), \quad (2.1.13)$$

которые следуют из вещественности компонент свободного поля (2.1.6). Из (2.1.13) вытекает следующее соотношение, аналогичное (1.1.7):

$$\int_{\Gamma} F_{\omega}^b \exp(-i\omega t) d\omega = 2 \int_{\Gamma^+} \operatorname{Re} \left(F_{\omega}^b \exp(-i\omega t) d\omega \right), \quad (2.1.14)$$

где Γ – контур интегрирования, симметричный относительно мнимой оси, Γ^+ – часть Γ , лежащая в области $\operatorname{Re} \omega > 0$, а F_{ω}^b – любая из функций (2.1.7). Таким образом, достаточно анализировать выражения (2.1.7) только для положительных частот, что мы и будем делать в дальнейшем.

На комплексной плоскости k_{ρ} подынтегральные функции в (2.1.7) содержат 4 точки ветвления $\pm k_{1,2}$, где

$$k_{1,2} = \omega c^{-1} n_{1,2}, \quad n_{1,2} = \sqrt{n_{1,2}^2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}, \quad \text{Im } n_{1,2} > 0, \quad (2.1.15)$$

соответствующие разрезы (условимся проводить их вдоль линий $\text{Im } k_z^{(1,2)} = 0$) и три типа полюсов, являющихся нулями выражений, стоящих в знаменателях сомножителей и слагаемых. Условно назовем их «первыми», «вторыми» и «третьими».

«Первые» полюса определим следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} k_\rho^2 - s_1^2 &= 0, & k_\rho &= \pm s_1, & (\text{в среде 1}) \\ \omega c^{-1} - \beta k_z^{(1)} &= 0. & & & (\text{в среде 2}) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Преобразуя второе из уравнений (2.1.16)

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} - \beta k_z^{(1)} &= \frac{\omega}{c} - \beta \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_\rho^2} = \\ &= \frac{\omega}{c} - \beta \sqrt{s_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \beta^2} - k_\rho^2} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 \beta^2}{\omega^2} (k_\rho^2 - s_1^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

видим, что «первым» полюсам в среде 2 также соответствуют точки $k_\rho = \pm s_1$, причем они лежат на берегу разреза $\text{Im } k_z^{(1)} = 0$ с $\arg k_z^{(1)} = 0$.

Для «вторых» полюсов имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \omega c^{-1} + \beta k_z^{(2)} &= 0, & (\text{в среде 1}) \\ k_\rho^2 - s_2^2 &= 0, & k_\rho &= \pm s_2. & (\text{в среде 2}) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Первое из уравнений (2.1.17) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} + \beta k_z^{(2)} &= \frac{\omega}{c} + \beta \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_\rho^2} = \\ &= \frac{\omega}{c} + \beta \sqrt{s_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \beta^2} - k_\rho^2} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2 \beta^2}{\omega^2} (k_\rho^2 - s_2^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что и в среде 1 «вторым» полюсам соответствуют точки $k_\rho = \pm s_2$, причем эти полюса лежат на берегах разреза $\text{Im } k_z^{(2)} = 0$ с $\arg k_z^{(2)} = \pi$.

«Третий» полюс, обозначенный k_ρ^{P3} , удовлетворяет уравнению

$$g_3(k_\rho^{\text{P3}}) = \varepsilon_1 k_z^{(2)}(k_\rho^{\text{P3}}) + \varepsilon_2 k_z^{(1)}(k_\rho^{\text{P3}}) = 0. \quad (2.1.18)$$

Для анализа свободного поля (2.1.6) будем использовать два подхода. Первый из них заключается в построении асимптотических представлений для Фурье-гармоник $E_{\rho\omega}^{\text{b}(1,2)}$, $E_{z\omega}^{\text{b}(1,2)}$, $H_{\varphi\omega}^{\text{b}(1,2)}$ с помощью трансформации исходного контура интегрирования к контуру наискорейшего спуска (КНС). Такой подход, широко распространенный в теории дифракции и распространения радиоволн [91–93], редко использовался в теории переходного излучения.

В случае границы между двумя правыми средами этот подход применялся в несколько упрощенном виде Гарибяном [59]. Второй подход – это численный расчет как Фурье-гармоник (2.1.7), так и полного свободного поля (2.1.6).

Сделаем важное для дальнейшего анализа замечание. Как видно уже из приведенного рассмотрения, поле частицы в каждой из сред может представлять собой достаточно сложную суперпозицию волн различных типов, соответствующих указанным особенностям (полюсам и точкам ветвления). В рамках данного исследования при написании асимптотических выражений для $E_{\rho\omega}^{b(1,2)}$, $E_{z\omega}^{b(1,2)}$ и $H_{\phi\omega}^{b(1,2)}$ мы будем интересоваться только главными членами объемного излучения, а именно, сферическими и цилиндрическими волнами, которые при пренебрежении диссипацией убывают с расстоянием по одному из двух законов

$$\text{либо } \sim R^{-1}, \quad \text{либо } \sim \rho^{-1/2}. \quad (2.1.19)$$

Для удобства упоминания в тексте назовем данное ограничение «условием существенности» (для асимптотики). Любые волны, убывающие быстрее указанных двух, мы будем отбрасывать. Подчеркнем, однако, что данные ограничения не касаются численного анализа, в рамках которого полное поле рассчитывается по точным формулам (см. раздел 2.5).

Как уже отмечалось, при аналитическом исследовании мы будем считать, что рассматриваемые частоты существенно превышают плазменную частоту среды 1, $\omega \gg \omega_{p1}$ (напомним, что согласно свойству (2.2.14), мы анализируем только положительные частоты, $\omega > 0$). Более того, мы ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда выполнены следующие неравенства:

$$\varepsilon''_2 \ll |\varepsilon'_2|, \quad \mu''_2 \ll |\mu'_2|, \quad (2.1.20)$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 + i\varepsilon''_2$, $\mu_2 = \mu'_2 + i\mu''_2$. Как следует из (2.1.1), условия (2.1.20) выполняются на частотах, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega \gg \omega_{de2}, \quad |\omega - \omega_{rm2}| \gg \omega_{dm2}, \quad |\omega - \omega_{sm2}| \gg \omega_{dm2}, \quad (2.1.21)$$

где $\omega_{sm2} = \sqrt{\omega_{rm2}^2 + \omega_{pm2}^2}$. Таким образом, во всех аналитических выражениях, если это не оговорено особо, неравенства (2.1.21) и $\omega \gg \omega_{p1}$ считаются выполненными. При указанных предположениях из (2.1.1) – (2.1.3) следует, что

$$\varepsilon''_1 \ll \varepsilon''_2, \quad \mu''_2,$$

где $\varepsilon''_1 = \text{Im} \varepsilon_1$. Так как обе среды считаются пассивными, то мнимые части всех проницаемостей положительны. Вещественные части ε_2 и μ_2 могут быть любого знака (см. рис. 2.2).

Выясним взаимное расположение особенностей (полюсов и разрезов) на комплексной плоскости k_ρ , учитывая наличие малого поглощения в средах. Разрезы на плоскости k_ρ , идущие по областям $\text{Im} k_z^{(1,2)} = 0$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(k_z^{(1,2)}\right)^2 = 0, \\ \operatorname{Re}\left(k_z^{(1,2)}\right)^2 > 0. \end{cases} \quad (2.1.22)$$

Для разреза радикала $k_z^{(1)}$ получаем из (2.1.22) (с точностью до членов порядка $\varepsilon_1'' / \varepsilon_1'$):

$$\begin{cases} 2k'_\rho k''_\rho = \omega^2 c^{-2} \varepsilon_1'', \\ \omega^2 c^{-2} \varepsilon_1' - (k'_\rho)^2 > 0. \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Линия, удовлетворяющая первому уравнению (2.1.23), представляет собой равнобочную гиперболу (ветви лежат в I и III четвертях), асимптоты которой совпадают с осями k'_ρ и k''_ρ , а разрезы представляют собой ее отрезки, удовлетворяющие второму уравнению (2.2.23). Точки ветвления $\pm k_1$ лежат, соответственно, в I и III четвертях.

Для разрезов радикала $k_z^{(2)}$ приходим к аналогичной системе (с точностью до членов порядка $\operatorname{Im} n_2^2 / \operatorname{Re} n_2^2$):

$$\begin{cases} 2k'_\rho k''_\rho = \omega^2 c^{-2} \operatorname{Im} n_2^2, \\ \omega^2 c^{-2} \operatorname{Re} n_2^2 - (k'_\rho)^2 > 0. \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Если выполнено условие

$$\operatorname{Im} n_2^2 = \varepsilon_2' \mu_2'' + \mu_2' \varepsilon_2'' > 0, \quad (2.1.25)$$

то разрезы $\operatorname{Im} k_z^{(2)} = 0$ и точки ветвления $\pm k_2$ лежат в I и III четвертях. Условие (2.1.25) выполнено в частотных диапазонах I–2, I–4 и II–4. Если же выполнено обратное неравенство

$$\operatorname{Im} n_2^2 < 0, \quad (2.1.26)$$

то разрезы с точками ветвления $\pm k_2$ лежат во II и IV четвертях. Условие (2.1.26) выполнено в ЛЧД II–2. В диапазонах I–1, I–3, II–1 и II–3 знак $\operatorname{Im} n_2^2$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Характерный вид комплексной плоскости k_ρ во всех частотных диапазонах (за исключением несущественного диапазона $\omega < \omega_{p1}$) представлен на рис. 2.3. Для определенности в диапазонах I–1, I–3, II–1 и II–3 комплексная плоскость k_ρ представлена для случая частот, обеспечивающих выполнение неравенства (2.1.25). Данное ограничение не сказывается на общности получаемых в дальнейшем результатов.

Как следует из определения функции s_1 (1.1.3) и вида зависимости $n_1^2(\omega) = \varepsilon_1(\omega)$ (2.1.2), вклады полюсов $\pm s_1$ не удовлетворяют условию существенности (2.1.19). Действительно, из определения ε_1 (2.1.2) на частотах $\omega \gg \omega_{p1} \gg \omega_{d1}$ имеем

$$\varepsilon_1 \approx 1 - \omega_{p1}^2 / \omega^2 + 2i \omega_{d1} \omega_{p1}^2 / \omega^3.$$

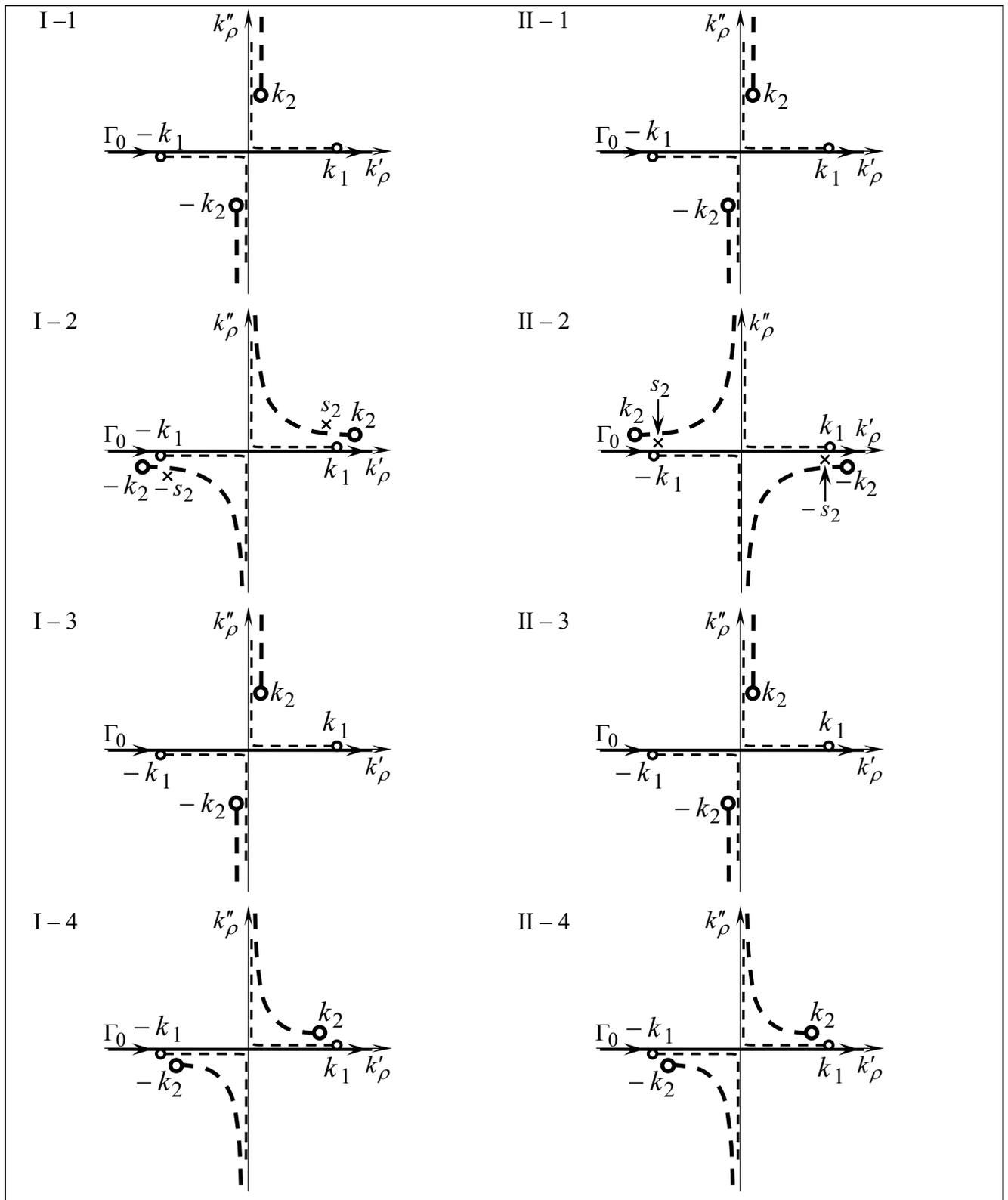


Рис. 2.3. Характерный вид комплексной плоскости k_ρ в различных частотных диапазонах. Значками \bullet и \circ отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значком \times показаны полюса $\pm s_2$.

Для функции s_1^2 получаем

$$s_1^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2 c^2} (\varepsilon_1 \beta^2 - 1) = -\frac{\omega^2 (1 - \beta^2) + \omega_{p1}^2 \beta^2}{\beta^2 c^2} + 2i \frac{\omega_{d1} \omega_{p1}^2}{\omega c^2},$$

откуда видно, что, $\text{Re } s_1^2 < 0$, $\text{Im } s_1^2 \ll |\text{Re } s_1^2|$ и, следовательно, $s_1' \ll s_1''$. Полюса $\pm s_1$ располагаются вблизи мнимой оси на плоскости k_ρ , а вклады этих полюсов в Фурье-гармоники (2.2.7) будут экспоненциально малыми ($|E_{\rho\omega}^{b(1,2)}|$, $|E_{z\omega}^{b(1,2)}|$, $|H_{\varphi\omega}^{b(1,2)}| \sim \rho^{-1/2} \exp(-\rho s_1'')$ при $\rho |s_1| \gg 1$). Они не удовлетворяют условию (2.2.19), и ввиду этого полюса $\pm s_1$ на рис. 2.3 не показаны. Из вышесказанного следует, что Фурье-гармоники вынужденного поля (1.1.2) в среде 1 также не удовлетворяют условию (2.1.19). Отсюда вытекает, что в области $z < 0$ полное поле определяется только свободным полем.

Как будет показано в приложении Б, вклад полюса k_ρ^{P3} представляет собой поверхностную волну, экспоненциально убывающую от границы раздела ($|E_{\rho\omega}^{b(1,2)}|$, $|E_{z\omega}^{b(1,2)}|$, $|H_{\varphi\omega}^{b(1,2)}| \sim \rho^{-1/2} \exp(-|z| \text{Im } k_z^{(1,2)}(k_\rho^{P3}))$). Поскольку такая волна не удовлетворяет условию (2.1.19), полюс k_ρ^{P3} также не показан на рис. 2.3.

Единственным полюсом, который может быть существенным для асимптотики в смысле условия (2.1.19), является полюс s_2 . Нетрудно видеть, что в диапазонах I-1, II-1, I-3, II-3, I-4 и II-4 имеем $\text{Re } s_2^2 = \text{Re } n_2^2 \beta^2 - 1 < 0$, $s_2' \ll s_2''$, полюс s_2 находится вблизи мнимой оси и несущественен (соответственно, и не показан на рис. 2.3). Только в диапазонах I-2 и II-2 существуют частоты, на которых выполняется условие излучения Вавилова-Черенкова $\text{Re } s_2^2 = \text{Re } n_2^2 \beta^2 - 1 > 0$ (эти области частот, называемые диапазонами излучения Вавилова-Черенкова, отмечены штриховкой на рис. 2.2). В диапазонах излучения Вавилова-Черенкова при выполнении неравенства $\text{Re } s_2^2 \gg |\text{Im } s_2^2| \sim |\text{Im } n_2^2| \beta^2$ имеем $|s_2'| \gg s_2''$, полюса $\pm s_2$ расположены вблизи вещественной оси k_ρ , и только в этих случаях они показаны на рис. 2.3. В диапазоне II-2 эти полюса описывают отраженное и преломленное на границе раздела излучение Вавилова-Черенкова. Далее мы будем называть эти волны «обратным черенковско-переходным излучением» (ОЧПИ) [73, 74]. Отметим, что из существенности полюсов $\pm s_2$ в диапазонах излучения Вавилова-Черенкова следует, что в этих диапазонах также будет существенно и вынужденное поле (1.1.2). При этом в области $z > 0$ полное поле определяется суммой свободного и вынужденного полей.

2.2. Асимптотики поля в вакууме

2.2.1. Асимптотики в случае изолированной седловой точки

Рассмотрим сначала поле в среде 1 ($z < 0$). Для простоты будем учитывать потери только в среде 2, а в области $z < 0$ перейдем к пределу $\varepsilon_1'' \rightarrow 0$, считая $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} > 0$, где $\varepsilon_1 = 1 - \omega_{p1}^2 / \omega^2$. Как обычно [91–93], введем новые пространственные переменные R, θ (см. рис. 2.1), так что $\rho = R \sin \theta$, $|z| = R \cos \theta$. В рассматриваемой области пространства $0 < \theta < \pi/2$. Также введем новую комплексную переменную интегрирования ψ такую, что $k_\rho = k_1 \sin \psi$, при этом $k_z^{(1)} = k_1 \cos \psi$.

Сначала рассмотрим и сравним наиболее интересные диапазоны ПЧД I–2 и ЛЧД II–2, в которых на плоскости k_ρ имеются существенные полюса (т. е. полюса, вклады которых могут быть объемными волнами излучения). Характерный вид комплексной плоскости ψ для этих двух диапазонов представлен на рис. 2.4. Контур $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 . Полюса $\pm s_2$ переходят в точки $\pm \psi_2^{(1)}$ ($\sin \psi_2^{(1)} = k_1^{-1} s_2$), точки ветвления $\pm k_1$ исчезают, а точки ветвления $\pm k_2$ переходят в $\pm \psi_{b2}$ ($\sin \psi_{b2} = k_1^{-1} k_2$). Расположение точек ветвления, разрезов и полюсов на плоскости ψ следует из их расположения на плоскости k_ρ (см. рис. 2.3).

После указанных замен формула (2.1.7) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\phi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{0\psi}^{(1)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(Rk_1 \sin \theta \sin \psi) \\ H_0^{(1)}(Rk_1 \sin \theta \sin \psi) \\ H_1^{(1)}(Rk_1 \sin \theta \sin \psi) \end{Bmatrix} \exp(iRk_1 \cos \theta \cos \psi) d\psi, \quad (2.2.1)$$

где

$$\begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{q}{2\pi\beta c} \begin{Bmatrix} c[\omega\varepsilon_1]^{-1}(k_1 \sin \psi)^2 k_1 \cos \psi \\ -ic[\omega\varepsilon_1]^{-1}(k_1 \sin \psi)^3 \\ -(k_1 \sin \psi)^2 \end{Bmatrix} B^{(1)}(k_1 \sin \psi, \omega). \quad (2.2.2)$$

Дальнейший анализ подразумевает нахождение контура наискорейшего спуска (КНС) и трансформацию к нему исходного контура $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$. Воспользовавшись асимптотическими представлениями функций Ханкеля при большом значении аргумента $Rk_1 \sin \theta |\sin \psi| \gg 1$, за пределами некоторой окрестности точки $\psi = 0$ можно представить подынтегральные выражения в (2.2.1) (с точностью до множителя) в виде

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \sim \int_{\Gamma_{0\psi}^{(1)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \exp(\Omega_1 \varphi_1(\psi)) d\psi, \quad \Omega_1 = k_1 R, \quad \varphi_1(\psi) = i \cos(\psi - \theta). \quad (2.2.3)$$

Контур наискорейшего спуска, проходящий через седловую точку $\psi_{S1} = \theta$, определяется условиями

$$\begin{cases} \text{Im} \varphi_1(\psi) = 1, \\ \text{Re} \varphi_1(\psi) < 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

На рис. 2.4 он обозначен $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$.

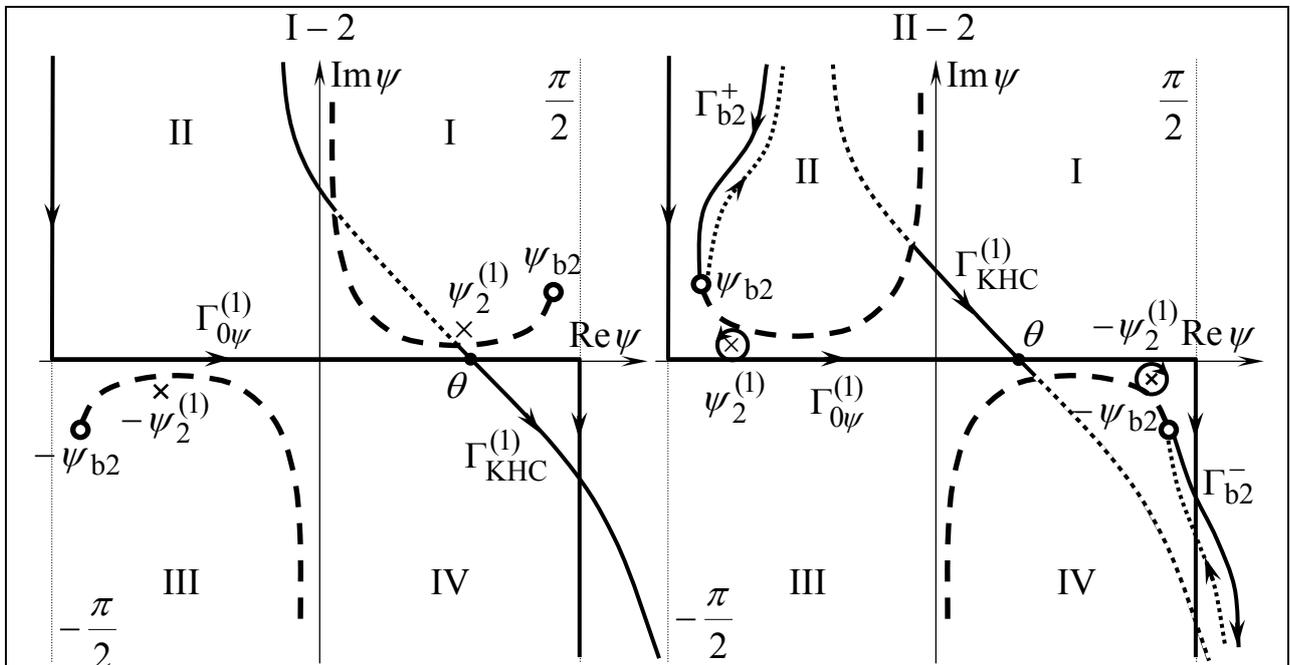


Рис. 2.4. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 1 ($z < 0$) в случае ПЧД (I-2) и ЛЧД (II-2). Римские цифры означают четверти исходной плоскости k_ρ . Значком \bullet отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значки \times обозначают полюса $\pm \psi_2^{(1)}$. Контур $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ , $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ – контур наискорейшего спуска, $\psi = \theta$ – седловая точка. Части контуров $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ и $\Gamma_{b_2}^\pm$, показанные мелким пунктиром (точками) лежат на листе римановой поверхности с $\text{Im} k_z^{(2)} < 0$.

В случае ПЧД I–2 (см. рис. 2.4) полюса $\pm\psi_2^{(1)}$ не захватываются при трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(1)} \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$, и мы получаем из (2.2.1):

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \int_{\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \\ H_0^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \\ H_1^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \end{Bmatrix} \exp(iRk_1 \cos\theta \cos\psi) d\psi. \quad (2.2.5)$$

Отметим, что в рассматриваемом диапазоне возможна ситуация, когда точка ветвления ψ_{b2} оказывается левее $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. В этом случае при трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ к $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ возникнет интеграл вдоль контура, охватывающего соответствующий разрез. Как известно [91], вклад такого контура представляет собой боковую волну, убывающую с расстоянием $\sim (R\sqrt{\rho})^{-1}$. Такая волна не удовлетворяет условию существенности (2.1.19), поэтому в выражении (2.2.5) интеграл по указанному контуру отсутствует.

Как можно видеть из рис. 2.4, в исследуемом диапазоне (I–2) седловая точка $\psi = \theta$ является изолированной, следовательно, при $\Omega_1 \gg 1$ получаем следующее асимптотическое выражение для интеграла вдоль КНС (2.2.5):

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ E_{z\omega}^{b(1)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2} h_1}{k_1 \sin\theta} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-3\pi i/4) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-\pi i/4) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-3\pi i/4) \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_1 R)}{R}, \quad (2.2.6)$$

где $h_1 = \sqrt{-2/\varphi_1''(\theta)}$, $\arg h_1 = \arg(d\psi)|_{\psi=\theta} = -\pi/4$ ($d\psi$ означает элемент вдоль $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$). Выражение (2.2.6) справедливо в дальней зоне ($\Omega_1 = Rk_1 \gg 1$) в диапазоне углов $1/\sqrt{\Omega_1} \ll \theta < \pi/2$ и представляет собой сферическую волну переходного излучения. Отметим, что нижнее ограничение на угол θ связано с условием применимости асимптотик функций Ханкеля, которое в седловой точке имеет вид $Rk_1(\sin\theta)^2 \gg 1$.

В случае ЛЧД II–2, как видно из рис. 2.4, трансформация $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ в $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ затрагивает полюса $\pm\psi_2^{(1)}$, при этом из (2.2.1) получаем следующее выражение:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \int_{\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \\ H_0^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \\ H_1^{(1)}(Rk_1 \sin\theta \sin\psi) \end{Bmatrix} \exp(iRk_1 \cos\theta \cos\psi) d\psi + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.7)$$

где величины $E_{\rho\omega}^{b(1)P}$, $E_{z\omega}^{b(1)P}$ и $H_{\varphi\omega}^{b(1)P}$ описывают вклад полюсов $\pm\psi_2^{(1)}$. Отметим, что интегралы вдоль контуров наискорейшего спуска Γ_{b2}^{\pm} , исходящих из соответствующих точек

ветвления, не учитываются в асимптотике (2.2.7). Это сделано на тех же основаниях, что и в случае ПЧД I–2. Подчеркнем, что в дальнейшем будет проводиться численный расчет исходных интегралов (2.1.7). Из него будет видно, что построенная асимптотика дает результаты, близкие к результатам таких расчетов.

Из рис. 2.4 видно, что в случае ЛЧД II–2 полюс $\psi_2^{(1)}$ захватывается при любом угле наблюдения θ , а полюс $-\psi_2^{(1)}$ захватывается в случае, когда он расположен правее контура $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. Чтобы выписать выражения, описывающие вклады полюсов в случае ЛЧД, необходимо найти строгие условия захвата полюса $-\psi_2^{(1)}$. Для этой цели проведем некоторые дополнительные вычисления.

Прежде всего, заметим, что вклады полюсов $\pm\psi_2^{(1)}$ будут существенны для асимптотики только если соответствующие им волны будут удовлетворять условиям (2.1.19). Другими словами, эти волны могут иметь лишь слабое экспоненциальное затухание вследствие учета потерь, а именно, вещественные и мнимые части величин s_2 и $k_z^{(1)}(\pm s_2)$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\text{Re } s_2 \gg \text{Im } s_2, \quad \text{Re } k_z^{(1)}(\pm s_2) \gg \text{Im } k_z^{(1)}(\pm s_2). \quad (2.2.8)$$

Соотношения (2.2.8) справедливы при выполнении неравенств

$$\text{Re } s_2^2 \gg \left| \text{Im } s_2^2 \right|, \quad \text{Re} \left(k_z^{(1)}(\pm s_2) \right)^2 \gg \left| \text{Im} \left(k_z^{(1)}(\pm s_2) \right) \right|^2,$$

которые эквивалентны следующим условиям:

$$\text{Re } n_2^2 \beta^2 - 1 \gg \left| \text{Im } n_2^2 \right| \beta^2, \quad n_1^2 \beta^2 - \text{Re } n_2^2 \beta^2 + 1 \gg \left| \text{Im } n_2^2 \right| \beta^2. \quad (2.2.9)$$

При стремлении диссипации к нулю ($\text{Im } n_2^2 \rightarrow 0$) и фиксированной скорости β условия (2.2.9) можно записать в виде

$$\omega_c^- < \omega < \omega_c^+, \quad (2.2.10)$$

где величины ω_c^\pm определены следующими уравнениями:

$$\text{Re } n_2^2(\omega_c^-) = \beta^{-2}(n_1^2 \beta^2 + 1), \quad \text{Re } n_2^2(\omega_c^+) = \beta^{-2}, \quad (2.2.11)$$

и принят во внимание тот факт, что в ЛЧД II–2 $\text{Re } n_2^2$ проявляет аномальную дисперсию, т. е. убывает с частотой (см. рис. 2.2). На фиксированной частоте условия (2.2.9) записываются в виде (при отсутствии диссипации)

$$\beta_{\text{CR}} < \beta < \beta_{\text{TIR}}, \quad (2.2.12)$$

где

$$\beta_{\text{CR}} = (\text{Re } n_2^2)^{-1/2}, \quad \beta_{\text{TIR}} = (\text{Re } n_2^2 - n_1^2)^{-1/2}. \quad (2.2.13)$$

Величина β_{TIR} имеет смысл верхнего предела только при $\text{Re } n_2^2 > 1 + n_1^2$, когда $\beta_{\text{TIR}} < 1$. В

противном случае верхним пределом является значение $\beta = 1$. Учет ненулевых потерь ($\text{Im} n_2^2 \neq 0$), как следует из (2.2.9), приводит к некоторому сужению интервалов (2.2.10) и (2.2.12). Например, при фиксированной частоте для существенности полюсов $\pm \psi_2^{(1)}$ необходимо, чтобы наряду с (2.2.12) выполнялись следующие неравенства:

$$\beta - \beta_{\text{CR}} \gg \frac{\beta_{\text{CR}}^3 |\text{Im} n_2^2|}{2}, \quad \beta_{\text{TIR}} - \beta \gg \frac{\beta_{\text{TIR}}^3 |\text{Im} n_2^2|}{2}. \quad (2.2.14)$$

Таким образом, для выполнения условий (2.2.9) относительная скорость β должна быть достаточно далека от пороговых значений β_{CR} и β_{TIR} . Аналогично можно показать, что для выполнения (2.2.9) при фиксированном β частота ω должна быть достаточно далека от пороговых значений ω_c^\pm . Отметим, что условие $\beta > \beta_{\text{CR}}$ ($\omega < \omega_c^+$) и первое из условий (2.2.14) считаются выполненными на рис. 2.4.

Чтобы найти условия захвата полюса $-\psi_2^{(1)}$, найдем угол θ_1 , при котором данный полюс лежит точно на $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. В этом случае точка $\psi = -\psi_2^{(1)}$ удовлетворяет условиям (2.2.4). Умножив оба выражения в (2.2.4) при $\psi = -\psi_2^{(1)}$ и $\theta = \theta_1$ на k_1 , получим систему для определения θ_1 :

$$\begin{cases} \text{Im} \left(i \left(k_1 - k_z^{(1)} (-s_2) \cos \theta_1 + s_2 \sin \theta_1 \right) \right) = 0, \\ \text{Re} \left(i \left(k_1 - k_z^{(1)} (-s_2) \cos \theta_1 + s_2 \sin \theta_1 \right) \right) > 0. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

При выполнении условий (2.2.9) имеют место следующие разложения:

$$s_2 \approx -\frac{\omega}{c\beta} \left[\sqrt{\text{Re} n_2^2 \beta^2 - 1} + \frac{(\text{Im} n_2^2)^2 \beta^4}{8(\text{Re} n_2^2 \beta^2 - 1)^{3/2}} + i \frac{\text{Im} n_2^2 \beta^2}{2\sqrt{\text{Re} n_2^2 \beta^2 - 1}} \right], \quad (2.2.16)$$

$$k_z^{(1)}(-s_2) \approx \frac{\omega}{c\beta} \left[\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \text{Re} n_2^2 \beta^2 + 1} + \frac{(\text{Im} n_2^2)^2 \beta^4}{8(n_1^2 \beta^2 - \text{Re} n_2^2 \beta^2 + 1)^{3/2}} - i \frac{\text{Im} n_2^2 \beta^2}{2\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \text{Re} n_2^2 \beta^2 + 1}} \right]. \quad (2.2.17)$$

Напомним, что $\text{Im} n_2^2 < 0$ в рассматриваемом ЛЧД II-2. В результате из (2.2.15) получаем

$$\begin{cases} U_1^{(0)}(\theta_1) + U_1^{(2)}(\theta_1) = 0, \\ U_1^{(1)}(\theta_1) > 0, \end{cases} \quad (2.2.18)$$

где

$$U_1^{(0)}(\theta) = k_1 \left(1 - \cos(\theta - \theta_{10}) \right), \quad (2.2.19)$$

$$U_1^{(1)}(\theta) = k_1 \frac{\beta^2 \operatorname{Im} n_2^2}{2} \frac{\sin(\theta - \theta_{10})}{\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 + 1} \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1}}, \quad (2.2.20)$$

$$U_1^{(2)}(\theta) = -\frac{\omega \beta^4 (\operatorname{Im} n_2^2)^2}{8c\beta} \left[\frac{\cos \theta}{\left(n_1^2 \beta^2 - \operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 + 1\right)^{3/2}} + \frac{\sin \theta}{\left(\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1\right)^{3/2}} \right], \quad (2.2.21)$$

$$\sin \theta_{10} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1}}{n_1 \beta}, \quad \cos \theta_{10} = \frac{\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 + 1}}{n_1 \beta}. \quad (2.2.22)$$

Верхний индекс величин $U_1^{(0,1,2)}$ означает порядок малости по параметру $\beta^2 \left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| / \left(\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1 \right) \sim \beta^2 \left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| / \left(\varepsilon_1 \beta^2 - \operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 + 1 \right) \ll 1$, а нижний индекс означает принадлежность к среде 1. Из (2.2.19) – (2.2.22) видно, что выполнены следующие свойства:

$$U_1^{(0)}(\theta_{10}) = U_1^{(1)}(\theta_{10}) = 0, \quad (2.2.23)$$

$$\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \theta}(\theta_{10}) = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial \theta^2}(\theta_{10}) = k_1, \quad \left[\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \theta}(\theta_{10}) \right]^2 = 2k_1 \left| U_1^{(2)}(\theta_{10}) \right|. \quad (2.2.24)$$

Будем рассуждать в духе метода последовательных приближений. В нулевом приближении отбросим в (2.2.18) все члены старше нулевого порядка ($\sim U_1^{(1)}$, $\sim U_1^{(2)}$). Тогда из первого уравнения (2.2.18) получим, что искомый угол $\theta_1 = \theta_{10}$, причем, поскольку в данном приближении мы положили $U_1^{(1)} = 0$, при $\theta_1 = \theta_{10}$ полюс совпадает с седловой точкой. Далее, интересуемся поправкой первого порядка малости к θ_{10} , т. е. ищем решение первого уравнения (2.2.18) в виде

$$\theta_1 = \theta_{10} + \delta\theta_1, \quad (2.2.25)$$

где $\delta\theta_1$ одного порядка малости с $U_1^{(1)}$. Подставляя (2.2.25) в (2.2.18), где теперь удерживаются все члены, и используя разложения

$$U_1^{(0)}(\theta_{10} + \delta\theta_1) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_{10}} (\delta\theta_1)^2 = \frac{k_1}{2} (\delta\theta_1)^2, \quad (2.2.26)$$

$$U_1^{(1)}(\theta_{10} + \delta\theta_1) \approx \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_{10}} \delta\theta_1, \quad (2.2.27)$$

$$U_1^{(2)}(\theta_{10} + \delta\theta_1) \approx U_1^{(2)}(\theta_{10}), \quad (2.2.28)$$

получаем из (2.2.18)

$$\begin{cases} (\delta\theta_1)^2 = 2 \left| U_1^{(2)}(\theta_{10}) \right| k_1, \\ - \left| \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \theta}(\theta_{10}) \right| \delta\theta_1 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\delta\theta_1 = - \sqrt{\frac{2}{k_1} \left| U_1^{(2)}(\theta_{10}) \right|}. \quad (2.2.29)$$

Таким образом, условие захвата полюса $-\psi_2^{(1)}$ имеют вид $\theta < \theta_1$, где θ_1 определяется формулами (2.2.25), (2.2.22) и (2.2.29). Теперь мы можем записать выражение для вкладов полюсов в случае ЛЧД II–2:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix} = 2\pi i \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P+} \\ E_{z\omega}^{b(1)P+} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P+} \end{Bmatrix} - 2\pi i \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P-} \\ E_{z\omega}^{b(1)P-} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P-} \end{Bmatrix} \Theta(\theta_1 - \theta), \quad (2.2.30)$$

где $E_{\rho\omega}^{b(1)P\pm}$, $E_{z\omega}^{b(1)P\pm}$ и $H_{\varphi\omega}^{b(1)P\pm}$ – вычеты соответствующих подынтегральных функций в полюсах $\pm\psi_2^{(1)}$:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P\pm} \\ E_{z\omega}^{b(1)P\pm} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P\pm} \end{Bmatrix} = \frac{q}{2\pi\beta c} \begin{Bmatrix} \frac{\pm s_2 k_z^{(1)}(s_2)}{g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(\pm s_2 R \sin \theta) \\ \frac{\mp i s_2^2}{\mp i s_2^2} H_0^{(1)}(\pm s_2 R \sin \theta) \\ \frac{\mp s_2 [\omega \varepsilon_1]}{c g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(\pm s_2 R \sin \theta) \end{Bmatrix} \exp(i k_z^{(1)}(s_2) R \cos \theta), \quad (2.2.31)$$

$$g_3^*(\omega) = g_3(s_2, \omega) = -\frac{\omega \varepsilon_1}{c \beta} + \varepsilon_2 k_z^{(1)}(s_2), \quad (2.2.32)$$

$\Theta(\xi)$ – функция единичного включения (Хэвисайда).

Формула (2.2.30) описывает преломленное из среды 2 в среду 1 излучение Вавилова–Черенкова. Это следует, например, из того, что, согласно граничному условию, вклады полюсов (2.2.30) «сшиваются» с излучением Вавилова–Черенкова в среде 2 (как падающим на границу раздела, так и отраженным). Это преломленное излучение имеется только в случае ЛЧД II–2, Мы будем называть его обратным черенковско-переходным излучением (ОЧПИ) по двум причинам. Во-первых, данное излучение обладает характерными особенностями как переходного излучения, так и излучения Вавилова–Черенкова. Подобно переходному, оно возникает при наличии границы раздела, а подобно черенковскому, имеет место при выполнении в среде черенковского условия ($\text{Re } s_2^2 = \text{Re } n_2^2 \beta^2 - 1 > 0$). К тому же,

термин «обратное» излучение подчеркивает его обусловленность обратным характером излучения Вавилова–Черенкова в левой среде.

Обратное черенковско-переходное излучение в вакуумной области состоит из двух типов цилиндрических волн, соответствующих вкладам полюсов $\psi_2^{(1)}$ и $-\psi_2^{(1)}$. Как следует из (2.2.31), вклад полюса $\psi_2^{(1)}$ имеет поперечную составляющую волнового вектора равную s_2 . Поскольку в ЛЧД II–2, согласно (1.3.3), для частот излучения выполнено неравенство $s_2 < 0$ (при отсутствии диссипации), то фазовая скорость \vec{V}_{ph} и вектор плотности потока энергии \vec{S} данной волны направлены к оси движения заряда. Действительно, в этом случае $V_{ph\rho} = s\omega/k_1^2 < 0$, а вектор \vec{S} сонаправлен с \vec{V}_{ph} . Аналогичным образом волна, соответствующая полюсу $-\psi_2^{(1)}$, распространяется по фазовой скорости и по потоку энергии в направлении от оси движения заряда. В области углов $\theta < \theta_1$ наблюдается интерференция этих волн.

Поскольку полюс $\psi_2^{(1)}$ захватывается при любом угле наблюдения, неравенства (2.2.10) и (2.2.12) являются необходимыми и достаточными условиями наличия ОЧПИ в среде 1. Нижний предел β_{CR} в формуле (2.2.12) – это черенковский барьер для среды 2. При $\beta < \beta_{CR}$ нарушается первое из условий (2.2.9), при этом $Re s_2^2 < 0$, и излучение Вавилова–Черенкова на данной частоте отсутствует. Верхний предел β_{TIR} в (2.2.12) связан с полным внутренним отражением (TIR = Total Internal Reflection) излучения Вавилова–Черенкова на границе раздела. Легко видеть, что при $\beta > \beta_{TIR}$ нарушается второе из условий (2.2.9), откуда следует, что $Re(k_z^{(1)}(\pm s_2))^2 < 0$. При этом преломленная волна в области $z < 0$ приобретает поверхностный характер, что и означает наличие полного внутреннего отражения волны излучения Вавилова–Черенкова от границы раздела.

В случае ЛЧД II–2 седловую точку $\psi = \theta$ нельзя считать изолированной, т. к. при выполнении условия (2.2.10) или (2.2.12) вблизи нее может оказаться полюс $-\psi_2^{(1)}$. Действительно, как было показано, в случае ненулевых потерь при $\theta = \theta_1$ полюс лежит на КНС (вблизи $\psi = \theta$), а в случае отсутствия потерь при $\theta = \theta_1 = \theta_{10}$ полюс совпадает с седловой точкой. Асимптотическое представление для интеграла вдоль КНС (первое слагаемое в (2.2.7)) в данной ситуации приведено в разделе 2.2.2. В заключение же данного раздела мы кратко рассмотрим оставшиеся диапазоны.

В диапазонах I–1, I–3 и I–4 картина комплексной плоскости ψ представлена на рис. 2.5. В аналогичных диапазонах случая II (II–1, II–3 и II–4) вид плоскости ψ и дальнейший анализ качественно не отличаются от случая I. Как уже отмечалось, в этих диапазонах нет «существенных» полюсов (в смысле условия (2.1.19)), поэтому асимптотика свободного поля представляет собой сферическую волну переходного излучения (2.2.6). Как

видно из рис. 2.5, при определенных условиях трансформация $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ в $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ приводит к появлению интегралов вдоль разрезов и, следовательно, к интегралам вдоль контуров, аналогичных $\Gamma_{b_2}^{\pm}$ на рис. 2.4. Как уже отмечалось, такие интегралы в любом случае не удовлетворяют условию существенности (2.1.19) и не учитываются в асимптотике.

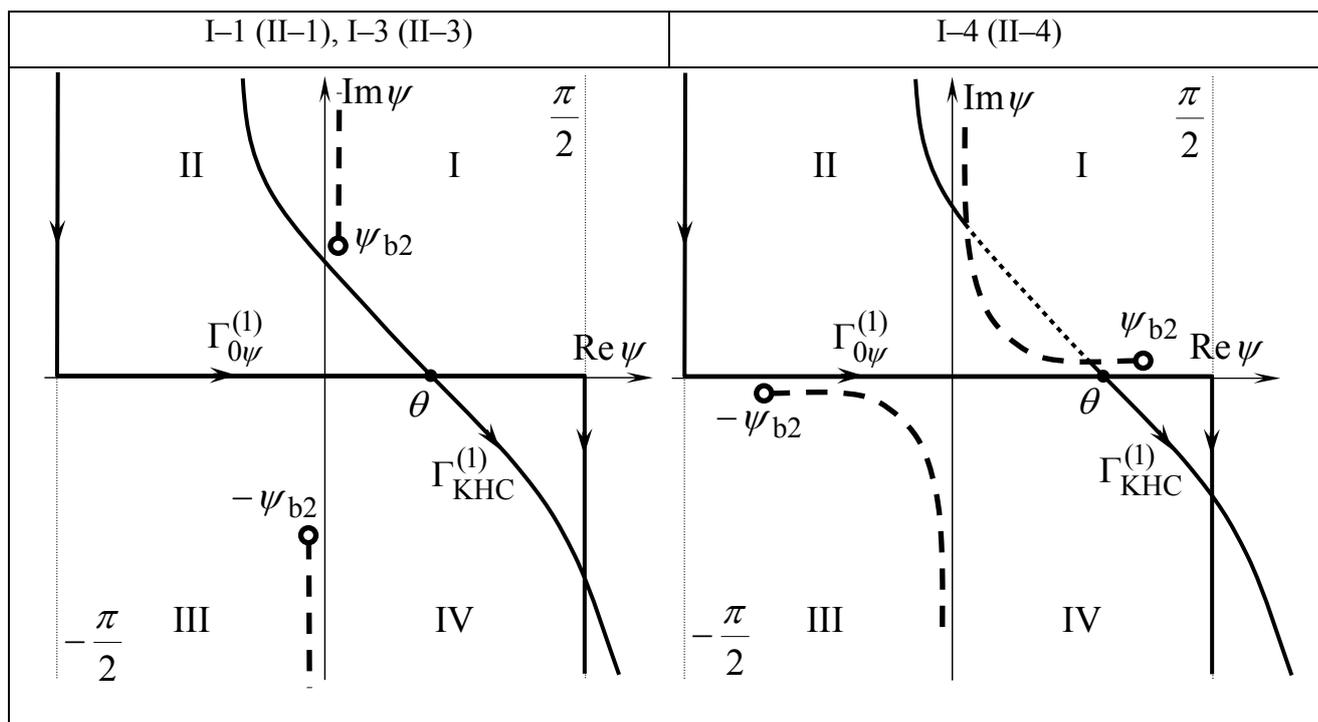


Рис. 2.5. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 1 ($z < 0$) в случае диапазонов I-1 (II-1), I-3 (II-3) и I-4 (II-4). Римские цифры означают четверти исходной плоскости k_ρ . Значком \bullet отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, существенных полюсов в данных диапазонах нет. Контур $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ , $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ – контур наискорейшего спуска, $\psi = \theta$ – седловая точка. Часть контура $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$, показанная мелким пунктиром (точками), лежит на листе римановой поверхности с $\text{Im } k_z^{(2)} < 0$.

2.2.2. Равномерные асимптотики

Как уже отмечалось, в случае ЛЧД II-2 при условии (2.2.10) или (2.2.12) вблизи седловой точки θ может оказаться полюс $-\psi_2^{(1)}$, следовательно, её нельзя считать изолированной. В такой ситуации для интеграла вдоль КНС в (2.2.7) можно получить равномерное

асимптотическое представление (см. [92]), которое верно при $\Omega_1 \gg 1$, $1/\sqrt{\Omega_1} \ll \theta < \pi/2$ независимо от расстояния между седловой точкой и указанным полюсом. В результате представление (2.2.7) принимает следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(1)S} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(1)P} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.33)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(1)S} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ E_{z\omega}^{b(1)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} + \exp(ik_1 R) \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_1}} \frac{1}{b_1} \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(1)} \\ a_{z\omega}^{(1)} \\ a_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(1)P} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix} \pm 2i\sqrt{\pi} \exp(ik_1 R) \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(1)} \\ a_{z\omega}^{(1)} \\ a_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \exp(-\Omega_1 b_1^2) Q(\pm i b_1 \sqrt{\Omega_1}), \quad (2.2.35)$$

$$\begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(1)} \\ a_{z\omega}^{(1)} \\ a_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} = -\frac{q}{2\pi\beta c} \sqrt{\frac{2}{-\pi s_2 R \sin\theta}} \begin{Bmatrix} \frac{s_2 k_z^{(1)}(-s_2) \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)}{g_3^*(\omega)} \\ \frac{is_2^2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{g_3^*(\omega)} \\ \frac{s_2 \omega \varepsilon_1 \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)}{c g_3^*(\omega)} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.36)$$

$$b_1 = \sqrt{\varphi_1(\theta) - \varphi_1(-\psi_2^{(1)})}, \quad (2.2.37)$$

$$Q(y) = \int_y^\infty \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (2.2.38)$$

$\text{Re} \sqrt{-\pi s_2 R \sin\theta} > 0$, величины $E_{\rho\omega}^{b(1)S}$, $E_{z\omega}^{b(1)S}$ и $H_{\varphi\omega}^{b(1)S}$ описываются формулой (2.2.6), величины $E_{\rho\omega}^{b(1)P}$, $E_{z\omega}^{b(1)P}$ и $H_{\varphi\omega}^{b(1)P}$ – формулой (2.2.30). В формуле (2.2.37) $\arg b_1$ определен так, чтобы $b_1 \rightarrow (-\psi_2^{(1)} - \theta)/h_1$ при $-\psi_2^{(1)} \rightarrow \theta$. Знак «+» в формуле (2.2.35) следует брать при $\text{Im} b_1 > 0$, а знак «-» – при $\text{Im} b_1 < 0$.

Величины (2.2.34) зависят от расстояния $\sim 1/R$ и описывают сферическую волну переходного излучения. Благодаря наличию второго слагаемого в (2.2.34) величины $\tilde{E}_{\rho\omega}^{b(1)S}$, $\tilde{E}_{z\omega}^{b(1)S}$ и $\tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(1)S}$ остаются конечными даже в том случае, когда седловая точка $\psi = \theta$ совпадает с полюсом $-\psi_2^{(1)}$. Величины (2.2.35) имеют зависимость от расстояния $\sim 1/\sqrt{R \sin\theta} = 1/\sqrt{\rho}$ и описывают цилиндрические волны обратного черенковско-

переходного излучения (ОЧПИ). Второе слагаемое в (2.2.35) компенсирует скачкообразное «включение» вклада полюса $-\psi_2^{(1)}$ при $\theta = \theta_1$ (см. формулу (2.2.30)). Действительно, из определения b_1 и системы (2.2.14) следует, что $\text{Im} b_1$ обращается в нуль как раз в том случае, когда полюс $-\psi_2^{(1)}$ лежит точно на $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$, т. е. при $\theta = \theta_1$. Фиксация ветви $b_1(\omega)$ обеспечивает положительность $\text{Im} b_1$ при $\theta < \theta_1$, когда полюс находится правее КНС и захватывается при трансформации (см. рис. 2.4). Пользуясь свойством $Q(y) + Q(-y) = \sqrt{\pi}$ [92], нетрудно показать, что скачок второго слагаемого в (2.2.35) при изменении $\text{Im} b_1$ от положительных к отрицательным величинам в точности равен второму слагаемому в (2.2.30).

При определенных условиях равномерная асимптотика (2.2.33) упрощается. Если $|b_1 \sqrt{\Omega_1}| \gg 1$, то функцию $Q(\pm i b_1 \sqrt{\Omega_1})$ можно разложить в ряд (см., например [92, 94]). В результате

$$\pm 2i \sqrt{\pi} \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(1)} \\ a_{z\omega}^{(1)} \\ a_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \exp(-\Omega_1 b_1^2) Q(\pm i b_1 \sqrt{\Omega_1}) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{\Omega_1}} \frac{1}{b_1} \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(1)} \\ a_{z\omega}^{(1)} \\ a_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \left(1 + O(1/b_1^2 \Omega_1)\right), \quad (2.2.39)$$

следовательно

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ E_{z\omega}^{b(1)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix}, \quad (2.2.40)$$

где первое и второе слагаемые описываются формулами (2.2.6) и (2.2.30) соответственно. Асимптотика (2.2.40) справедлива только при выполнении неравенства $|b_1 \sqrt{\Omega_1}| \gg 1$, т. е. когда полюс $-\psi_2^{(1)}$ достаточно далек от седловой точки $\psi = \theta$. В противоположность равномерной асимптотике (2.2.33) будем называть (2.2.40) «неравномерной» асимптотикой. Таким образом, в случае ЛЧД II–2 поле в дальней зоне в общем случае представляется в виде суммы сферических волн переходного излучения и цилиндрических волн ОЧПИ. При выполнении неравенства $|b_1 \sqrt{\Omega_1}| \gg 1$ это представление имеет сравнительно простой вид (2.2.40). При выполнении обратного неравенства $|b_1 \sqrt{\Omega_1}| \lesssim 1$ или

$$|b_1^2 \Omega_1| \lesssim 1 \quad (2.2.41)$$

выражения для сферических волн (2.2.34) и цилиндрических волн (2.2.35) имеют более сложный вид. Соответствующая равномерная асимптотика (2.2.33) корректно описывает поведение поля в области, где происходит переход от наличия волн ОЧПИ, распространяющихся в направлении от оси движения заряда и соответствующих вкладу

полюса $-\psi_2^{(1)}$, к их отсутствию. При фиксированных значениях β и ω неравенство (2.2.41) определяет пространственную область, внутри которой происходит указанный переход. Мы назовем эту пространственную область областью «полутени». Оценим ее границы по углу θ и расстоянию R . Для этого запишем интересующую нас функцию $b_1^2 \Omega_1$ в следующем виде:

$$b_1^2 \Omega_1 = i [k_1 R - k_z^{(1)}(-s_2) R \cos \theta + s_2 R \sin \theta] = i R [U_1^{(0)}(\theta) + U_1^{(2)}(\theta)] + R U_1^{(1)}(\theta), \quad (2.2.42)$$

где величины $U_1^{(0,1,2)}$ определены формулами (2.2.19) – (2.2.22).

Прежде всего, исследуем зависимость $|b_1^2 \Omega_1|$ от угла θ . Покажем, что $|b_1^2 \Omega_1|$ имеет минимум при $\theta = \theta_{10}$ по крайней мере с точностью до членов первого порядка малости. Прежде всего, заметим, что член нулевого порядка малости в (2.2.42) имеет минимум при указанном угле, т. к., согласно (2.2.19), $U_1^{(0)}(\theta) \geq 0$ при $0 < \theta < \pi/2$ и $U_1^{(0)}(\theta_{10}) = 0$. Будем искать поправку первого порядка малости к углу θ_{10} . Для этого рассмотрим уравнение на экстремум функции $|b_1^2 \Omega_1|$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} |b_1^2 \Omega_1| &= \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{R^2 [U_1^{(0)}(\theta) + U_1^{(2)}(\theta)]^2 + R^2 [U_1^{(1)}(\theta)]^2} \sim \\ &\sim [U_1^{(0)}(\theta) + U_1^{(2)}(\theta)] \left(\frac{\partial U_1^{(0)}(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_1^{(2)}(\theta)}{\partial \theta} \right) + U_1^{(1)}(\theta) \frac{\partial U_1^{(1)}(\theta)}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

Решение (2.3.43) будем искать в виде $\theta_{1\min} = \theta_{10} + \delta\theta_{1\min}$, где $\delta\theta_{1\min}$ одного порядка малости с $U_1^{(1)}$. Подставляя данное выражение в (2.2.43), отбрасывая все члены старше первого порядка ($\sim U_1^{(2)}$, $\sim \partial U_1^{(2)}/\partial \theta$, $\sim U_1^{(1)} \partial U_1^{(1)}/\partial \theta$), и используя (2.2.23), (2.2.24), (2.2.26) – (2.2.28), а также аналогичные разложения для производных, получаем:

$$\left[\frac{k_1^2}{2} (\delta\theta_{1\min})^2 + k_1 |U_1^{(2)}(\theta_{10})| \right] \delta\theta_{1\min} = 0. \quad (2.2.44)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках (2.2.44) положительно, то искомая поправка $\delta\theta_{1\min} = 0$, поэтому $\theta_{1\min} = \theta_{10}$, что и требовалось доказать.

Найдем максимальное расстояние R_1 , на котором при $\theta = \theta_{1\min} = \theta_{10}$ выполняется равенство

$$|b_1^2 \Omega_1| \Big|_{\theta=\theta_{10}, R=R_1} = 1. \quad (2.2.45)$$

Используя (2.2.42) и (2.2.23), получаем

$$R_1 = \frac{1}{|U_1^{(2)}(\theta_{10})|} = \frac{8(n_1^2 \beta^2 - \text{Re} n_2^2 \beta^2 + 1)(\text{Re} n_2^2 \beta^2 - 1)}{k_1 \beta^4 (\text{Im} n_2^2)^2}. \quad (2.2.46)$$

Введенное таким образом R_1 определяет по порядку величины максимальный размер области «полутени» (2.2.41). Как видно из (2.2.46), $R_1 \sim k_1^{-1}(\text{Im}n_2^2)^{-2}$, поэтому при достаточно малых потерях следует ожидать достаточно больших значений R_1 в масштабе длины волны $2\pi k_1^{-1}$.

При $R \gg R_1$ во всем диапазоне углов $1/\sqrt{\Omega_1} \ll \theta < \pi/2$ выполнено условие применимости разложения (2.2.39) и равномерная асимптотика (2.2.33) совпадает с неравномерной (2.2.40). Отметим, что поправку $\delta\theta_1$ (2.2.29) удобно выразить через R_1 :

$$\delta\theta_1 = -\sqrt{\frac{2}{R_1 k_1}}. \quad (2.2.47)$$

Найдем теперь угловые размеры области «полутени» (2.2.41) при $R \lesssim R_1$. Поскольку при $\theta = \theta_{10}$ имеется минимум функции $|b_1^2 \Omega_1|$, будем искать приращение $\Delta\theta_1(R)$ к θ_{10} , при котором выполняется равенство $|b_1^2 \Omega_1| = 1$. Величина $\Delta\theta_1(R)$ удовлетворяет уравнению

$$R^2[U_1^{(0)}(\theta_{10} + \Delta\theta_1) + U_1^{(2)}(\theta_{10} + \Delta\theta_1)]^2 + R^2[U_1^{(1)}(\theta_{10} + \Delta\theta_1)]^2 = 1. \quad (2.2.48)$$

Считая $\Delta\theta_1(R)$ величиной первого порядка малости ($\sim U_1^{(1)}$), воспользуемся разложениями (2.2.26) – (2.2.28) и свойствами (2.2.23), (2.2.24), после чего уравнение (2.2.48) принимает вид

$$\frac{k_1^2}{4}(\Delta\theta_1)^4 + \frac{k_1}{R_1}(\Delta\theta_1)^2 + \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\Delta\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{k_1 R} \left(1 - \frac{R}{R_1}\right)}, \quad (2.2.49)$$

причем $\Delta\theta_1(R_1) = 0$. Таким образом, искомая область «полутени» определяется следующими неравенствами:

$$|\theta - \theta_{10}| \lesssim \Delta\theta_1, \quad R \lesssim R_1. \quad (2.2.50)$$

Внутри области «полутени» для описания поля в дальней зоне ($\Omega_1 = k_1 R \gg 1$) необходимо пользоваться равномерной асимптотикой (2.2.33). Вне области «полутени», т. е. когда выполнено либо неравенство $R \gg R_1$, либо неравенство $|\theta - \theta_{10}| \gg \Delta\theta_1$ поле в дальней зоне описывается неравномерной асимптотикой (2.2.40).

2.3. Асимптотики поля в левой среде

Рассмотрим теперь поле в среде 2 ($z > 0$), при этом угол θ меняется в пределах $\pi/2 < \theta < \pi$. Как уже отмечалось, мы учитываем малые потери в этой среде. Как было показано в разделе 2.3, наибольший интерес представляют диапазоны I–2 (ПЧД) и II–2 (ЛЧД), так как в них имеются существенные полюса на плоскости k_ρ и ψ . Поэтому в данном разделе мы рассмотрим и сравним асимптотики поля только в этих двух диапазонах. Будем учитывать ненулевые потери, $\text{Im} n_2^2 \neq 0$, при этом при выполнении условий (2.1.21) справедливо следующее неравенство:

$$\left| \text{Im} n_2^2 \right| \ll \text{Re} n_2^2. \quad (2.3.1)$$

В целом ход получения асимптотик аналогичен вышеизложенному случаю среды 1, поэтому там, где это не мешает ясности изложения, мы будем отмечать только существенные отличия от случая среды 1.

Как обычно, введем новую комплексную переменную интегрирования ψ , такую что $k_\rho = k_2 \sin \psi$, при этом $k_z^{(2)} = k_2 \cos \psi$. Характерный вид комплексной плоскости ψ для случаев ПЧД I–2 и ЛЧД II–2 представлен на рис. 2.6. Контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 . Полюса $\pm s_2$ переходят в $\pm \psi_2^{(2)}$ ($\sin \psi_2^{(2)} = k_2^{-1} s_2$), точки ветвления $\pm k_2$ исчезают, а точки ветвления $\pm k_1$ переходят в $\pm \psi_{b1}$ ($\sin \psi_{b1} = k_2^{-1} k_1$).

Далее аналогично (2.3.1) получаем

$$\begin{pmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\phi\omega}^{b(2)} \end{pmatrix} = \int_{\Gamma_{0\psi}^{(2)}} \begin{pmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^{(1)}(R k_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_0^{(1)}(R k_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_1^{(1)}(R k_2 \sin \theta \sin \psi) \end{pmatrix} \exp(i R k_2 \cos(\pi - \theta) \cos \psi) d\psi, \quad (2.3.2)$$

$$\begin{pmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{pmatrix} = \frac{q}{2\pi\beta c} \begin{pmatrix} c[\omega\varepsilon_2]^{-1} (k_2 \sin \psi)^2 k_2 \cos \psi \\ i c[\omega\varepsilon_2]^{-1} (k_2 \sin \psi)^3 \\ (k_2 \sin \psi)^2 \end{pmatrix} B^{(2)}(k_2 \sin \psi, \omega). \quad (2.3.3)$$

Используя асимптотику функций Ханкеля, представим подынтегральные выражения в (2.4.2) в следующем виде (с точностью до множителя):

$$\begin{pmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\phi\omega}^{b(2)} \end{pmatrix} \sim \int_{\Gamma_{0\psi}^{(2)}} \begin{pmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{pmatrix} \exp(\Omega_2 \varphi_2(\psi)) d\psi, \quad \Omega_2 = |k_2| R, \quad (2.3.4)$$

$$\varphi_2(\psi) = i \exp(i \arg k_2) \cos(\psi - (\pi - \theta)).$$

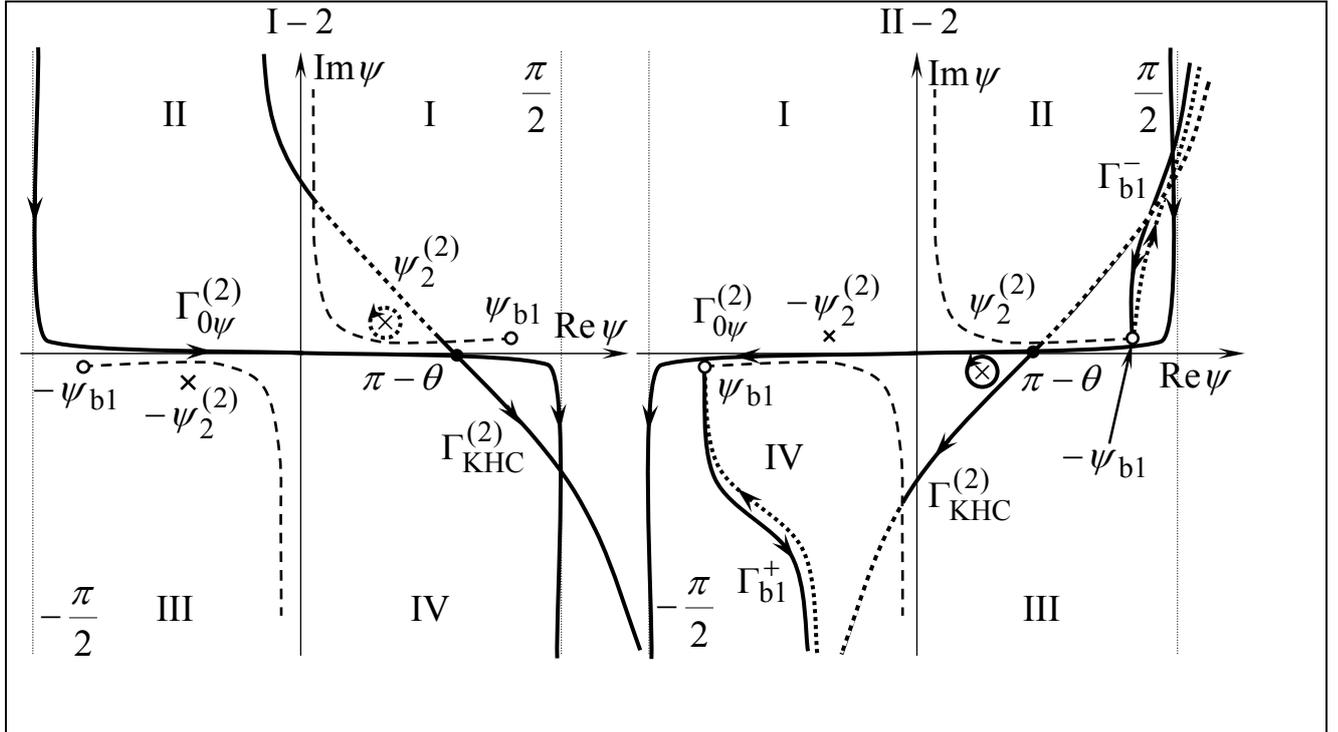


Рис. 2.6. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 2 ($z > 0$) в случае ПЧД I-2 и ЛЧД II-2. Римские цифры означают четверти исходной плоскости k_ρ . Значком \odot отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значком \times показаны полюса $\pm \psi_2^{(2)}$. Контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ , $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ – контур наискорейшего спуска, $\psi = \pi - \theta$ – седловая точка. Части контуров $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ и $\Gamma_{\text{б1}}^\pm$, а также контур, охватывающий полюс $\psi_2^{(2)}$, показанные мелким пунктиром (точками), лежат на листе римановой поверхности с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$.

Контур наискорейшего спуска $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$, проходящий через седловую точку $\psi_{\text{S2}} = \pi - \theta$ и удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{cases} \text{Im} \varphi_2(\psi) = \text{Im} \varphi_2(\pi - \theta), \\ \text{Re} \varphi_2(\psi) - \text{Re} \varphi_2(\pi - \theta) < 0, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

показан на рис. 2.6.

После трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ в $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ (рис. 2.6) получаем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{\text{b}(2)} \\ E_{z\omega}^{\text{b}(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{\text{b}(2)} \end{Bmatrix} &\approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ E_{z\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ H_{\varphi\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{\text{b}(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{\text{b}(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{\text{b}(2)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_0^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \end{Bmatrix} \times \\ &\times \exp(iRk_2 \cos(\pi - \theta) \cos \psi) d\psi, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

причем вид первого слагаемого (вклада полюса) зависит от того, какой частотный диапазон рассматривается. В случае ПЧД I–2 имеем

$$\begin{cases} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \begin{cases} -i\pi\varepsilon_2^{-1}s_2 H_1^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \\ \frac{\pi\beta c s_2^2}{\omega\varepsilon_2} H_0^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \\ -i\pi\beta s_2 H_1^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \end{cases} \exp\left(\frac{i\omega R \cos\theta}{c\beta}\right) \Theta(\pi - \theta - \theta_2), \quad (2.3.7)$$

а в случае ЛЧД II–2 получаем

$$\begin{cases} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \begin{cases} \frac{i\pi s_2}{\varepsilon_2 g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \\ \frac{\pi\beta c s_2^2}{\omega\varepsilon_2 g_3^*(\omega)} H_0^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \\ \frac{-i\pi\beta s_2}{g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(s_2 R \sin\theta) \end{cases} \exp\left(\frac{-i\omega R \cos\theta}{c\beta}\right) \times \\ \times \left(\varepsilon_2 k_z^{(1)}(s_2, \omega) + \omega\varepsilon_1 (c\beta)^{-1}\right) \Theta(\pi - \theta - \theta_2), \quad (2.3.8)$$

где

$$\theta_2 = \theta_{20} + \delta\theta_2, \quad (2.3.9)$$

$$\sin\theta_{20} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}n_2^2 \beta^2 - 1}}{\sqrt{\operatorname{Re}n_2^2 \beta^2}}, \quad \cos\theta_{20} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}n_2^2 \beta^2}}, \quad (2.3.10)$$

$$\delta\theta_2 = \sqrt{\frac{(\operatorname{Im}n_2^2)^2}{4(\operatorname{Re}n_2^2)^2 (\operatorname{Re}n_2^2 \beta^2 - 1)}}, \quad (2.3.11)$$

В формуле (2.3.6) оставлены только вклады, удовлетворяющие условию существенности (2.1.19) – сферические и цилиндрические волны.

Процедура нахождения угла θ_2 (2.3.9) полностью аналогична процедуре нахождения угла θ_1 (2.2.25). Угол θ_2 определяется тем условием, что при $\pi - \theta = \theta_2$ полюс $\psi_2^{(2)}$ лежит точно на КНС, т. е. θ_2 удовлетворяет системе (2.3.5), которую можно записать в следующем виде (для определенности рассмотрим случай ЛЧД II–2):

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \left[i \left(k_2 + \frac{\omega}{c\beta} \cos\theta_2 - s_2 \sin\theta_2 \right) \right] = 0, \\ \operatorname{Re} \left[i \left(k_2 + \frac{\omega}{c\beta} \cos\theta_2 - s_2 \sin\theta_2 \right) \right] > 0, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

где учтено, что в случае ЛЧД II–2 $k_z^{(2)}(s_2) = -\omega(c\beta)^{-1}$. Вклад этого полюса будет существенным при выполнении первого из условий (2.2.9)

$$\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1 \gg \left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| \beta^2,$$

которое при $\left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| \rightarrow 0$ записывается в виде

$$\beta > \beta_{\text{CR}}, \quad (2.3.13)$$

где β_{CR} определено формулой (2.2.13). При наличии диссипации для существенности вклада полюса необходимо, чтобы наряду с (2.3.13) выполнялось первое из условий (2.2.14). При этом систему (2.3.12) можно представить в виде, аналогичном (2.2.18):

$$\begin{cases} U_2^{(0)}(\theta_2) + U_2^{(2)}(\theta_2) = 0, \\ U_2^{(1)}(\theta_2) > 0, \end{cases} \quad (2.3.14)$$

$$U_2^{(0)}(\theta) = -\frac{\omega \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2}}{c} \left(1 - \cos(\pi - \theta - \theta_{20}) \right), \quad (2.3.15)$$

$$U_2^{(1)}(\theta) = \frac{\omega \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2} \beta \operatorname{Im} n_2^2}{2c} \frac{\sin \theta_{20} - \sin(\pi - \theta)}{\sqrt{\operatorname{Re} n_2^2} \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1}}, \quad (2.3.16)$$

$$U_2^{(2)}(\theta) = \frac{\omega \beta^3 (\operatorname{Im} n_2^2)^2 \sin(\pi - \theta)}{c 8 (\operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 - 1)^{3/2}} - \frac{\omega (\operatorname{Im} n_2^2)^2}{c 8 (\operatorname{Re} n_2^2)^{3/2}}, \quad (2.3.17)$$

где верхний индекс величин $U_2^{(0,1,2)}$ означает порядок малости по параметру $\left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| / \operatorname{Re} n_2^2 \sim \left| \operatorname{Im} n_2^2 \right| / (\operatorname{Re} n_2^2 - \beta^{-2}) \ll 1$, а нижний индекс означает принадлежность к среде 2. Нетрудно видеть, что выполнены следующие свойства:

$$U_2^{(0)}(\pi - \theta_{20}) = U_2^{(1)}(\pi - \theta_{20}) = 0, \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \theta}(\pi - \theta_{20}) = 0, \quad \frac{\partial^2 U_2^{(0)}}{\partial \theta^2}(\pi - \theta_{20}) = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2}, \quad (2.3.19)$$

$$\left[\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \theta}(\pi - \theta_{20}) \right]^2 = 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{\operatorname{Re} n_2^2} U_2^{(2)}(\pi - \theta_{20}). \quad (2.3.20)$$

Рассуждая в духе метода последовательных приближений, можно показать, что решением (2.3.14) будет угол θ_2 , определенный согласно (2.3.9) – (2.3.11).

Можно также показать, что в случае ПЧД I–2 имеет место равенство

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ E_{z\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ H_{\phi\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{\text{q}(2)} \\ E_{z\omega}^{\text{q}(2)} \\ H_{\phi\omega}^{\text{q}(2)} \end{Bmatrix} \exp\left(i \frac{\omega z}{c\beta}\right) \Theta(\pi - \theta - \theta_2), \quad (2.3.21)$$

откуда видно, что в этом диапазоне вклад полюса $\psi_2^{(2)}$ компенсирует вынужденное поле (1.1.2) при углах $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_2$. В результате в среде 2 вынужденное поле (а также соответствующее ему излучение Вавилова–Черенкова) существует внутри конуса $\theta > \pi - \theta_2$ (напомним, что угол θ отсчитывается от отрицательного направления оси z , см. рис. 2.1). Также можно показать, что такой компенсации в случае ЛЧД II–2 не происходит. Физически это связано с тем, что в этом диапазоне величины $E_{\rho\omega}^{b(2)P}$, $E_{z\omega}^{b(2)P}$ и $H_{\varphi\omega}^{b(2)P}$ описывают ОЧПИ в среде 2 – отраженное от границы излучение Вавилова–Черенкова, имеющее обратный характер. ОЧПИ в среде 2 существенно в том случае, если выполнено условие (2.3.13), т.е. имеется излучение Вавилова–Черенкова.

Как в случае ПЧД I–2, так и в случае ЛЧД II–2 оказывается, что полюс $\psi_2^{(2)}$ может находиться вблизи седловой точки $\psi_{S2} = \pi - \theta$. Для интегралов вдоль $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ (2.3.7) можно получить равномерные асимптотические выражения [92] аналогично случаю среды 1, в результате имеем:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(2)S} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(2)P} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix}, \quad (2.3.22)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(2)S} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} + \exp(ik_2 R) \sqrt{\frac{\pi}{\Omega_2}} \frac{1}{b_2} \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(2)} \\ a_{z\omega}^{(2)} \\ a_{\varphi\omega}^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad (2.3.23)$$

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} \approx \frac{2 \exp(-i\pi/4)}{k_2 \sin \theta} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\pi - \theta, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\pi - \theta, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(2)}(\pi - \theta, \omega) \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_2 R)}{R}, \quad (2.3.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{E}_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{b(2)P} \\ \tilde{H}_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix} \pm 2i\sqrt{\pi} \begin{Bmatrix} a_{\rho\omega}^{(2)} \\ a_{z\omega}^{(2)} \\ a_{\varphi\omega}^{(2)} \end{Bmatrix} \exp(-\Omega_2 b_2^2) Q(\pm ib_2 \sqrt{\Omega_2}), \quad (2.3.25)$$

$$b_2(\omega) = \sqrt{\varphi_2(\pi - \theta) - \varphi_2(\psi_2^{(2)})}, \quad (2.3.26)$$

функция $Q(y)$ определена формулой (2.2.38). В (2.3.26) $\arg b_2$ определен так, чтобы $b_2 \xrightarrow{\psi_2^{(2)} \rightarrow \pi - \theta} (\psi_2^{(2)} - \pi + \theta)/h_2$, где $h_2 = \sqrt{-2/\varphi_2''(\pi - \theta)}$, $\arg h_2 = \arg(d\psi)|_{\psi = \pi - \theta}$, $d\psi$ – элемент вдоль $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$. Величины $a_{\rho\omega}^{(2)}$, $a_{z\omega}^{(2)}$ и $a_{\varphi\omega}^{(2)}$ в случае ПЧД I–2 определены формулами

$$\begin{cases} a_{\rho\omega}^{(2)} \\ a_{z\omega}^{(2)} \\ a_{\varphi\omega}^{(2)} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi s_2 R \sin\theta}} \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{s_2}{\varepsilon_2} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) \\ i\beta c s_2^2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \\ \beta s_2 \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}, \quad (2.3.27)$$

а в случае ЛЧД II–2 формулами

$$\begin{cases} a_{\rho\omega}^{(2)} \\ a_{z\omega}^{(2)} \\ a_{\varphi\omega}^{(2)} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi s_2 R \sin\theta}} \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{s_2}{\varepsilon_2} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) \\ -i\beta c s_2^2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \\ -\beta s_2 \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases} \frac{\varepsilon_2 k_z^{(1)}(s_2, \omega) + \frac{\omega\varepsilon_1}{c\beta}}{g_3^*(\omega)}, \quad (2.3.28)$$

причем $\operatorname{Re}\sqrt{s_2} > 0$. Аналогично (2.2.35) знак «+» в формуле (2.3.25) следует брать при $\operatorname{Im}b_2 > 0$, а знак «−» – при $\operatorname{Im}b_2 < 0$. Формула (2.3.22) справедлива при $\Omega_2 \gg 1$ в диапазоне углов $\theta > \pi/2$, $\pi - \theta \gg 1/\sqrt{\Omega_2}$. Величины (2.3.23) за счет второго слагаемого остаются конечными даже при совпадении седловой точки и полюса. Определение функции b_2 (2.3.25) обеспечивает отрицательность ее мнимой части в случаях, когда при трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(2)} \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ происходит захват полюса $\psi_2^{(2)}$, т. е. при углах $\pi - \theta > \theta_2$ (см. рис. 2.6). Формула (2.3.25) в случае ПЧД I–2 описывает непрерывный переход от наличия волны излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) к ее отсутствию, а в случае ЛЧД II–2 – переход от наличия волны отраженного ОЧПИ к ее отсутствию.

Оценим размеры области «полутени», внутри которой происходят описанные переходы. Для определенности рассмотрим случай ЛЧД II–2. Область «полутени» в среде 2, аналогично среде 1, определим неравенством $|b_2\sqrt{\Omega_2}| \lesssim 1$, или

$$|b_2^2 \Omega_2| \lesssim 1. \quad (2.3.29)$$

Функция $b_2^2 \Omega_2$ может быть записана в виде:

$$b_2^2 \Omega_2 = i \left[k_2 R + \frac{\omega}{c\beta} R \cos(\pi - \theta) - s_2 R \sin(\pi - \theta) \right] = i R [U_2^{(0)}(\theta) + U_2^{(2)}(\theta)] + R U_1^{(1)}(\theta), \quad (2.3.30)$$

где величины $U_2^{(0,1,2)}$ определены формулами (2.3.15) – (2.3.17). Далее, нетрудно показать, что $|b_2^2 \Omega_2|$ имеет минимум по углу θ при $\theta = \pi - \theta_{20}$. Величина R_2 , определяющая по

порядку величины максимальный радиальный размер области «полутени», удовлетворяет равенству

$$|b_2^2 \Omega_2| \Big|_{\theta=\pi-\theta_{20}, R=R_2} = 1, \quad (2.3.31)$$

откуда

$$R_2 = \frac{1}{U_2^{(2)}(\pi-\theta_{20})} = \frac{8(\text{Re} n_2^2)^2 (\text{Re} n_2^2 \beta^2 - 1)}{\omega c^{-1} \sqrt{\text{Re} n_2^2} (\text{Im} n_2^2)^2}. \quad (2.3.32)$$

Как видно из (2.3.32), при достаточно малых потерях размер области «полутени» в масштабе длины волны может быть весьма большим. Заметим, что с учетом (2.3.32), выражение для $\delta\theta_2$ (2.3.11) можно записать в более удобном виде:

$$\delta\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{R_2 \omega c^{-1} \sqrt{\text{Re} n_2^2}}}. \quad (2.3.33)$$

Угловые размеры области «полутени» определяются аналогично случаю среды 1 (см. формулы (2.2.46), (2.2.47)). В результате, искомая область определяется следующими неравенствами:

$$|\pi - \theta - \theta_{20}| \lesssim \Delta\theta_2, \quad R \lesssim R_2, \quad (2.3.34)$$

где

$$\Delta\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{R} \left| \frac{\partial^2 U_2^{(0)}(\pi - \theta_{20})}{\partial \theta^2} \right|^{-1} \left(1 - \frac{R}{R_2} \right)} = \sqrt{\frac{2}{\omega c^{-1} \sqrt{\text{Re} n_2^2} R} \left(1 - \frac{R}{R_2} \right)}, \quad (2.3.35)$$

причем $\Delta\theta_2(R_2) = 0$. Вне области «полутени» (2.3.34), т. е. при выполнении неравенства $R \gg R_2$ или неравенства $|\pi - \theta - \theta_{20}| \gg \Delta\theta_2$, свободное поле в дальней зоне ($\Omega_2 = |k_2| R \gg 1$) описывается неравномерной асимптотикой

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix}, \quad (2.3.36)$$

представляющей собой сумму сферической волны переходного излучения и (в случае ЛЧД II–2) цилиндрической волны отраженного ОЧПИ. Внутри области «полутени» (при выполнении неравенств (2.3.34)) для поля в дальней зоне верно асимптотическое представление (2.3.22), и выражения для сферической и цилиндрической волн имеют несколько более сложный вид.

2.4. Влияние потерь в левой среде на поле излучения

В данном разделе мы проанализируем влияние потерь в среде 2 (при построении асимптотик потери в среде 1 не учитывались) на Фурье-гармоники поля излучения, а именно, сферические волны переходного излучения и цилиндрические волны излучения Вавилова–Черенкова и обратного черенковско-переходного излучения. Для этого, прежде всего, необходимо рассмотреть ситуацию, когда диссипация в среде 2 пренебрежимо мала.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда частота лежит в диапазоне (2.2.10) внутри ЛЧД П–2. Асимптотика свободного поля в среде 1 описывается формулами (2.2.33) – (2.2.35), причем в данном полупространстве свободное поле определяет полное поле. В среде 2 асимптотика свободного поля описывается формулами (2.3.22) – (2.3.25), а полное поле в этом случае определяется суммой свободного и вынужденного полей. Структура Фурье-гармоники полного поля в рассматриваемом случае представлена на рис. 2.7.

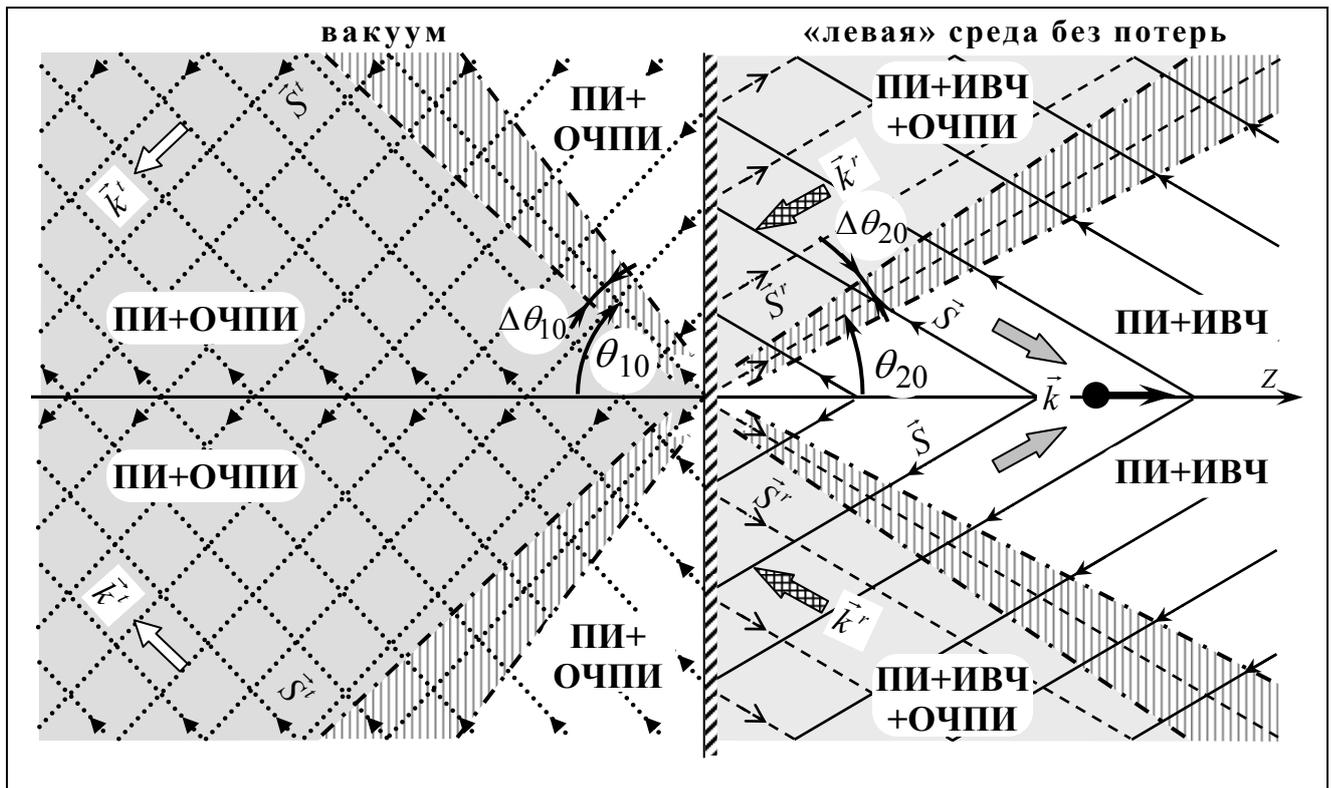


Рис. 2.7. Пространственная структура Фурье-гармоники электромагнитного поля в случае границы раздела вакуум – левая среда без потерь. Частота Фурье-гармоники лежит внутри интервала (2.3.10). Линии \longrightarrow параллельны вектору Пойтинга \vec{S} ИВЧ, линии \dashrightarrow – вектору Пойтинга \vec{S}^r ОЧПИ в среде (отраженного ИВЧ), линии $\cdots\rightarrow\cdots$ – вектору Пойтинга \vec{S}^t вакуумного ОЧПИ (преломленного ИВЧ), \vec{k} , \vec{k}^r и \vec{k}^t – волновые вектора, соответственно, волны ИВЧ, волны отраженного ОЧПИ и волны преломленного ОЧПИ. В затененных областях наблюдается интерференция цилиндрических волн. Области «полутени» показаны штриховкой.

В случае отсутствия диссипации имеем $\varepsilon_2'' = 0$, $\mu_2'' = 0$, $\text{Im} n_2^2 = 0$. Величины s_2 , k_1 и k_2 вещественны, и в указанных Фурье-гармониках, как следует из формул (2.2.34), (2.2.35), (2.3.23), (2.3.25), отсутствует экспоненциальное убывание. В этом случае мы будем говорить, что область их существования не ограничена по расстоянию (как будет видно в дальнейшем, такое ограничение появится естественным образом при учете потерь). На рис. 2.7 области существования цилиндрических волн, соответствующих различным видам излучения, показаны с помощью линий, параллельных вектору Пойтинга. Существование сферических волн переходного излучения (ПИ) в различных областях отмечено с помощью принятого сокращения «ПИ».

Как следует из (1.1.2), вынужденное поле и соответствующее ему излучение Вавилова–Черенкова (ИВЧ), показанное сплошными линиями на рис. 2.7, существует во всем полупространстве $z > 0$. Из (2.2.46) и (2.3.32) следует, что при отсутствии потерь $R_{1,2} \rightarrow \infty$, откуда получаем, что $\delta\theta_{1,2} \rightarrow 0$ и $\theta_1 \rightarrow \theta_{10}$, $\theta_2 \rightarrow \theta_{20}$. При этом θ_{10} и θ_{20} , определенные согласно (2.2.22) и (2.3.10), являются углами преломленного и отраженного излучения Вавилова–Черенкова соответственно. Обратное черенковско-переходное излучение (ОЧПИ) в среде 2, показанное пунктирными линиями на рис. 2.7, существует при углах $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_{20}$ и интерферирует в этой области с полем ИВЧ. ОЧПИ в вакуумной области, показанное линиями из точек на рис. 2.7, состоит из двух различных волн (см. формулу (2.2.30)), одна из которых, направленная по фазовой скорости к оси движения, существует во всем полупространстве $z < 0$, а другая, направленная по фазовой скорости от оси движения, существует в диапазоне углов $\theta < \theta_{10}$. В этом же диапазоне наблюдается интерференция этих двух волн (см. рис. 2.7). Такое поведение волн вакуумного ОЧПИ связано с аномальным характером преломления волн на границе вакуум – левая среда.

Как уже отмечалось, максимальные радиальные размеры областей «полутени» $R_{1,2}$ бесконечно велики. Это связано с тем, что области существования ПИ, ИВЧ и ОЧПИ также не имеют ограничения по расстоянию. Угловые размеры областей «полутени», определенных согласно (2.2.50) и (2.3.34) в средах 1 и 2, соответственно, при отсутствии потерь зависят от расстояния следующим образом:

$$\Delta\theta_1 \rightarrow \Delta\theta_{10} = \sqrt{\frac{2}{k_1 R}}, \quad \Delta\theta_2 \rightarrow \Delta\theta_{20} = \sqrt{\frac{2}{k_2 R}}.$$

На рис. 2.7 области «полутени» показаны штриховкой.

Обратимся теперь к случаю, когда в среде 2 учитывается малая диссипация, и рассмотрим тот же частотный диапазон (2.2.10) внутри ЛЧД П–2. При этом $\varepsilon_2'' > 0$, $\mu_2'' > 0$, $\text{Im} n_2^2 < 0$, и величины s_2 и k_2 приобретают малую мнимую часть: $\text{Im} s_2 > 0$, $\text{Im} k_2 > 0$. Вследствие этого Фурье-гармоники вынужденного поля (1.1.2) приобретают экспоненциальное затухание следующего вида (при $\rho |s_2| \gg 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| E_{\rho\omega}^{q(2)} \right| \\ \left| E_{z\omega}^{q(2)} \right| \\ \left| H_{\varphi\omega}^{q(2)} \right| \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2\rho}{\rho_2}\right), \quad \rho_2 = \frac{2}{\text{Im}s_2} \approx \frac{4\sqrt{\text{Re}n_2^2\beta^2 - 1}}{\omega c^{-1}\beta |\text{Im}n_2^2|}, \quad (2.4.1)$$

где выражение для ρ_2 получено с использованием (2.2.16). Условимся по определению называть областью существенности того или иного типа излучения такую область пространства, на границе которой Фурье-гармоника поля, соответствующего данному излучению, убывает в e^2 раз за счет экспоненциального множителя. Для излучения Вавилова–Черенкова, согласно (2.4.1), область существенности определяется неравенством $\rho \leq \rho_2$. Как следует из (2.3.8) при $\rho |s_2| \gg 1$, Фурье-гармоники отраженного ОЧПИ обладают экспоненциальным убыванием вида (2.5.1) (вне области «полутени»)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| E_{\rho\omega}^{b(2)P} \right| \\ \left| E_{z\omega}^{b(2)P} \right| \\ \left| H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \right| \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2\rho}{\rho_2}\right),$$

поэтому область существенности этого излучения также определяется неравенством $\rho \leq \rho_2$.

Можно показать, что за счет мнимой части k_2 ($\text{Im}k_2 > 0$) сферическая волна переходного излучения (2.3.23) испытывает следующее экспоненциальное убывание:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| E_{\rho\omega}^{b(2)S} \right| \\ \left| E_{z\omega}^{b(2)S} \right| \\ \left| H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \right| \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2R}{\rho_2(\sin\theta_{20})^{-1}}\right), \quad (2.4.2)$$

и область существенности ПИ в среде 2 определяется неравенством $R \leq \rho_2 / \sin\theta_{20}$.

Поскольку мы пренебрегаем потерями в среде 1, величина k_1 вещественна и сферическая волна переходного излучения в этой среде (2.2.34) не имеет экспоненциального убывания. В отличие от неё, вклады полюсов (2.2.30), представляющие собой цилиндрические волны ОЧПИ, обладают экспоненциальным убыванием за счет ненулевых потерь в среде 2. Это убывание (вне области «полутени») описывается зависимостью вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| E_{\rho\omega}^{b(1)P\pm} \right| \\ \left| E_{z\omega}^{b(1)P\pm} \right| \\ \left| H_{\varphi\omega}^{b(1)P\pm} \right| \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2R}{R_{1\pm}(\theta)}\right), \quad (2.4.3)$$

где

$$R_{1\pm}(\theta) = \frac{4\sqrt{\text{Re}n_2^2\beta^2 - 1}\sqrt{n_1^2\beta^2 - \text{Re}n_2^2\beta^2 + 1}}{k_1 |\text{Im}n_2^2| \beta^2 \sin(\theta_{10} \pm \theta)}. \quad (2.4.4)$$

Пространственные области существенности волн вакуумного ОЧПИ определяются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} R &\leq R_{1+}(\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2, \quad (\text{полюс } s_2) \\ R &\leq R_{1-}(\theta), \quad 0 < \theta < \theta_1. \quad (\text{полюс } -s_2) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Следует отметить, что характер убывания волн ОЧПИ в вакууме (2.4.3), (2.4.4) можно получить из простых геометрических соображений (см. рис. 2.8). Рассмотрим две точки A_+ и A_- в вакуумной области. В рамках геометрической оптики излучение Вавилова–Черенкова в эти точки приходит по соответствующим лучам. Точка A_+ расположена в области углов $\theta > \theta_1$, в нее приходит луч 1, соответствующий полюсу s_2 . Луч 2, соответствующий полюсу $-s_2$, может попасть только в точку, расположенную в области углов $\theta < \theta_1$ (точка A_-). Лучи 1 и 2 при распространении в среде проходят расстояния по координате ρ равные, соответственно, ρ^+ и ρ^- . Эти расстояния нетрудно вычислить из геометрических соображений:

$$\rho^\pm = R(\cos \theta \operatorname{tg} \theta_{10} \pm \sin \theta) = R(\cos \theta_{10})^{-1} \sin(\theta_{10} \pm \theta), \quad (2.4.6)$$

причем $\theta < \theta_1$ для ρ^- . Подставляя вычисленные ρ^\pm в формулу (2.4.1), определяющую затухание излучения Вавилова–Черенкова в среде, и учитывая, что, согласно (2.2.22),

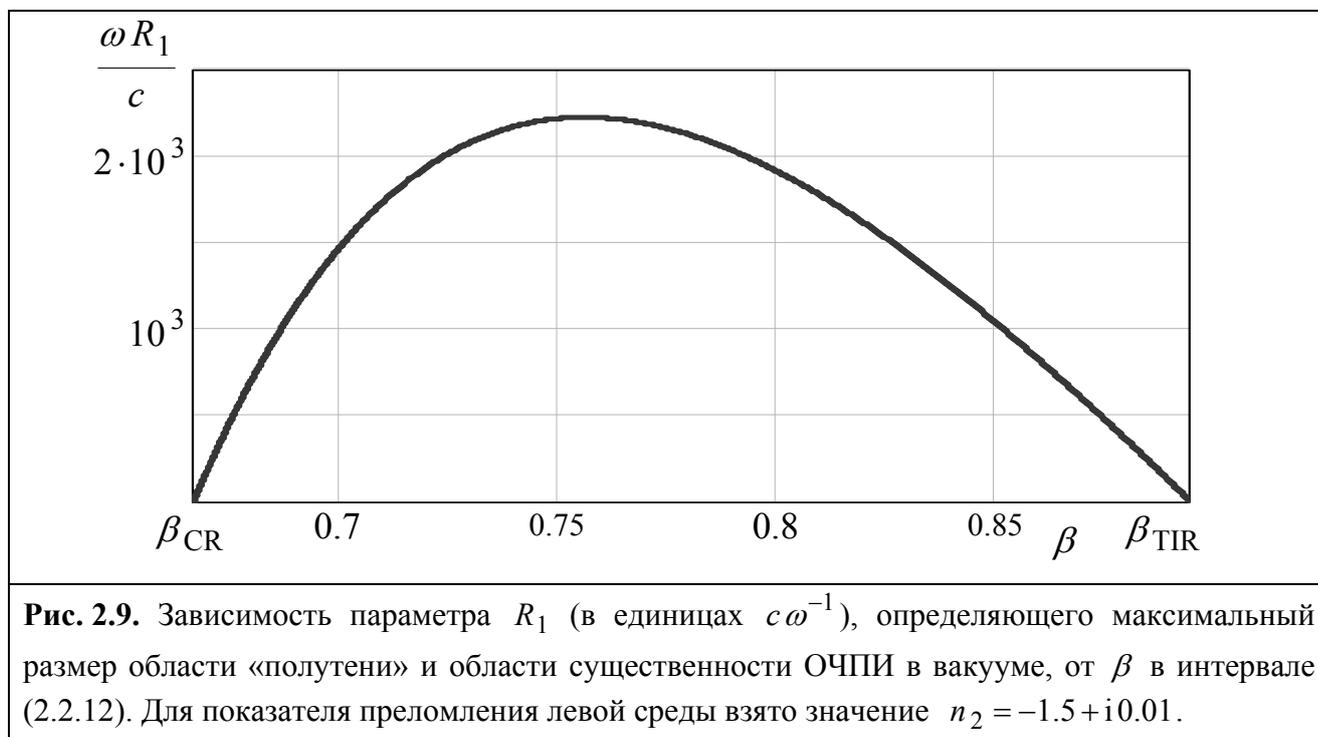
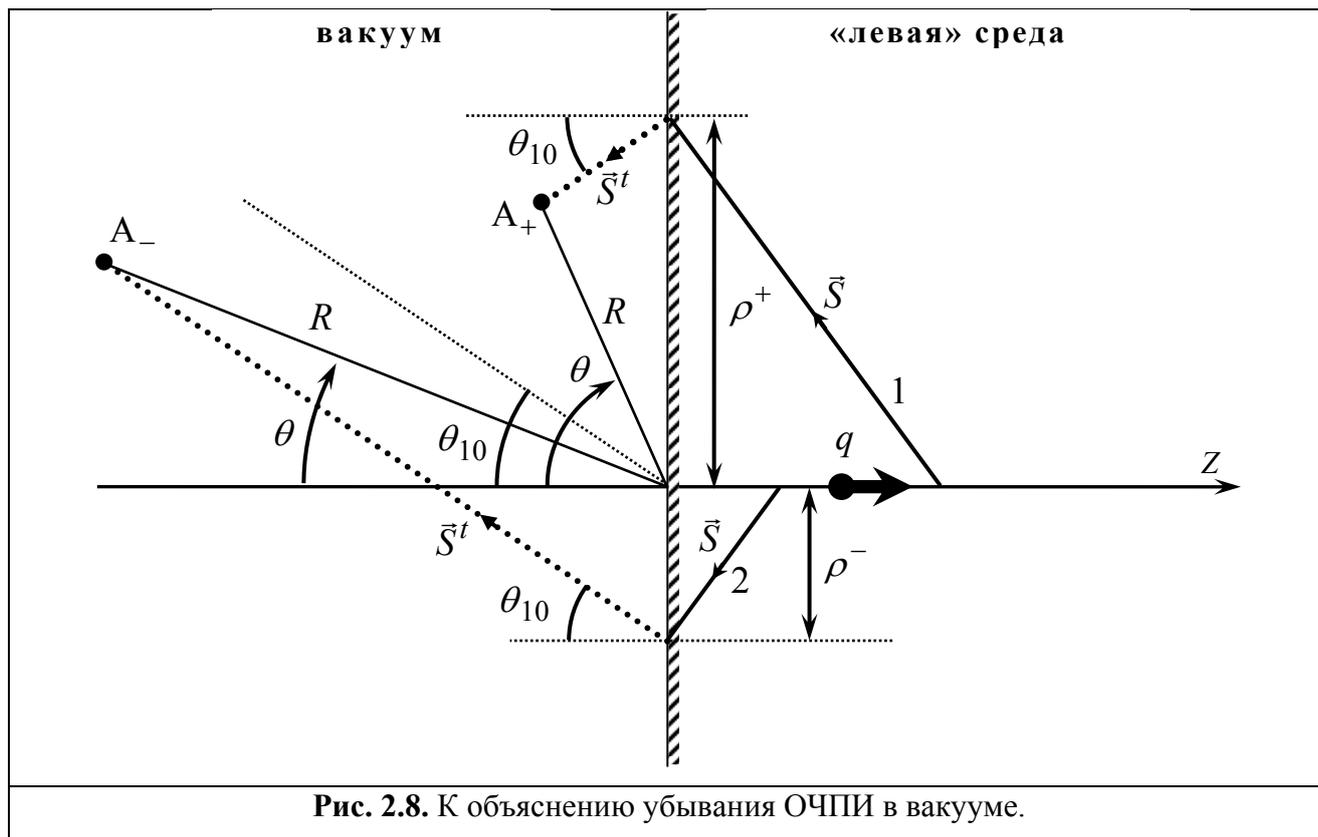
$$\cos \theta_{10} = \frac{\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \operatorname{Re} n_2^2 \beta^2 + 1}}{n_1 \beta},$$

получим формулу (2.4.4). Из (2.4.4) видно, что максимальное значение величины $R_{1-}(\theta)$ определяется следующим образом:

$$R_{1-}(\theta_1) = R_1. \quad (2.4.7)$$

Формула (2.4.7) означает, что цилиндрическая волна ОЧПИ, направленная от оси движения частицы (вклад полюса $-s_2$), испытывает наименьшее экспоненциальное затухание при $\theta = \theta_1$. Таким образом, R_1 определяет не только максимальный размер области «полутени» в вакуумной области (2.2.50), но также и максимальное расстояние, на котором может наблюдаться цилиндрическая волна ОЧПИ в среде 1. Данный результат является вполне закономерным, поскольку переход от наличия поля указанной волны ОЧПИ к его отсутствию происходит внутри области «полутени», которая естественно имеет тот же максимальный размер, что и область существенности данной волны.

Чтобы показать, какие значения могут иметь размеры области «полутени» и области существенности ОЧПИ в реальности, на рис. 2.9 представлена зависимость R_1 от β в диапазоне (2.2.10). Для показателя преломления левой среды взято следующее типичное значение [95, 96]: $n_2 = -1.5 + i0.01$. Как видно из рис. 2.9, в средней части диапазона $\beta_{\text{CR}} < \beta < \beta_{\text{TIR}}$ величина R_1 достигает порядка тысяч длин волн в вакууме.



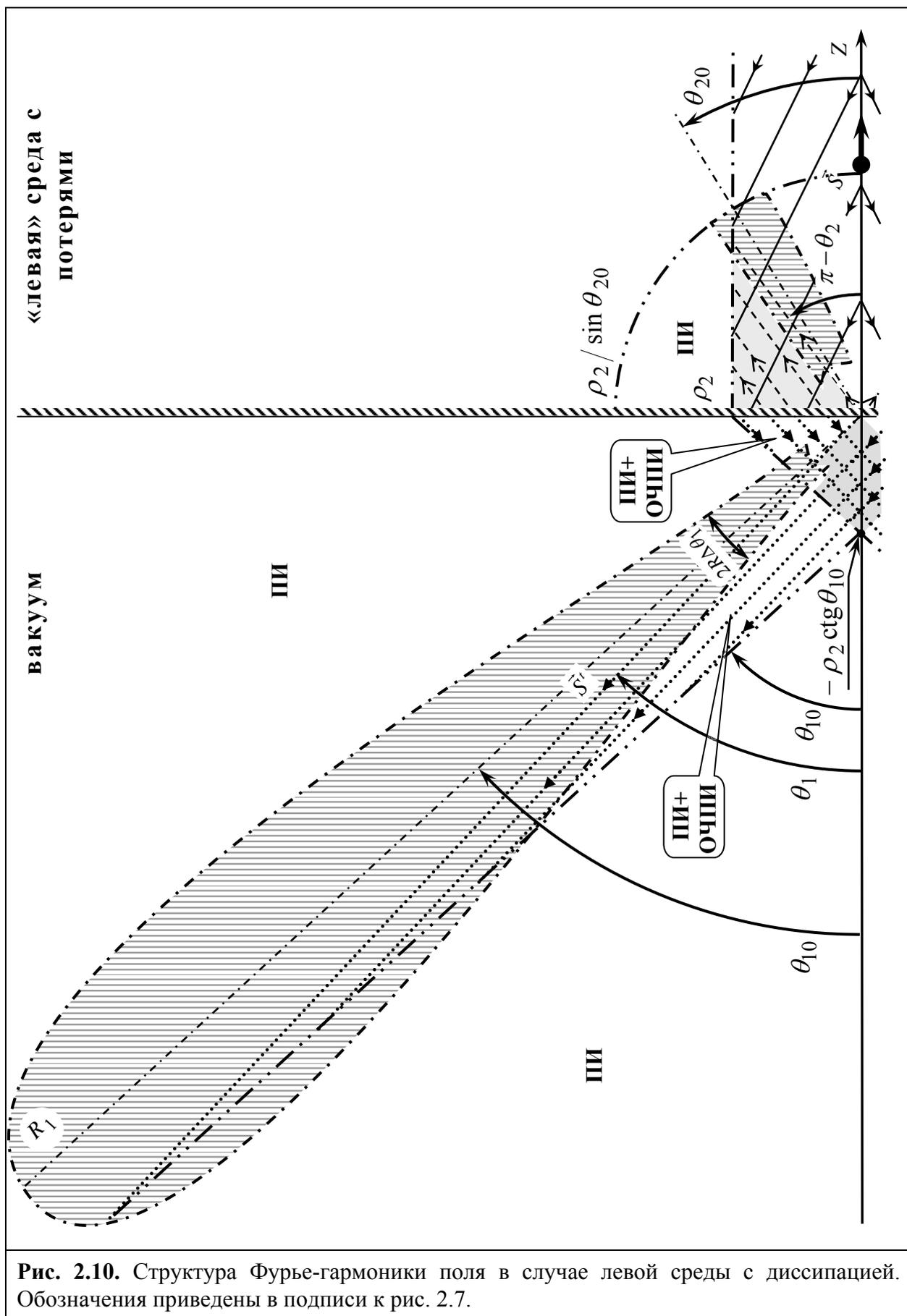


Рис. 2.10. Структура Фурье-гармоники поля в случае левой среды с диссипацией. Обозначения приведены в подписи к рис. 2.7.

Структура Фурье-гармоники полного поля с учетом диссипации в среде показана на рис. 2.10. Обозначения на рис. 2.10 совпадают с обозначениями рис. 2.7. Штриховкой показаны области полутени, имеющие конечные размеры. Границы областей существенности показаны двойной штрихпунктирной линией. Отметим, что область существенности волны ОЧПИ, распространяющейся от оси движения в вакуумной области, представляет собой сильно вытянутый треугольник. Его наибольшая сторона совпадает с отрезком луча \vec{S}^t , выходящего из точки $\rho = z = 0$, а наименьшая сторона представляет собой отрезок оси z между точками $z = 0$ и $z = -\rho_2 \operatorname{ctg} \theta_{10}$. Третья сторона составляет с отрицательным направлением оси z угол θ_{10} , что отличается от соответствующего наклона наибольшей стороны на малую величину $\delta\theta_1$. Эта малая разница наклонов и приводит к сильной вытянутости области существенности данной волны ОЧПИ. Область существенности ПИ в среде ограничена дугой окружности $R = \rho_2 / \sin \theta_{20}$. Волны ИВЧ и ОЧПИ в среде существенны при $\rho < \rho_2$, причем ОЧПИ существует в области углов $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_2$.

2.5. Численный расчет и обсуждение результатов

Наряду с асимптотическими представлениями, рассмотренными в разделах 2.3 и 2.4, для анализа свободного поля в рассматриваемой задаче использовался подход, основанный на численном расчете интегралов для Фурье-гармоник (2.1.7) и для свободного поля (2.1.6) (напомним, что подробный анализ вынужденного поля для интересующих нас сред содержится в разделе 1.3).

2.5.1. Описание численных алгоритмов

Как видно из рис. 2.3, в случае ЛЧД II–2 вблизи контура интегрирования располагаются полюса $\pm s_2$ (в случае ПЧД I–2 они лежат по другую сторону разреза). Это приводит к резкому изменению подынтегральных выражений в (2.1.7) вблизи полюсов, что затрудняет интегрирование. В рамках численного алгоритма расчета интегралов (2.1.7), реализованного в среде *Mathcad*, предусмотрена аналитическая оценка отрезков вещественной оси k_ρ , на которых существенно влияние полюсов. Прежде всего, в (2.1.7) целесообразно перейти к интегрированию по положительной части вещественной оси k_ρ . При этом функции Ханкеля $H_{0,1}^{(1)}(\rho k_\rho)$ заменяются функциями Бесселя $J_{0,1}(\rho k_\rho)$, а перед интегралом появляется множитель 2. В окрестности полюса $k_\rho \approx |s_2|$ поведение подынтегральных функций в (2.1.7) описывается формулой следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega k\rho}^{b(1,2)} \\ E_{z\omega k\rho}^{b(1,2)} \\ H_{\varphi\omega k\rho}^{b(1,2)} \end{array} \right\} \sim \frac{1}{k_{\rho}^2 - (s'_2 + i s''_2)^2}, \quad (2.5.1)$$

При условии $|s'_2| \gg s''_2$ полюс сильно возмущают подынтегральную функцию. Максимальное значение функция (2.5.1) имеет при $k_{\rho} = |s'_2| \pm s''_2$, а при $k_{\rho} \approx |s'_2| \pm 20s''_2$ значение (2.5.1) становится примерно в 10 раз меньше, чем в максимуме. Таким образом, в качестве отрезка, где существенно влияние полюса, был выбран интервал

$$[|s'_2| - 20s''_2, |s'_2| + 20s''_2]. \quad (2.5.2)$$

На этом отрезке интегрирование производилось с более мелким шагом по сравнению со всей остальной частью контура. Более того, внутри интервала (2.5.2) был дополнительно выделен еще более мелкий отрезок

$$[|s'_2| - s''_2, |s'_2| + s''_2] \quad (2.5.3)$$

для надежного интегрирования в окрестности максимумов (2.5.1).

При последующем вычислении частотных интегралов (2.1.6) в качестве контура интегрирования используется положительная часть вещественной оси (в соответствии со свойством (2.1.14)). Предварительно численно исследуется поведение подынтегральных функций на этом контуре. На частотах, существенно превышающих резонансную и плазменную частоты левой среды, наблюдался монотонный спад амплитуды осцилляций этих функций. В качестве верхнего предела интегрирования выбиралось значение частоты, на которой амплитуда уменьшалась в 20–30 раз по сравнению с началом монотонного спада. Отметим, что в обоих случаях качество численных расчетов также контролировалось при визуальном анализе полученных результатов. Критерием достоверности считалось отсутствие ярко выраженных изломов и нерегулярностей на полученных графиках.

2.5.2. Численные результаты для Фурье-гармоник

На рис. 2.11, 2.12, 2.13 и 2.14 представлены кривые зависимости вещественной и мнимой частей Фурье-гармоник полного поля ($E_{\omega} = E_{\omega}^q + E_{\omega}^b$) от угла наблюдения θ на полуокружности $R = \text{const}$ (см. пунктирную линию на рис. 2.1)) при различных значениях скорости заряда β , полученные с помощью описанного численного алгоритма. Эти кривые иллюстрируют пространственное распределение Фурье-гармоник на фиксированной частоте. Среды описываются дисперсионными закономерностями (2.1.1) и (2.1.2), значения параметров сред указаны в подписях к рисункам. Приведены результаты для случаев, когда частота Фурье-гармоники лежит в ЛЧД II–2 (рис. 2.11, 2.12 и 2.13) или в ПЧД I–2 (рис. 2.14).

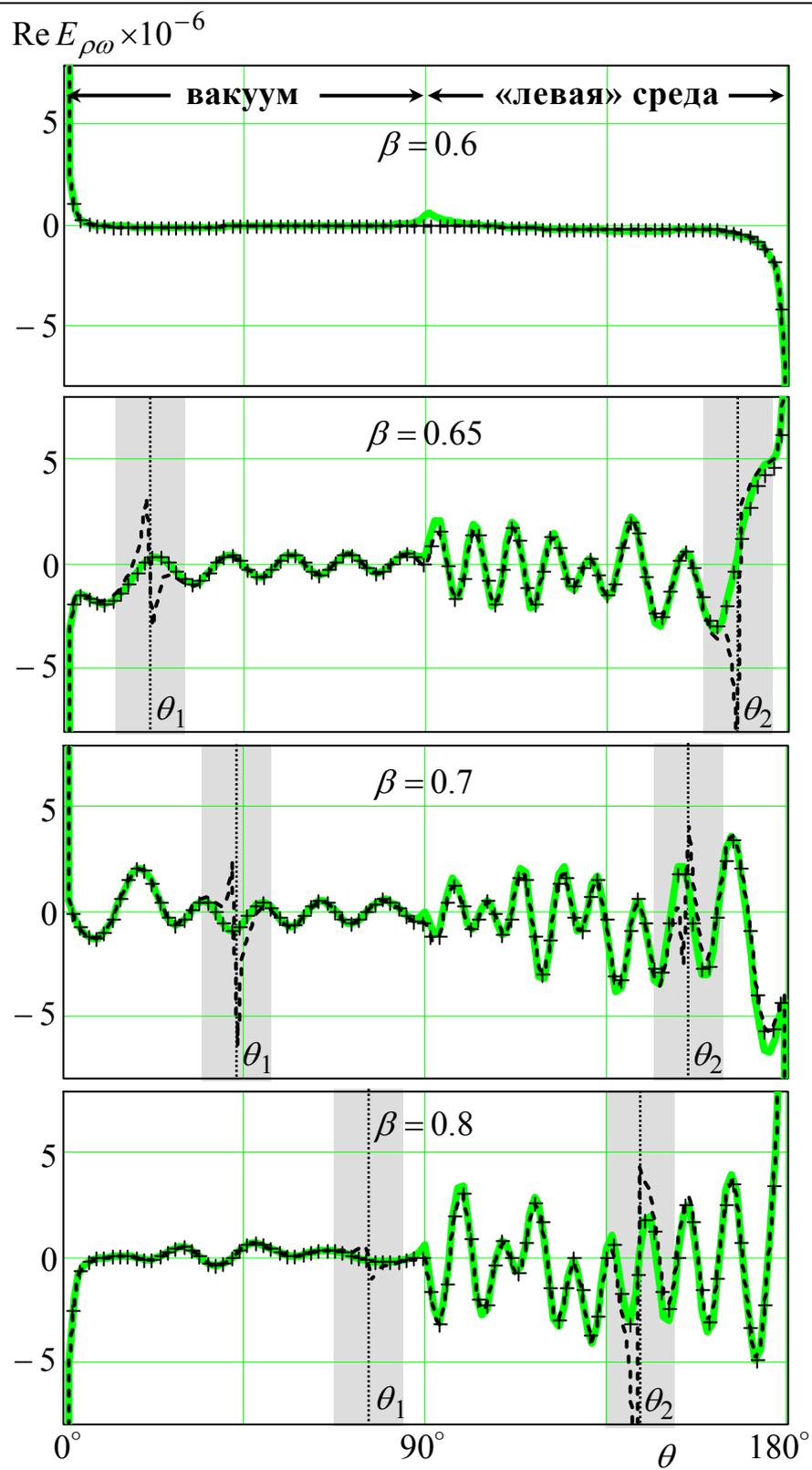


Рис. 2.11. (начало)

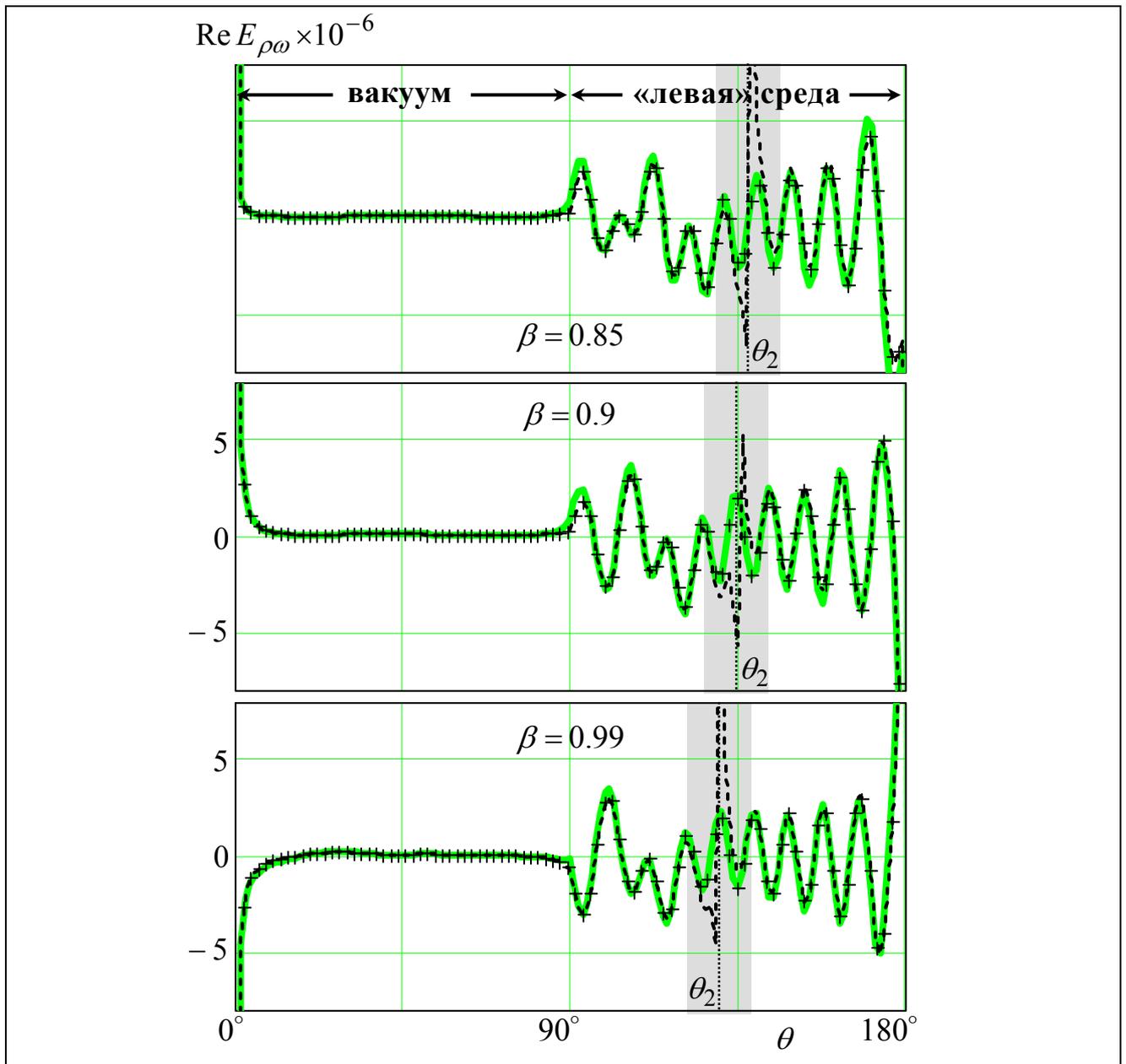


Рис. 2.11. Пространственное распределение вещественной части Фурье-гармоники компоненты E_ρ – зависимость $\text{Re} E_{\rho\omega}$ ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$) от θ при $R = \text{const} = 9.5 \text{ см}$ для различных скоростей β в случае сред (2.1.1), (2.1.2) с параметрами (в единицах $\omega_{\text{pe}2} = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$): $\omega_{\text{pm}2} = 1$, $\omega_{\text{tm}2} = 3/4$, $\omega_{\text{de}2} = \omega_{\text{dm}2} = 10^{-4}$; $\omega_{\text{pe}1} = 10^{-2}$, $\omega_{\text{de}1} = 10^{-6}$. Частота Фурье-гармоники лежит в ЛЧД П-2: $\omega = 0.84$, $\varepsilon_1 \approx 1$, $\varepsilon'_2 = -0.42$, $\mu'_2 = -6$, $\beta_{\text{CR}} = 0.63$, $\beta_{\text{TIR}} = 0.81$. Сплошная линия рассчитана по точным формулам, пунктирная линия соответствует неравномерной асимптотике, линия из значков «+» соответствует равномерной асимптотике. Затенены области углов, попадающие в область «полутени» (согласно аналитической оценке).

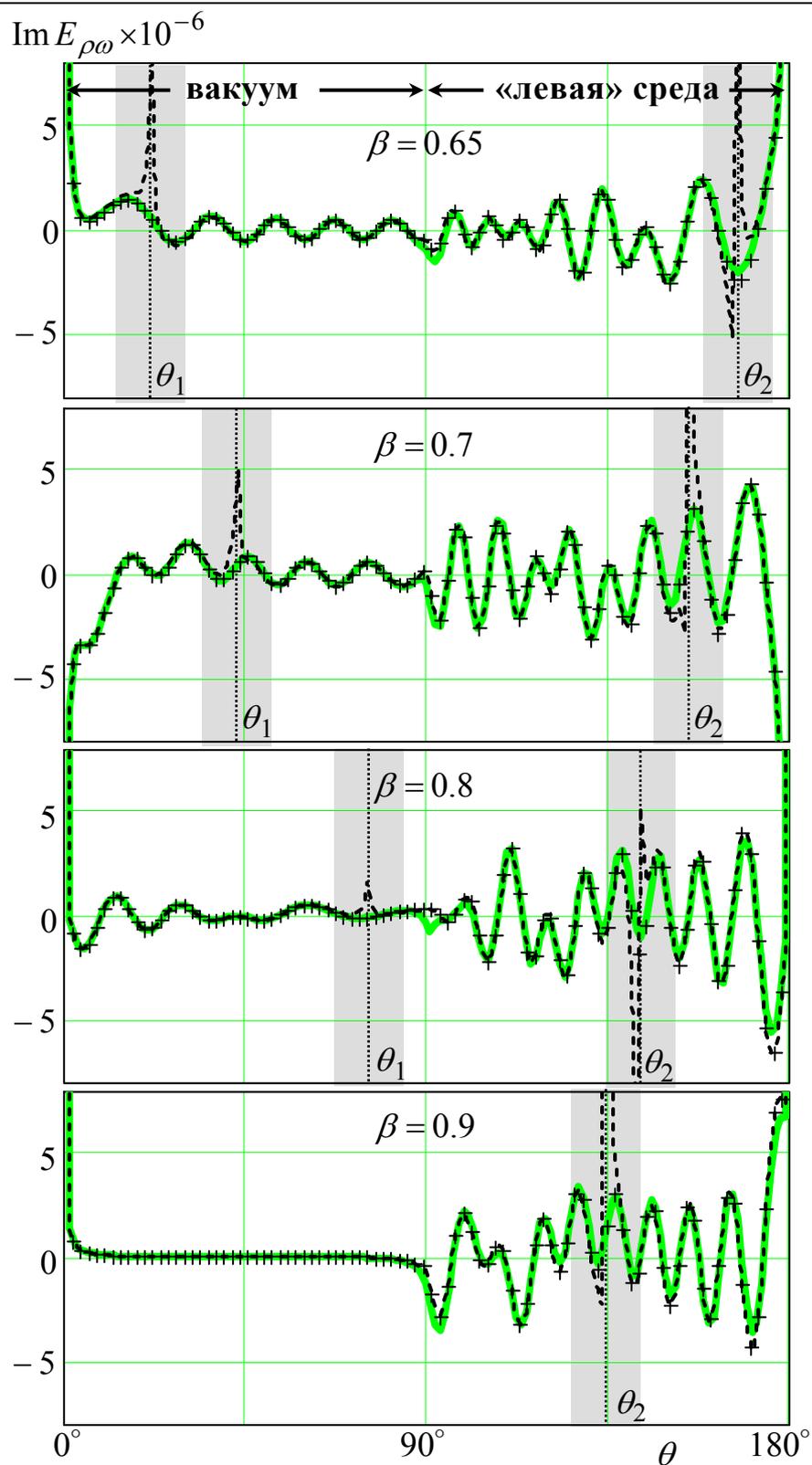


Рис. 2.12. Пространственное распределение мнимой части Фурье-гармоники $E_{\rho\omega}$ ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$) для различных скоростей β . Параметры расчетов и обозначения указаны в подписи к рис. 2.11.

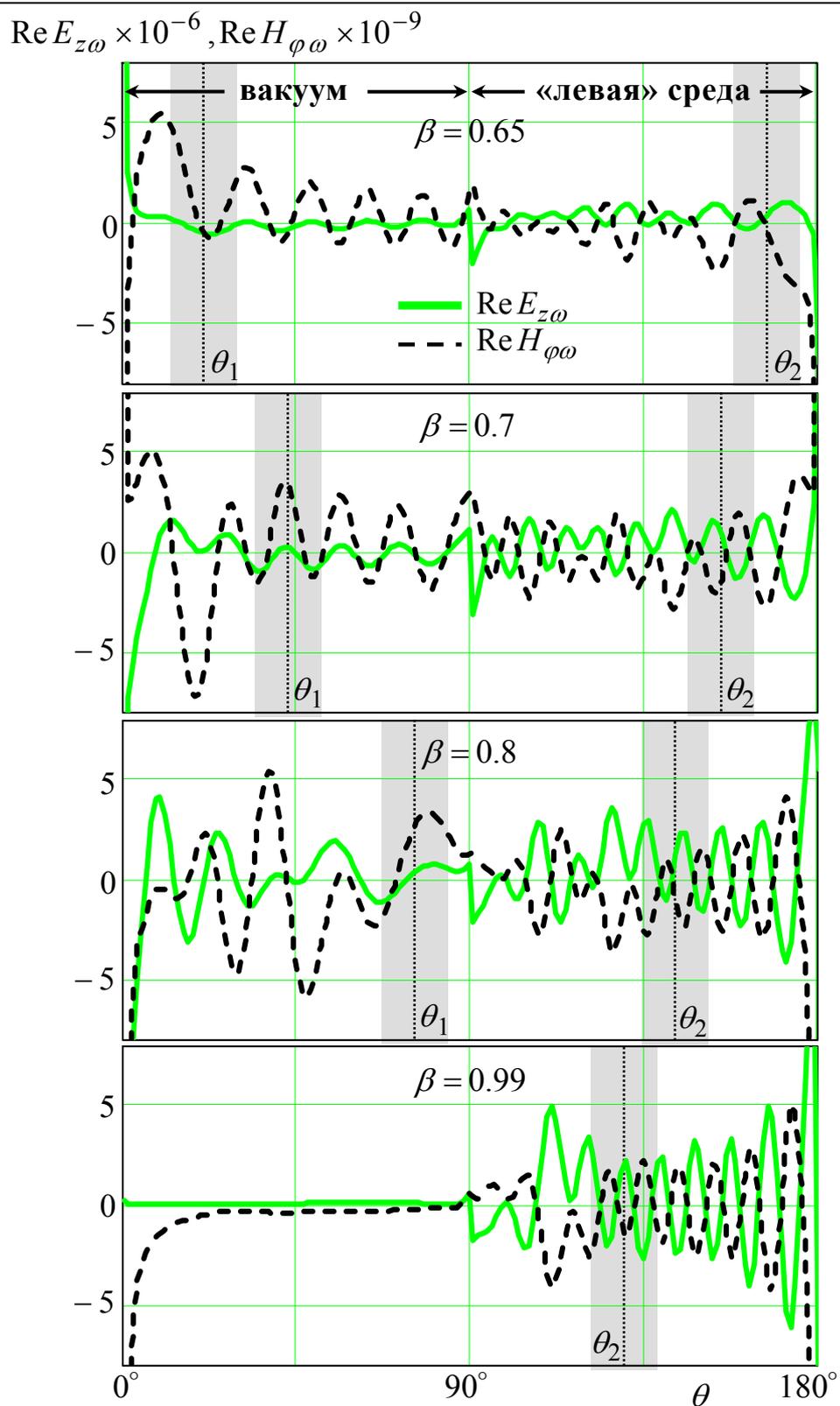


Рис. 2.13. Пространственное распределение вещественной части $E_{z\omega}$ ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$) и $H_{\varphi\omega}$ ($\text{Ам}^{-1}\text{с}$) при различных значениях β . Параметры расчетов указаны в подписи к рис. 2.11.

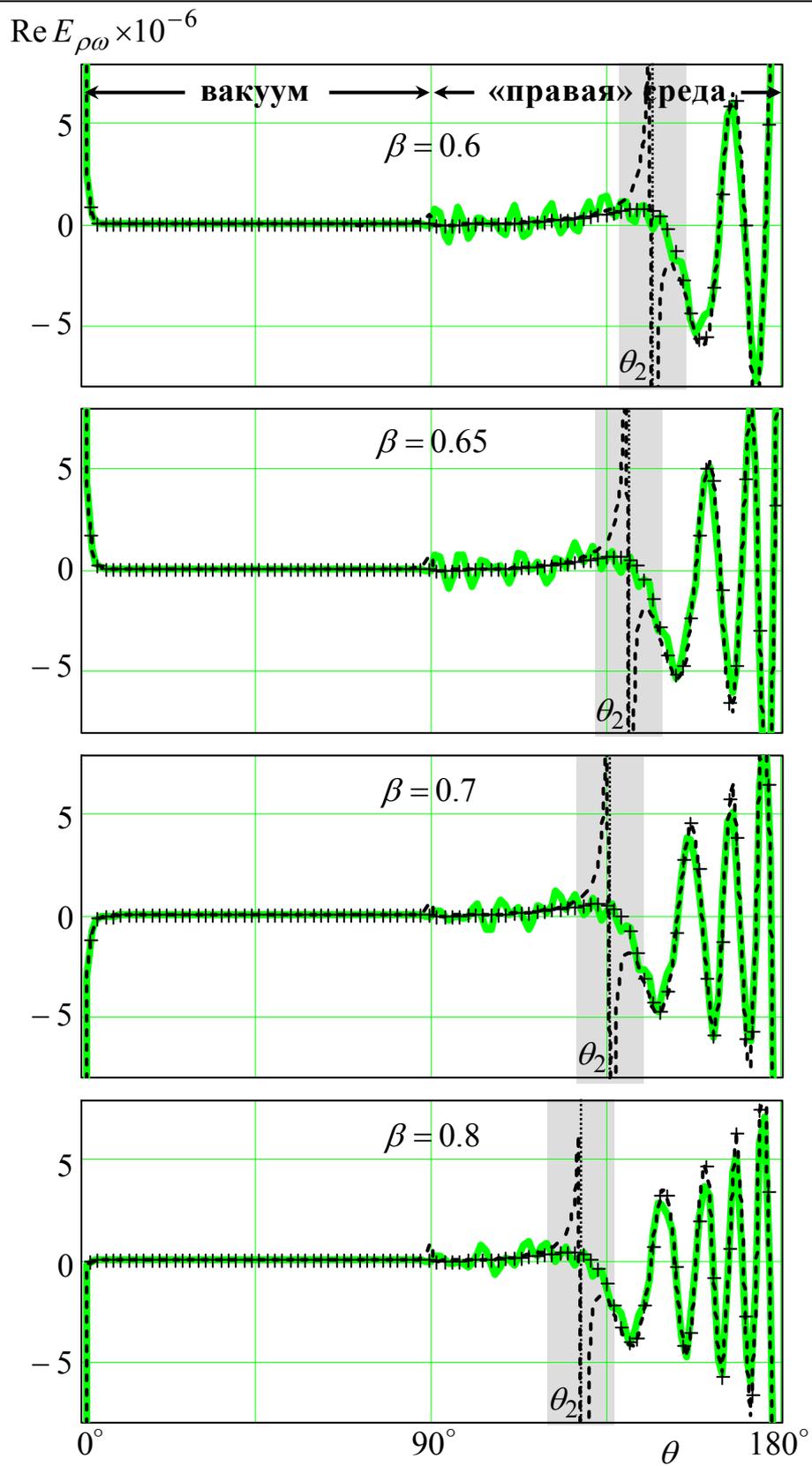


Рис. 2.14. (начало)

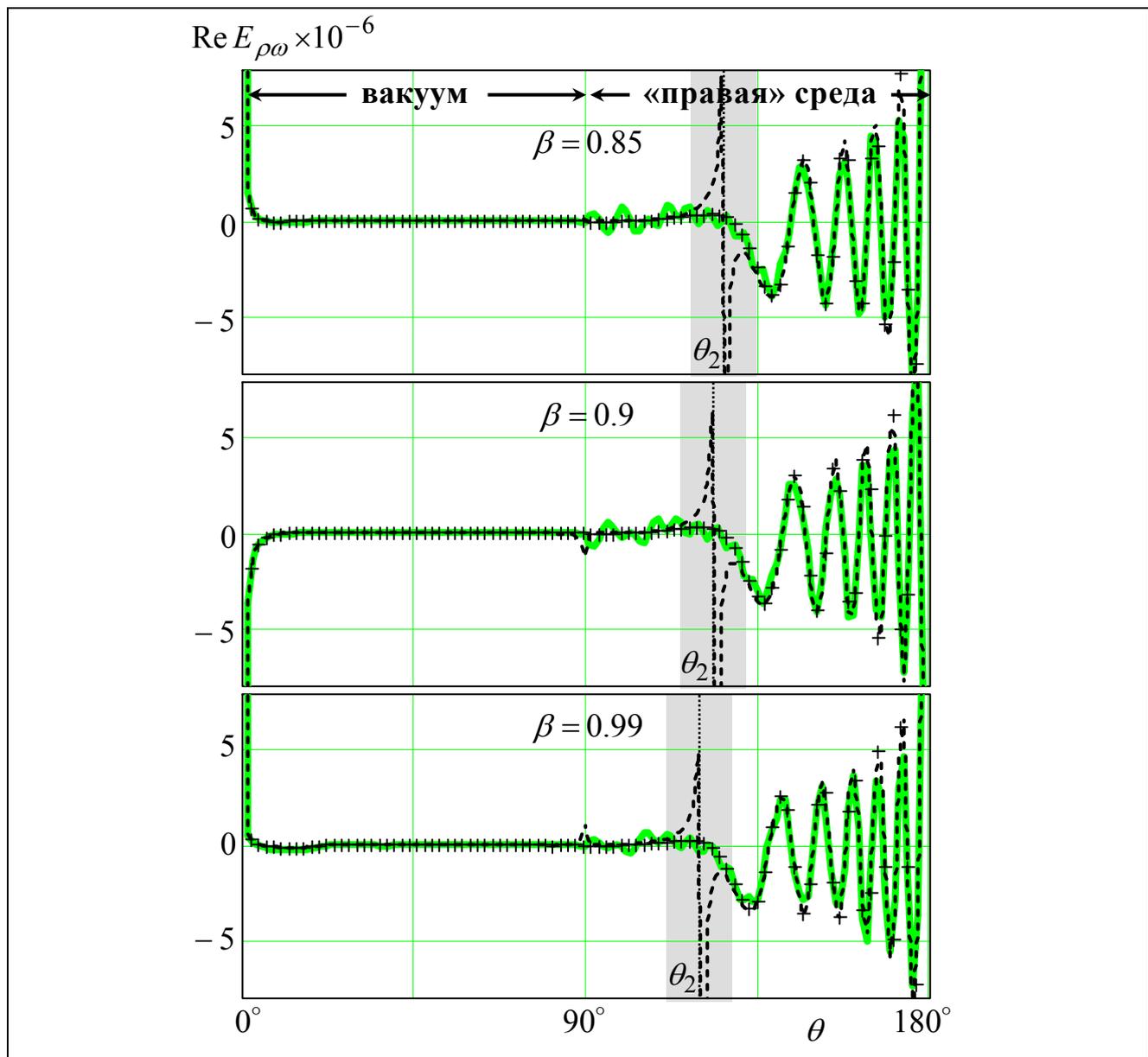


Рис. 2.14. Пространственное распределение вещественной части Фурье-гармоники электрического поля (зависимость $\text{Re} E_{\rho\omega}$ ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$) от θ при $R = \text{const} = 9.5$ см) для различных скоростей β в случае сред (2.1.1), (2.1.2) с параметрами (в единицах $\omega_{\text{pe}2} = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^9 \text{с}^{-1}$): $\omega_{\text{pm}2} = 1$, $\omega_{\text{rm}2} = 4/3$, $\omega_{\text{de}2} = \omega_{\text{dm}2} = 10^{-4}$; $\omega_{\text{pe}1} = 10^{-2}$, $\omega_{\text{de}1} = 10^{-6}$. Частота Фурье-гармоники лежит в ПЧД I–2: $\omega = 1.3$, $\varepsilon_1 \approx 1$, $\varepsilon'_2 = 0.4$, $\mu'_2 = 10$. Сплошная линия рассчитана по точным формулам, пунктирная линия соответствует неравномерной асимптотике, линия, образованная значками «+», соответствует равномерной асимптотике. Затенены области углов, попадающие в область «полутени».

Для сравнения на графиках рис. 2.11, 2.12 и 2.14 построены также зависимости соответствующих величин, полученные с помощью асимптотических формул. Пунктирные кривые, соответствующие неравномерной асимптотике, построены с использованием формул (2.2.40), (2.2.6) и (2.2.30) для области $z < 0$ и формул (2.3.36), (2.3.24), (2.3.7) и (2.3.8) для области $z > 0$. Кривые, показанные с помощью символов «+», соответствуют равномерной асимптотике. Они построены с использованием формул (2.2.33) – (2.2.35) для области $z < 0$ и формул (2.3.22) – (2.3.25) для области $z > 0$.

Проанализируем случай, когда частота Фурье-гармоники лежит в ЛЧД II–2 (рис. 2.11, 2.12 и 2.13). На рис. 2.11 представлено пространственное распределение вещественной части Фурье-гармоники $E_{\rho\omega}$ (зависимость $\text{Re } E_{\rho\omega}(\theta)$ при $R = \text{const}$) для различных значений β . Из сравнения приведенных результатов видно, что кривые, соответствующие равномерной асимптотике и численному расчету по точным формулам практически полностью совпадают. Это свидетельствует как о достоверности обоих результатов, так и о правомерности исключения из асимптотики всех членов, не удовлетворяющих условию существенности (2.1.19). Для параметров задачи, принятых на рис. 2.11, волны объемного излучения (переходное излучение, излучение Вавилова–Черенкова и обратное черенковско-переходное излучение) практически полностью определяют электромагнитное поле. Что касается кривой, соответствующей неравномерной асимптотике (пунктирные линии на рис. 2.11), то она совпадает с вышеописанными кривыми только вне определенных диапазонов угла θ , соответствующих областям «полутени» (2.2.50), (2.3.34) (эти диапазоны, сосредоточенные в окрестности углов θ_1 и θ_2 , затенены на рис. 2.11). Внутри областей «полутени» справедлива только равномерная асимптотика.

Как следует из формул (2.2.33) – (2.2.35) (для $z < 0$) и (2.3.22) – (2.3.25) (для $z > 0$), наличие ярко выраженных осцилляций на рис. 2.11 связано с наличием цилиндрических волн в спектре полного поля. Действительно, фазовый множитель сферических волн имеет вид $\exp(ik_{1,2}R)$ и остается постоянным при $R = \text{const}$. Множитель, стоящий при экспоненте в (2.2.34) и (2.3.23), может давать лишь слабую зависимость от угла. При этом, как видно из рис. 2.11, в случае ЛЧД II–2 в вакуумной области при выполнении неравенства (2.2.10) $\beta_{\text{CR}} < \beta < \beta_{\text{TIR}}$ цилиндрические волны обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) фактически определяют полное поле. Двухпороговость этого излучения в вакууме также подтверждается результатами рис. 2.11. Как можно показать (см. также рис. 2.5), интерференция волн ОЧПИ в вакууме имеет место при малых углах θ (вблизи оси движения) при выполнении неравенства

$$R < z_1 = \rho_2 \text{ctg } \theta_{10} = \frac{4\sqrt{n_1^2 \beta^2 - \text{Re } n_2^2 \beta^2 + 1}}{\omega c^{-1} \beta \left| \text{Im } n_2^2 \right|}. \quad (2.5.4)$$

На рис. 2.11 расстояние R выбрано так, чтобы неравенство (2.5.4) выполнялось, и указанная интерференция видна при углах $\theta < 45^\circ$ и скорости $\beta = 0.7$, т. е. в средней части диапазона ОЧПИ ($\beta_{\text{CR}} < \beta < \beta_{\text{TIR}}$).

В левой среде ОЧПИ выражается в наличии осциллирующего поля вблизи границы раздела (при $\pi/2 < \theta < \theta_2$), что ярко видно на рис 2.11. Волны ОЧПИ интерферируют с вынужденным полем, что видно на рис. 2.11 при углах $90^\circ < \theta < 135^\circ$ для $\beta = 0.7 - 0.8$.

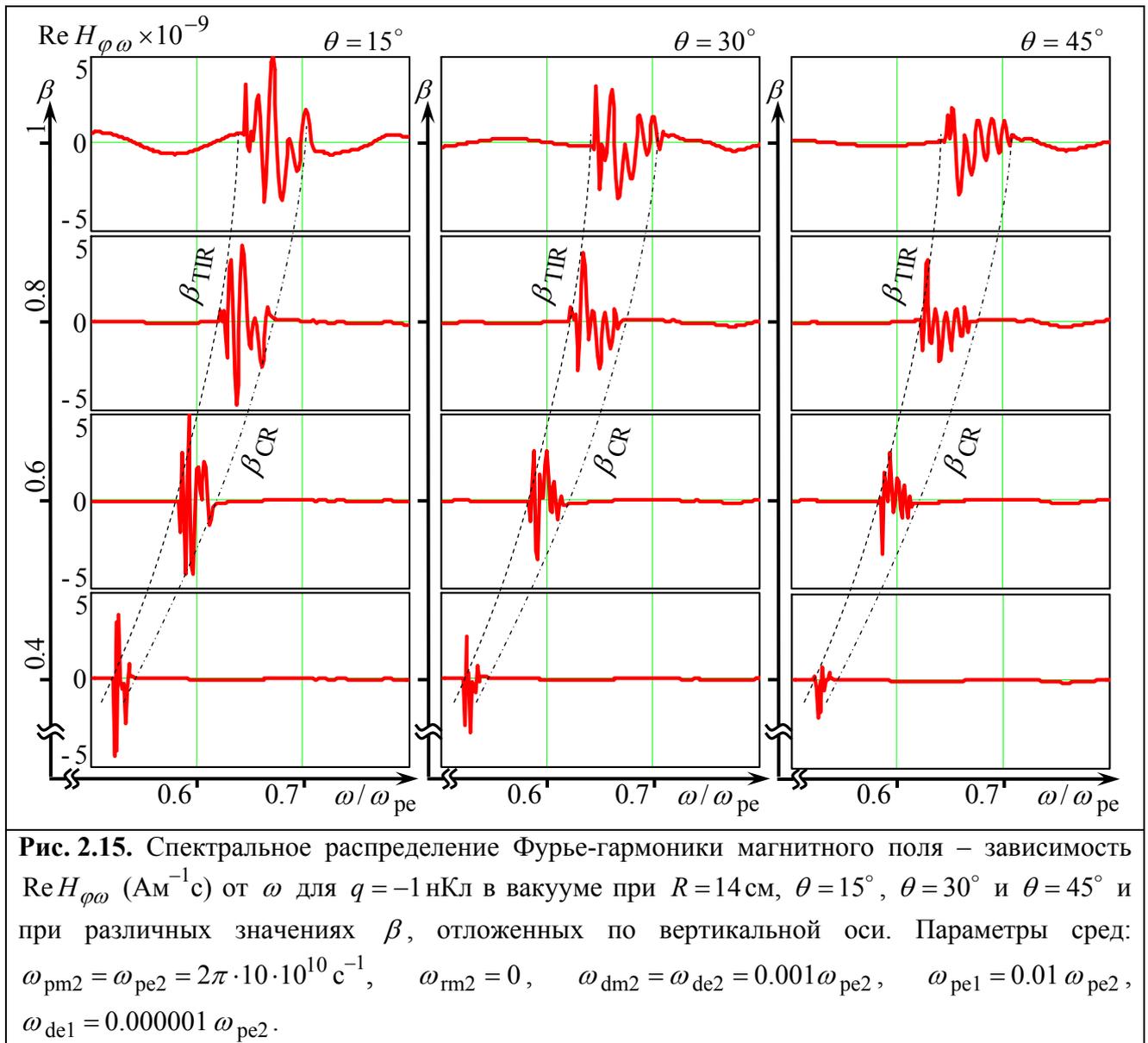
Физическое объяснение описанных эффектов следует из обратного характера излучения Вавилова–Черенкова и необычного закона преломления плоских волн на границе раздела между правой (в данном случае – вакуумом) и левой средой (см. рис. 2.7). В вакууме ОЧПИ состоит из волн, распространяющихся как к оси движения заряда, так и от нее (они соответствуют вкладам полюсов $\pm s_2$, см. формулу (2.2.30)). В результате эти волны могут интерферировать внутри конуса, определяемого углом преломленного излучения Вавилова–Черенкова θ_1 . Отраженное от границы обратное излучение Вавилова–Черенкова интерферирует с падающим полем вблизи границы раздела.

Пространственное распределение мнимой части Фурье-гармоники $E_{\rho\omega}$ (зависимость $\text{Im}E_{\rho\omega}$ от угла θ при $R = \text{const}$) при различных значениях β представлено на рис. 2.12. Из сравнения рис. 2.11 и 2.12 видно, что зависимость $\text{Im}E_{\rho\omega}(\theta)$ качественно и по порядку величины совпадает с зависимостью $\text{Re}E_{\rho\omega}(\theta)$. В частности, видно хорошее совпадение результатов расчета по точным формулам и расчета по формулам равномерных асимптотик, а также двухпороговость ОЧПИ в вакуумной области. Таким образом, для иллюстрации основных эффектов можно ограничиться рассмотрением только вещественной части Фурье-гармоник, что мы и будем делать в дальнейшем. Рис. 2.13 иллюстрирует пространственное распределение вещественных частей Фурье-гармоник компонент E_z и H_φ . Зависимости $\text{Re}E_{z\omega}(\theta)$ и $\text{Re}H_{\varphi\omega}(\theta)$, представленные на рис. 2.13, также качественно совпадают с зависимостью $\text{Re}E_{\rho\omega}(\theta)$, подробно проанализированной выше.

Проанализируем случай, когда частота Фурье-гармоники лежит в ПЧД I–1. Из сравнения результатов, приведенных на рис. 2.14, видно, что кривые, соответствующие равномерной асимптотике и численному расчету по точным формулам практически полностью совпадают в вакуумной области ($0 < \theta < \pi/2$) и в среде при углах $\theta > \theta_2$ (угол θ_2 соответствует центру затененной области). В этих угловых диапазонах исключение из асимптотики всех членов, не удовлетворяющих условию существенности (2.1.19), правомерно, и волны объемного излучения (переходное излучение и излучение Вавилова–Черенкова) полностью определяют электромагнитное поле. Неравномерная асимптотика (пунктирные линии на рис. 2.14) справедлива только вне областей «полутени» (2.3.34) (затененные участки, сосредоточенные в окрестности угла θ_2).

Как видно из рис. 2.14, при углах $\pi/2 < \theta < \theta_2$ наблюдается небольшое отличие в поведении асимптотических кривых и кривых, соответствующих численному расчету. Очевидно, это связано с вкладом точек ветвления (см. рис. 2.4), которые не учитывались в асимптотике. (Подчеркнем, что в наиболее интересном для нас случае границы вакуум – левая среда этот эффект оказался практически незначимым.)

Цилиндрические волны излучения Вавилова–Черенкова присутствуют только в среде при углах $\theta > \theta_2$. Это связано с тем, что излучение Вавилова–Черенкова в рассматриваемом частотном диапазоне носит «прямой» характер и существует только внутри конуса, определяемого углом θ_2 . По этой же причине в вакуумной области цилиндрические волны отсутствуют, и поле определяется сферическими волнами переходного излучения и «квазикулоновской» составляющей (которая определяет особенность на оси z).



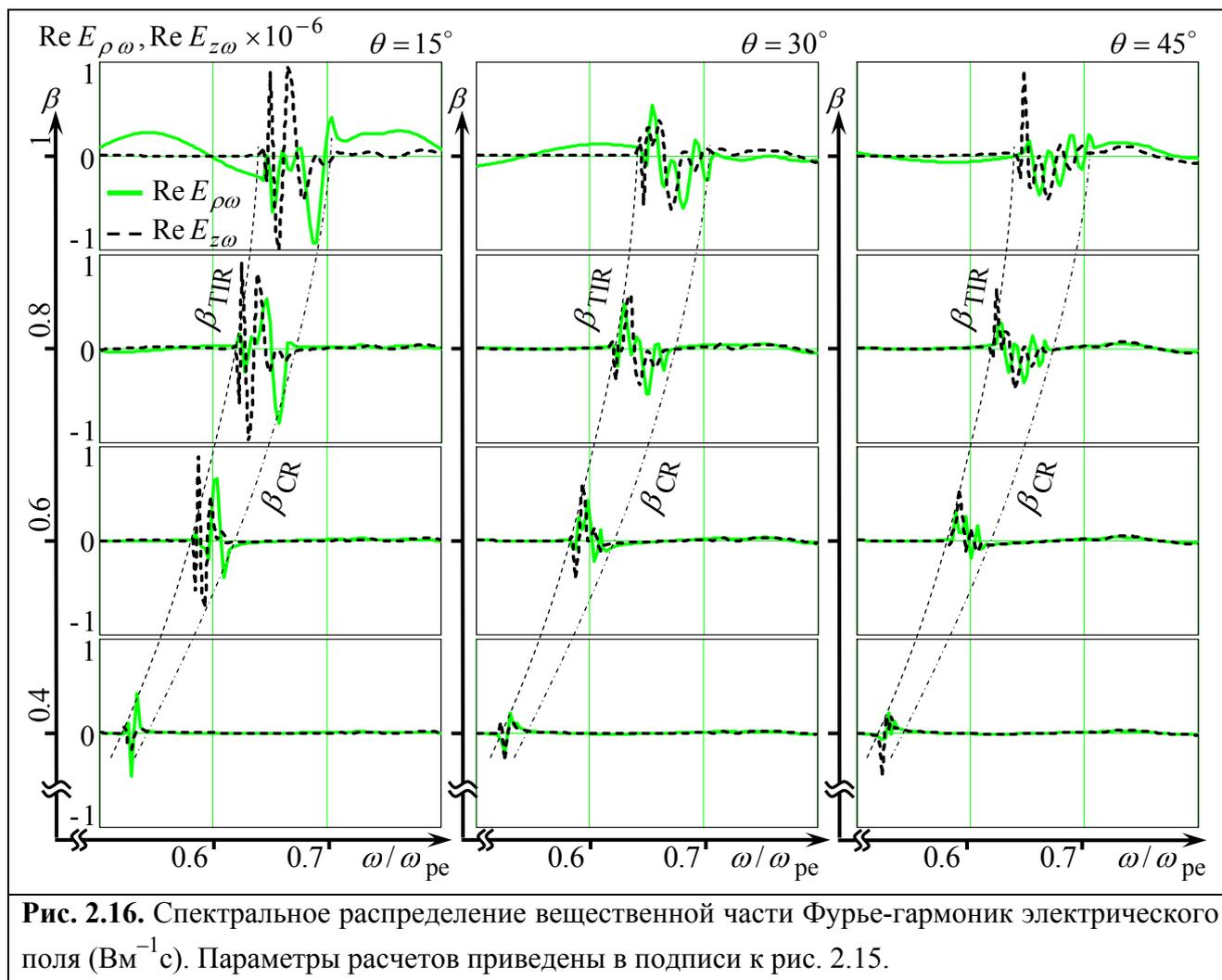


Рис. 2.16. Спектральное распределение вещественной части Фурье-гармоник электрического поля ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$). Параметры расчетов приведены в подписи к рис. 2.15.

Обратимся снова к случаю ЛЧД П-2 и проиллюстрируем спектральное распределение Фурье-гармоники полного поля в фиксированной точке пространства. Для этого на рисунке 2.15 представлена зависимость $\text{Re} H_{\varphi\omega}(\omega)$ при $R = \text{const}$, различных углах наблюдения θ в полупространстве $z < 0$ и при различных значениях скорости β (значения β отложены по вертикальной оси). На рис. 2.16 представлены аналогичные зависимости для $\text{Re} E_{\rho\omega}$ и $\text{Re} E_{z\omega}$. При этом принято, что $\mu_2(\omega)$ описывается дисперсией плазменного типа ($\omega_{\text{m}2} = 0$), причем магнитная плазменная частота совпадает с электрической ($\omega_{\text{pm}2} = \omega_{\text{pe}2}$). При таком упрощении весь диапазон частот $0 < \omega < \omega_{\text{pe}2}$ является ЛЧД. Результаты рис. 2.15 и 2.16 получены с помощью численного интегрирования по точным формулам.

Диапазон частот эффекта ОЧПИ четко проявляется на рис. 2.15 и 2.16 в виде нескольких осцилляций на данных кривых. Согласно неравенству (2.2.10), он должен лежать в пределах $\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$. На рис. 2.15 и 2.16 пунктирными линиями показаны зависимости $\beta_{\text{CR}}(\omega)$ и $\beta_{\text{RCTR}}(\omega)$, пересечение которых с линией $\beta = \text{const}$ определяет частоты ω_c^\pm .

Как видно, результаты численных расчетов подтверждают справедливость формул (2.2.10), (2.2.12). Амплитуда Фурье-гармоники вакуумного ОЧПИ максимальна вблизи оси движения (при малых углах θ), ширина спектра максимальна при $\beta \rightarrow 1$. Отметим, что частотные границы эффекта ярко выражены и могут в принципе быть измерены с хорошей точностью. Поэтому спектр ОЧПИ может быть использован для определения скорости движения заряженных частиц в малых пучках в ускорителях.

2.5.3. Численные результаты для полного поля

На основе алгоритма численного расчета, описанного в разделе 2.5.1, были получены результаты для зависимости полного поля от времени в фиксированной точке пространства. Для компоненты E_z эти результаты представлены на рис 2.17. При расчетах использовалась «упрощенная» модель левой среды, т. е. считалось, что $\mu_2(\omega)$ описывается дисперсией плазменного типа ($\omega_{m2} = 0$), причем магнитная плазменная частота совпадает с электрической ($\omega_{pm2} = \omega_{pe2}$).

На рис. 2.17 линия, помеченная «full», соответствует полному полю. Линия, отмеченная «poles», представляет собой результат интегрирования по частоте вклада полюсов (2.2.30), определяющих вклад ОЧПИ в Фурье-гармонику $E_{z\omega}$. Точка наблюдения расположена в вакууме вблизи оси движения заряда. При отрицательных значениях t виден резкий всплеск, соответствующий пролету частицы вблизи точки наблюдения. Дальнейшее поведение поля показывает, что при $t > 0.7$ (нс) оно хорошо описывается вкладом полюсов. Это означает, что при данных временах ОЧПИ дает главный вклад в объемное электромагнитное излучение. При $0 < t < 0.7$ (нс) основным является переходное излучение.

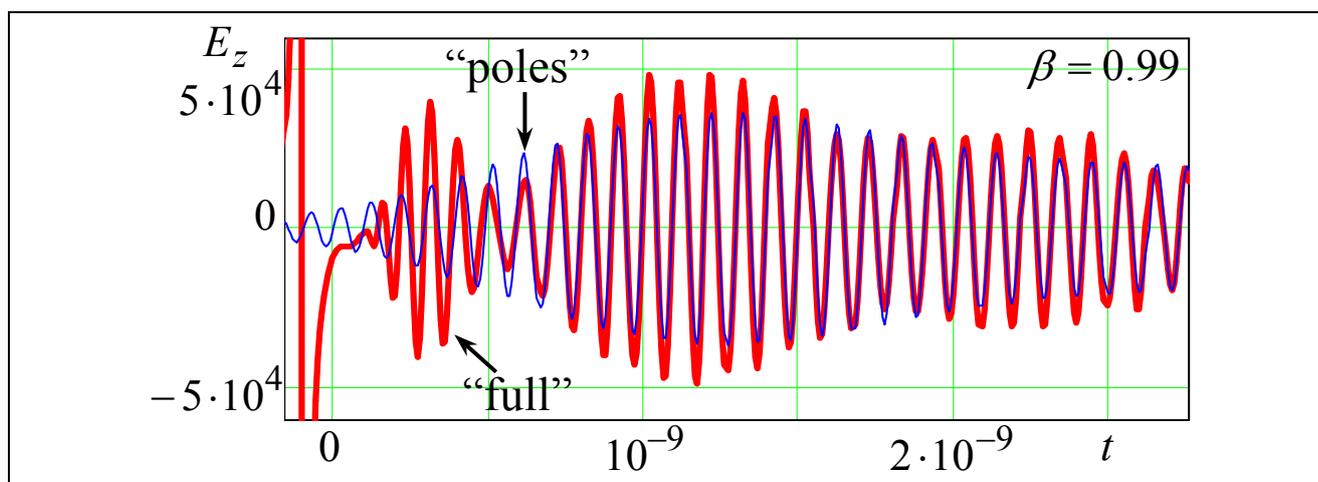


Рис. 2.17. Зависимость компоненты E_z (Вм^{-1}) полного поля от времени t (с) для $q = -1$ нКл в фиксированной точке в вакууме: $z = -3.2$ см, $\rho = 0.03$ см. Параметры сред совпадают с приведенными в подписи к рис. 2.14.

2.6. Выводы

В данной главе было проанализировано электромагнитное поле, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела между вакуумом и изотропной диспергирующей средой. Для описания частотной дисперсии диэлектрической проницаемости была использована плазменная модель, а для описания дисперсии магнитной проницаемости – резонансная. Для сравнения было рассмотрено два возможных соотношения параметров этих моделей, при которых среда является либо правой, либо левой.

Электромагнитное поле исследовалось с помощью двух методов. Первый из них основан на применении метода перевала для построения асимптотик поля в дальней зоне по отношению к точке влета. Была построена равномерная асимптотика, учитывающая возможную близость одного из полюсов к седловой точке. Найдены условия, при которых равномерная асимптотика переходит в неравномерную. Как в вакууме, так и в среде существуют переходные области, названные областями «полутени», внутри которых происходит переход от наличия той или иной цилиндрической волны к ее отсутствию. В вакууме эти области сосредоточены вблизи направления преломленного излучения Вавилова–Черенкова. При учете конечных потерь в среде области «полутени» оказываются ограниченными не только по углу, но и по расстоянию от точки влета заряда в среду.

Сферические волны, соответствующие вкладам седловых точек, присутствуют в асимптотиках в обоих рассмотренных случаях и описывают переходное излучение. В случае, когда среда является правой, цилиндрические волны, описывающие излучение Вавилова–Черенкова, присутствуют только в среде внутри конуса, ось которого совпадает с направлением движения частицы, а раствор определяется углом излучения. В случае, когда среда является левой, цилиндрические волны присутствуют в среде вблизи границы раздела, а также могут присутствовать и в вакуумной области. Это связано с тем, что излучение Вавилова–Черенкова в левой среде носит обратный характер (см. раздел 1.3), и соответствующие ему цилиндрические волны достигают границы раздела. Вследствие этого возникают отраженные и преломленные цилиндрические волны, названные обратным черенковско-переходным излучением (ОЧПИ). Найдены условия генерации ОЧПИ, которые являются условиями захвата соответствующих полюсов при трансформации исходного контура интегрирования к контуру наискорейшего спуска. Показано, что ОЧПИ в вакуумной области является двухпороговым эффектом как по скорости движения частицы, так и по частоте. Нижний порог совпадает с порогом генерации излучения Вавилова–Черенкова, а верхний порог связан с полным внутренним отражением на границе.

Был проведен анализ влияния потерь в среде на распространение волн указанных типов излучения (переходное излучение, излучение Вавилова–Черенкова и ОЧПИ) и оценены пространственные области их существенности. Интересно отметить, что наличие потерь в среде приводит к затуханию волн ОЧПИ не только в среде (что естественно), но и вакуумной области (это объясняется тем, что излучение Вавилова–Черенкова, порождающее ОЧПИ, проходит определенный путь до границы). Подчеркнем, что при использовании реалистичных параметров левой среды оказалось, что расстояние, на котором ОЧПИ

является ведущим эффектом, составляет величину порядка тысячи длин волн в вакууме (см. рис. 2.9). Если принять, что ОЧПИ генерируется на частотах порядка 10 ГГц, что типично для метаматериалов с «левыми» свойствами, то расстояние существенности ОЧПИ будет составлять несколько метров. Этого вполне достаточно для регистрации излучения в эксперименте и его использования в целях диагностики пучков частиц или диагностики свойств метаматериалов.

Другой метод исследования состоял в применении разработанного численного алгоритма для расчета Фурье-гармоник поля и полного поля по точным формулам. С помощью данного метода было исследовано пространственное и спектральное распределение Фурье-гармоник полного поля, а также получен график зависимости продольной компоненты полного электрического поля от времени в фиксированной точке в вакууме. Результаты для Фурье-гармоник подтверждают все выводы аналитического исследования, в частности, возможность эффекта ОЧПИ и его двухпороговость, а также выявляют некоторые дополнительные эффекты. Результаты для полного поля показывают, что при определенных условиях обратное черенковско-переходное излучение может быть доминирующим среди прочих типов излучения.

Глава 3

Электромагнитное поле заряда, пересекающего границу раздела между вакуумом и анизотропной средой

В главе 2 был рассмотрен случай пересечения частицей раздела границы вакуум – левая среда и обнаружен достаточно интересный эффект обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ). Данный эффект может быть весьма перспективным для приложений в области диагностики пучков и определения макроскопических свойств метаматериалов. Однако практическая реализация изотропной левой среды представляет немалые трудности. При этом, поскольку основным условием наличия ОЧПИ в вакууме является обратное излучение Вавилова–Черенкова в среде, интересно рассмотреть случай менее экзотической (как по своим свойствам, так и в плане реализации) анизотропной среды, которая в некотором смысле подобна левой среде. Именно, как было показано в разделе 1.4, при определенных условиях излучение Вавилова–Черенкова в анизотропной среде (1.4.1), (1.4.2) имеет обратный характер и, следовательно, может падать на границу, создавая отраженные и преломленные волны обратного черенковско-переходного излучения.

3.1. Постановка задачи и общие результаты

В данной главе мы рассмотрим электромагнитное поле, возникающее при влете заряженной частицы в негиротропную анизотропную среду, описываемую тензором диэлектрической проницаемости вида

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

и скалярной магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Пусть точечный заряд q пересекает границу раздела (расположенную в плоскости $z = 0$) между изотропной правой средой, описываемой проницаемостями $\epsilon_1(\omega)$ и $\mu_1(\omega)$ и расположенной при $z < 0$, и анизотропной

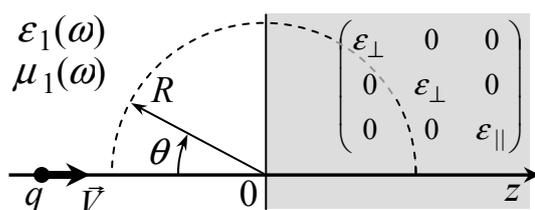


Рис. 3.1. Геометрия задачи.

негиротропной немагнитной ($\mu_2 = 1$) средой ($z > 0$), описываемой тензором $\hat{\epsilon}$ (3.1.1) (рис. 3.1). Заряд движется по закону $z = Vt = c\beta t$, $x = y = 0$. На границе раздела, как обычно, ставятся условия непрерывности касательных компонент электромагнитного поля.

Для описания частотной дисперсии компонент тензора (3.1.1) будем использовать те же модели, что и в разделе 1.4:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{p\perp}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d\perp}}, \quad \omega_{d\perp} \ll \omega_{p\perp}, \quad (3.1.2)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{p\parallel}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d\parallel}}, \quad \omega_{d\parallel} \ll \omega_{p\parallel}. \quad (3.1.3)$$

Среду 1 будем описывать ее магнитной проницаемостью $\mu = 1$ и диэлектрической проницаемостью плазменного типа

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 + 2i\omega\omega_{d1}}, \quad \omega_{d1} \ll \omega_{p1}, \quad (3.1.4)$$

причем

$$\omega_{p1} \ll \omega_{p\perp}, \omega_{p\parallel}.$$

В дальнейшем при аналитическом исследовании мы всюду будем считать, что рассматриваемые частоты удовлетворяют неравенству $|\omega| \gg \omega_{p1}$. При этом полупространство $z < 0$ фактически является вакуумом с $\varepsilon_1 \approx 1$, а плазменная зависимость (3.1.4) есть удобный способ корректно ввести малые потери. Поскольку в конечных результатах будет осуществляться предельный переход к случаю вакуума ($\omega_{p1} \rightarrow 0$), указанное неравенство будет нарушаться только в пределах пренебрежимо малого интервала частот в окрестности $\omega = 0$.

Электромагнитное поле в данной задаче может быть описано формулами, которые представлены, к примеру, в монографии [61]. Если индекс 1 относится к области $z < 0$, а индекс 2 – к области $z > 0$, то эти выражения могут быть записаны в виде

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho}^{(1,2)} \\ E_z^{(1,2)} \\ H_{\varphi}^{(1,2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{\rho}^{q(1,2)} \\ E_z^{q(1,2)} \\ H_{\varphi}^{q(1,2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\rho}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi}^{b(1,2)} \end{Bmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Как и в главе 2, верхний индекс «q» соответствует вынужденному полю, т. е. полю заряда в соответствующей безграничной среде. Вынужденное поле в случае среды (3.1.1) – (3.1.4) рассмотрено в разделе 1.4.

Выражения для свободного поля, обозначенные верхним индексом «b», имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi}^{b(1,2)} \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} E_{\rho}^{b(1,2)} \\ E_z^{b(1,2)} \\ H_{\varphi}^{b(1,2)} \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (3.1.6)$$

$$\begin{cases} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \frac{c}{\omega\varepsilon_1} k_\rho^2 H_1^{(1)}(\rho k_\rho) \\ -\frac{ic}{\omega\varepsilon_1} \frac{k_\rho^3}{k_z^{(1)}} H_0^{(1)}(\rho k_\rho) \\ -\frac{k_\rho^2}{k_z^{(1)}} H_1^{(1)}(\rho k_\rho) \end{cases} B^{(1)}(k_\rho, \omega) \exp(ik_z^{(1)}|z|) dk_\rho, \quad (3.1.7)$$

$$\begin{cases} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{cases} = \frac{q}{2\pi\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \frac{c}{\omega\varepsilon_\perp} k_\rho^2 H_1^{(1)}(\rho k_\rho) \\ \frac{ic}{\omega\varepsilon_\parallel} \frac{k_\rho^3}{k_z^{(2)}} H_0^{(1)}(\rho k_\rho) \\ \frac{k_\rho^2}{k_z^{(2)}} H_1^{(1)}(\rho k_\rho) \end{cases} B^{(2)}(k_\rho, \omega) \exp(ik_z^{(2)}z) dk_\rho, \quad (3.1.8)$$

где

$$B^{(1)}(k_\rho, \omega) = \frac{k_z^{(1)}}{g_3(k_\rho, \omega)} \left(\frac{\beta\varepsilon_1 k_z^{(2)} - \omega c^{-1} \varepsilon_\perp}{k_\rho^2 - s_1^2} + \frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel^{-1} \varepsilon_1 \beta^2}{\omega c^{-1} + \beta k_z^{(2)}} \right), \quad (3.1.9)$$

$$B^{(2)}(k_\rho, \omega) = \frac{k_z^{(2)}}{g_3(k_\rho, \omega)} \left(\frac{\varepsilon_\perp \beta^2}{\omega c^{-1} - \beta k_z^{(1)}} - \frac{\beta k_z^{(1)} \varepsilon_\perp + \omega c^{-1} \varepsilon_1}{k_\rho^2 - s_2^2} \right), \quad (3.1.10)$$

$$k_z^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_\rho^2}, \quad \text{Im} k_z^{(1)} > 0, \quad (3.1.11)$$

$$k_z^{(2)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\parallel - k_\rho^2 \right)}, \quad \text{Im} k_z^{(2)} > 0, \quad (3.1.12)$$

$$g_3(k_\rho, \omega) = \varepsilon_1 k_z^{(2)} + \varepsilon_\perp k_z^{(1)}, \quad (3.1.13)$$

а функции $s_{1,2}(\omega)$ определены, соответственно, формулами (1.1.3), (1.4.4) и требованиями $\text{Im} s_{1,2} > 0$ (формулы (1.1.4), (1.4.5)). Выбор физических ветвей радикалов $k_z^{(1,2)}$, как видно из (3.1.11), (3.1.12), также осуществляется в соответствии с принципом затухания, который требует экспоненциального уменьшения по мере удаления от границы раздела, вследствие чего $\text{Im} k_z^{(1,2)} > 0$.

Прежде всего, отметим, что имеет место следующее свойство, аналогичное (2.1.14). Из вещественности $E_\rho^{b(1,2)}$, $E_z^{b(1,2)}$ и $H_\varphi^{b(1,2)}$ вытекает, что

$$\int_{\Gamma} F_{\omega}^b \exp(-i \omega t) d\omega = 2 \int_{\Gamma^+} \operatorname{Re} \left(F_{\omega}^b \exp(-i \omega t) d\omega \right), \quad (3.1.14)$$

где Γ – контур интегрирования, симметричный относительно мнимой оси, Γ^+ – часть Γ , лежащая в области $\operatorname{Re} \omega > 0$, а F_{ω}^b – любая из функций (3.1.7), (3.1.8). Таким образом, если рассматривать интеграл по вещественным частотам, то достаточно анализировать подынтегральную функцию только на полуоси $\omega > 0$.

Общие выражения, описывающие электромагнитное поле, весьма сходны с формулами предыдущей задачи с изотропной средой. Подынтегральные выражения в (3.1.7), (3.1.8) имеют две пары точек ветвления $\pm k_{1,2}$, где

$$k_1 = \omega c^{-1} \sqrt{\varepsilon_1}, \quad k_2 = \sqrt{\omega^2 c^{-2} \varepsilon_{\parallel}}, \quad \operatorname{Im} k_{1,2} > 0, \quad (3.1.15)$$

и три типа полюсов, являющихся нулями выражений, стоящих в знаменателе. Условно они названы «первыми», «вторыми» и «третьими» (аналогично случаю изотропной среды).

«Первые» полюса:

$$k_{\rho}^2 - s_1^2 = 0, \quad k_{\rho} = \pm s_1, \quad (\text{в среде 1}) \quad (3.1.16)$$

$$\omega c^{-1} - \beta k_z^{(1)} = 0, \quad (\text{в среде 2}) \quad (3.1.17)$$

Преобразуя уравнение (3.1.17)

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} - \beta k_z^{(1)} &= \frac{\omega}{c} - \beta \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_{\rho}^2} = \\ &= \frac{\omega}{c} - \beta \sqrt{s_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \beta^2} - k_{\rho}^2} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 \beta^2}{\omega^2} (k_{\rho}^2 - s_1^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

видим, что «первым» полюсам в среде 2 также соответствуют точки $k_{\rho} = \pm s_1$, причем они лежат на берегу разреза $\operatorname{Im} k_z^{(1)} = 0$ с $\arg k_z^{(1)} = 0$.

«Вторые» полюса:

$$\omega c^{-1} + \beta k_z^{(2)} = 0, \quad (\text{в среде 1}) \quad (3.1.18)$$

$$k_{\rho}^2 - s_2^2 = 0, \quad k_{\rho} = \pm s_2. \quad (\text{в среде 2}) \quad (3.1.19)$$

Уравнение (3.1.18) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} + \beta k_z^{(2)} &= \frac{\omega}{c} + \beta \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} - k_{\rho}^2 \right)} = \\ &= \frac{\omega}{c} + \beta \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \left(s_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \beta^2} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} - k_{\rho}^2 \right)} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2 \beta^2}{\omega^2} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} (k_{\rho}^2 - s_2^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что и в среде 1 «вторым» полюсам соответствуют точки $k_{\rho} = \pm s_2$, причем эти полюса лежат на берегу разреза $\operatorname{Im} k_z^{(2)} = 0$ с $\arg k_z^{(2)} = \pi$.

«Третьи» полюса $\pm k_\rho^{P3}$ удовлетворяют уравнению

$$g_3(k_\rho^{P3}) = \varepsilon_1 k_z^{(2)}(k_\rho^{P3}) + \varepsilon_\perp k_z^{(1)}(k_\rho^{P3}) = 0. \quad (3.1.20)$$

Как и в случае изотропной среды, мы будем использовать два подхода для анализа свободного поля (3.1.6): построение асимптотических представлений для Фурье-гармоник (3.1.7), (3.1.8) с помощью метода перевала и их численный расчет. В асимптотике, как и в главе 2, будем учитывать только существенные в смысле условия (2.1.19) члены.

Выясним взаимное расположение особенностей (разрезов и полюсов) на плоскости k_ρ , учитывая наличие малого поглощения в средах. Используя (3.1.2) и (3.1.3), получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + i\varepsilon''_1, \quad \varepsilon_\perp = \varepsilon'_\perp + i\varepsilon''_\perp, \quad \varepsilon_\parallel = \varepsilon'_\parallel + i\varepsilon''_\parallel. \quad (3.1.21)$$

При выполнении неравенств

$$\omega \gg \omega_d \equiv \max\{\omega_{d1}, \omega_{d\parallel}, \omega_{d\perp}\}, \quad |\omega - \omega_{p\parallel}| \gg \omega_{d\parallel}, \quad |\omega - \omega_{p\perp}| \gg \omega_{d\perp}, \quad (3.1.22)$$

имеют место следующие соотношения

$$\varepsilon''_{1,\perp,\parallel} \ll |\varepsilon'_{1,\perp,\parallel}|, \quad \varepsilon''_1 \ll \varepsilon''_{\perp,\parallel}, \quad (3.1.23)$$

где

$$\varepsilon'_1 \approx 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon''_1 \approx 2 \frac{\omega_{p1}^2 \omega_{d1}}{\omega^3}, \quad \varepsilon'_{\perp,\parallel} \approx 1 - \frac{\omega_{p\perp,\parallel}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon''_{\perp,\parallel} \approx 2 \frac{\omega_{p\perp,\parallel}^2 \omega_{d\perp,\parallel}}{\omega^3}. \quad (3.1.24)$$

При аналитическом исследовании мы будем рассматривать только частоты, удовлетворяющие неравенству $\omega \gg \omega_{p1}$ и соотношениям (3.1.23). Отметим, что мнимые части всех проницаемостей положительны, вещественные части компонент ε_\perp и ε_\parallel могут быть любого знака, тогда как величина ε'_1 всегда положительна.

Разрезы на плоскости k_ρ идут по линиям $\text{Im} k_z^{(1,2)} = 0$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{Im} \left(k_z^{(1,2)} \right)^2 = 0, \\ \text{Re} \left(k_z^{(1,2)} \right)^2 > 0. \end{cases} \quad (3.1.25)$$

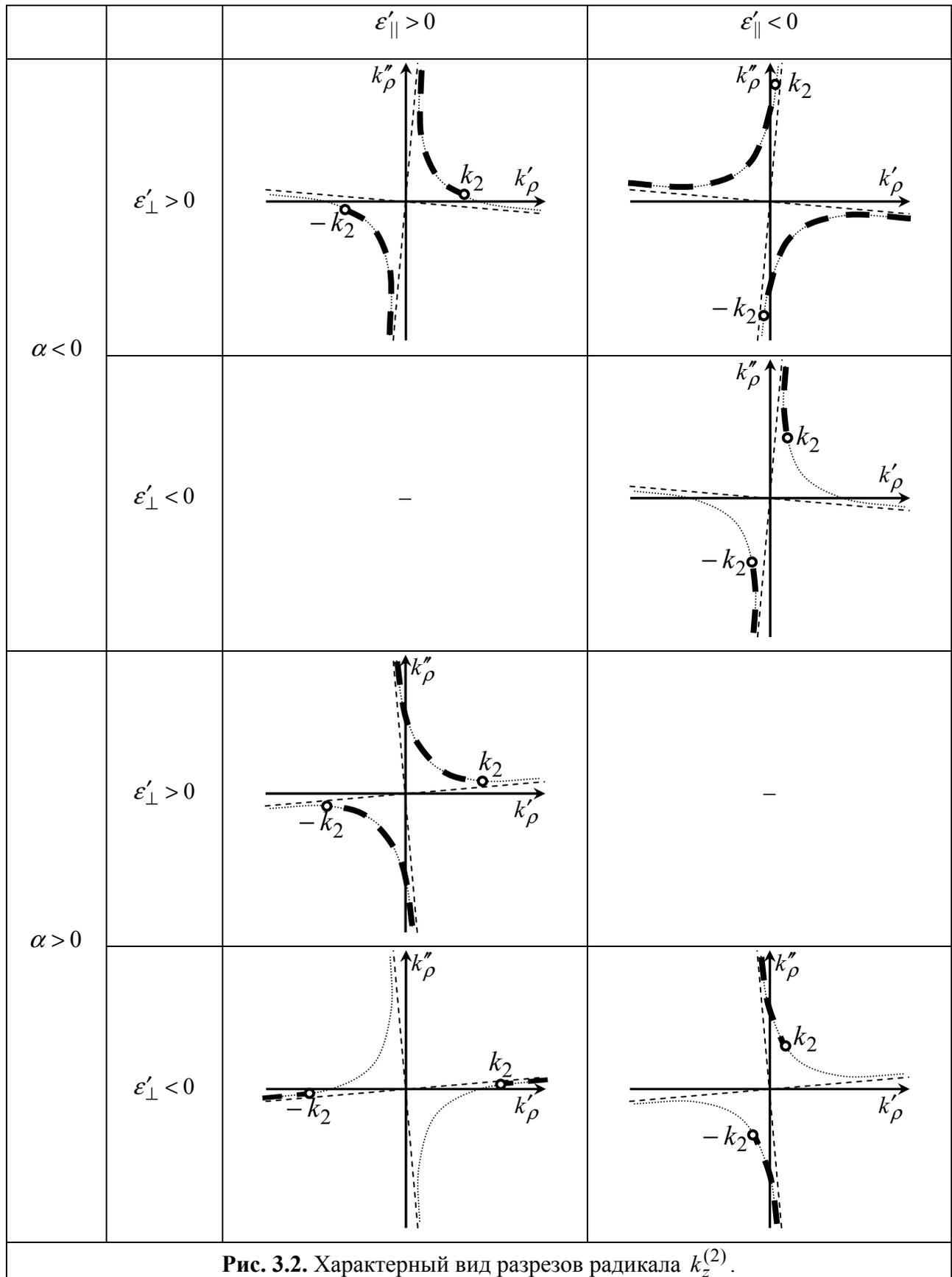


Рис. 3.2. Характерный вид разрезов радикала $k_z^{(2)}$.

Построение разрезов радикала $k_z^{(1)}$ представлено в разделе 2.1 (см. формулы (2.1.23) и рис. 2.3). Для разреза радикала $k_z^{(2)}$ приходим к следующим условиям (с точностью до членов порядка $\varepsilon''_{\perp} / |\varepsilon'_{\perp}|$, $\varepsilon''_{\parallel} / |\varepsilon'_{\parallel}|$):

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} - \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right) (k'_{\rho})^2 + \frac{2}{\varepsilon'_{\parallel}} k'_{\rho} k''_{\rho} - \frac{1}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} - \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right) (k''_{\rho})^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} = 0, \\ -\frac{1}{\varepsilon'_{\parallel}} (k'_{\rho})^2 + \frac{2}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} - \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right) k'_{\rho} k''_{\rho} + \frac{1}{\varepsilon'_{\parallel}} (k''_{\rho})^2 + \frac{\omega^2}{c^2} > 0. \end{cases} \quad (3.1.26)$$

Можно показать, что первому уравнению (3.1.26) соответствует равнобочная гипербола, взаимно перпендикулярные асимптоты которой повернуты относительно осей k'_{ρ} и k''_{ρ} на угол α , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}} - \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right). \quad (3.1.27)$$

Как видно из (3.1.27), малый угол α может быть как положительным, так и отрицательным. Границей области, определяемой неравенством системы (3.1.26), также является равнобочная гипербола, асимптоты которой повернуты относительно осей k'_{ρ} и k''_{ρ} на угол $\alpha + \pi/4$. В результате разрезы радикала $k_z^{(2)}$ имеют вид, представленный на рис. 3.2.

Для точек ветвления $\pm k_{1,2}$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} (k'_{1,2})^2 - (k''_{1,2})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'_{1,\parallel}, \\ 2k'_{1,2} k''_{1,2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''_{1,\parallel}, \end{cases} \quad (3.1.28)$$

где индексу «1» в левой части соответствует индекс «1» в правой части, а индексу «2» в левой части соответствует индекс «||» в правой. Как видно, точки ветвления всегда находятся в I и III четвертях (т.к. $\varepsilon''_{1,\parallel} > 0$), причем при условии $\varepsilon'_{1,\parallel} > 0$ они лежат вблизи вещественной оси, $k''_{1,2}/k'_{1,2} \sim \varepsilon''_{1,\parallel}/\varepsilon'_{1,\parallel}$, а при условии $\varepsilon'_{1,\parallel} < 0$ – вблизи мнимой оси, $k'_{1,2}/k''_{1,2} \sim \varepsilon''_{1,\parallel}/|\varepsilon'_{1,\parallel}|$. Приближенное решение системы (3.1.28), соответствующее неравенствам (3.1.22), (3.1.23), имеет вид

$$\begin{aligned} k'_{1,2} &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{1,\parallel}}, \quad k''_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''_{1,\parallel}}{\sqrt{\varepsilon'_{1,\parallel}}} \quad \text{при} \quad \varepsilon'_{1,\parallel} > 0, \\ k''_{1,2} &= \frac{\omega}{c} \sqrt{|\varepsilon'_{1,\parallel}|}, \quad k'_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''_{1,\parallel}}{\sqrt{|\varepsilon'_{1,\parallel}|}} \quad \text{при} \quad \varepsilon'_{1,\parallel} < 0. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

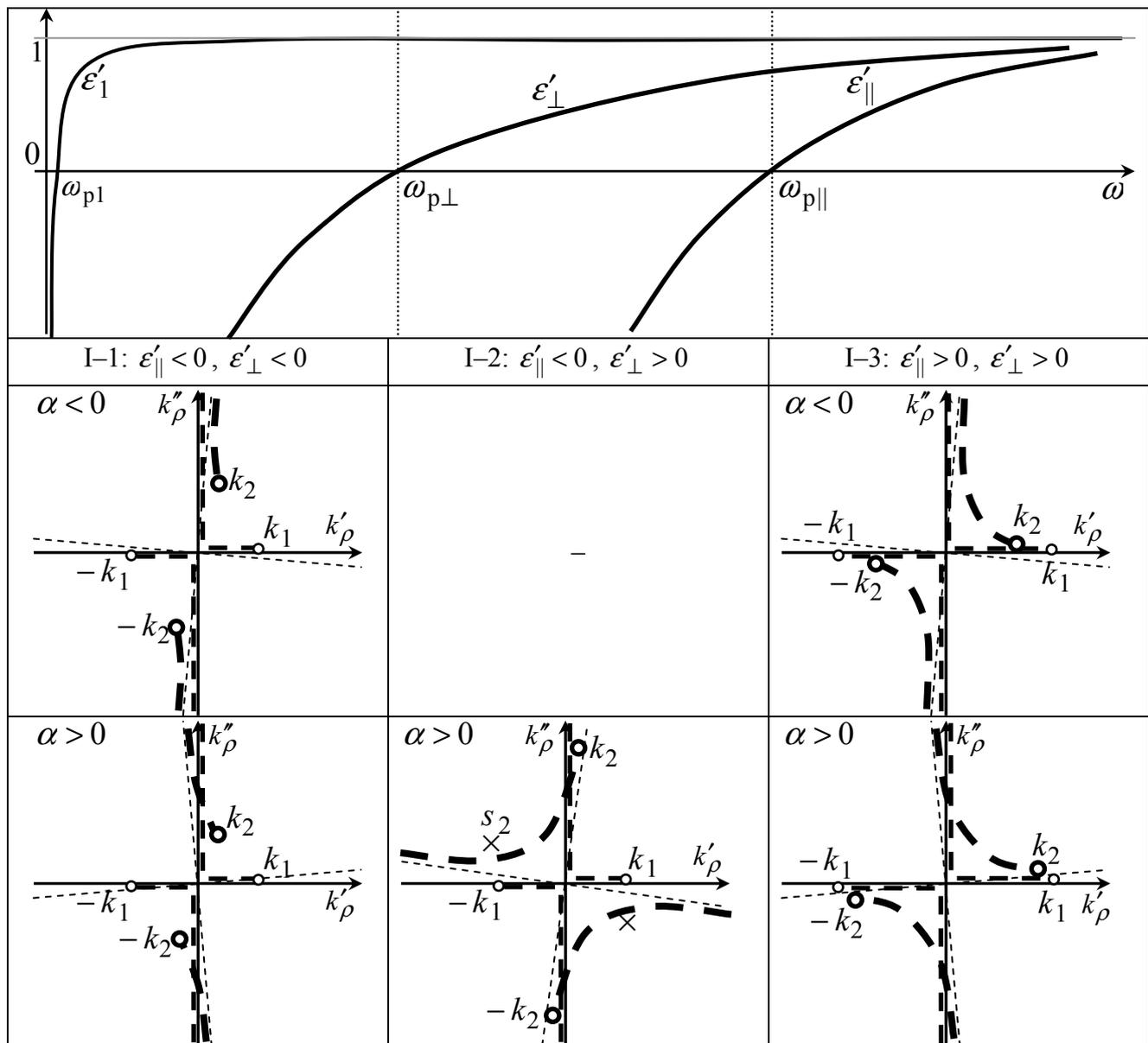
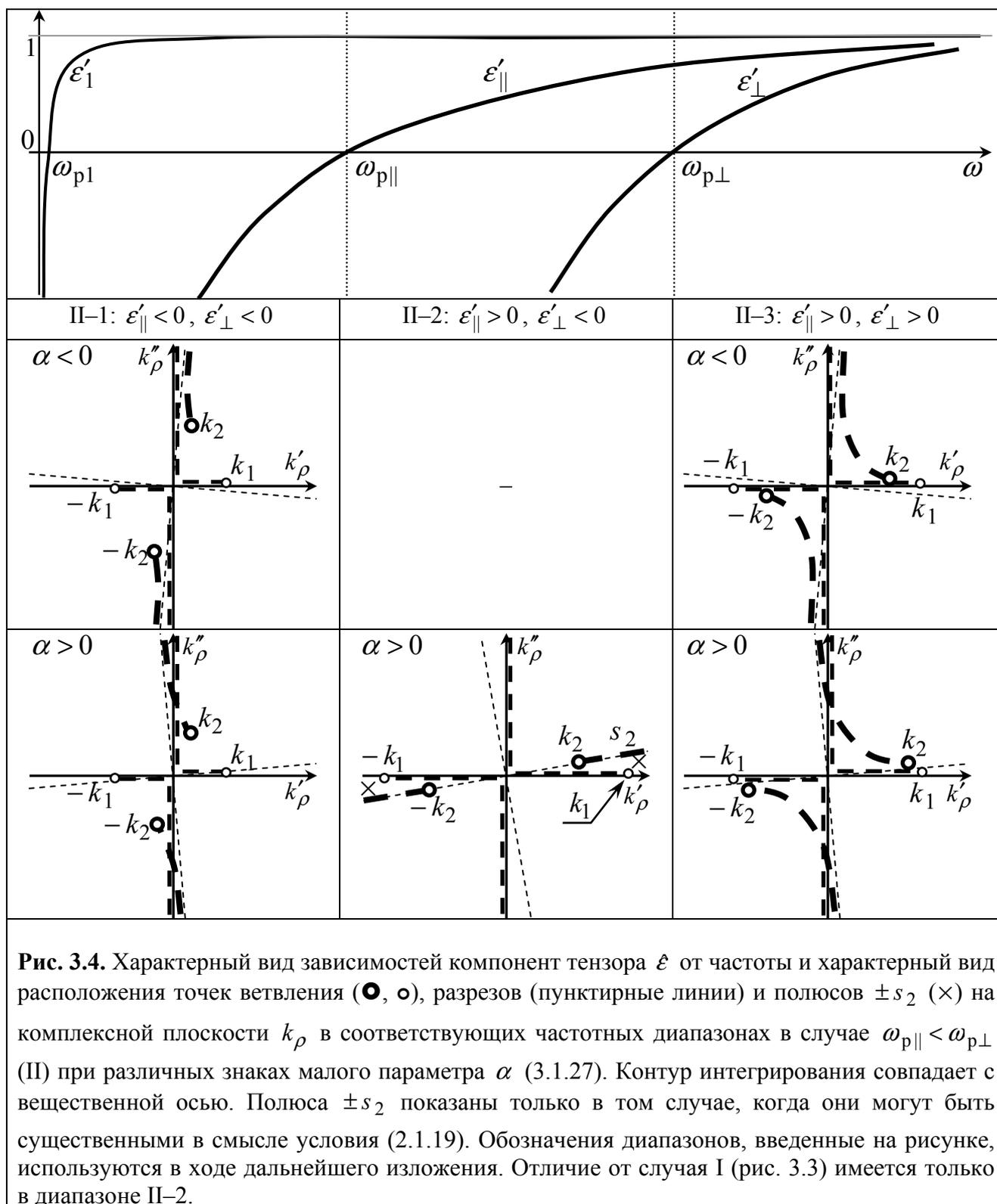


Рис. 3.3. Характерный вид зависимостей компонент тензора ϵ от частоты и характерный вид расположения точек ветвления (\bullet , \circ), разрывов (пунктирные линии) и полюсов $\pm s_2$ (\times) на комплексной плоскости k_ρ в соответствующих частотных диапазонах в случае $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ (I) при различных знаках малого параметра α (3.1.27). Контур интегрирования совпадает с вещественной осью. Полюса $\pm s_2$ показаны только в том случае, когда они могут быть существенными в смысле условия (2.1.19). Обозначения диапазонов, введенные на рисунке, используются в ходе дальнейшего изложения.



В дальнейшем мы рассмотрим отдельно две ситуации: $\omega_{p\perp} < \omega_{p\parallel}$ (I) и $\omega_{p\perp} > \omega_{p\parallel}$ (II). На рисунках 3.3 и 3.4 схематично представлены зависимости ε'_1 , ε'_{\parallel} и ε'_{\perp} от частоты ω в двух указанных случаях, а также характерный вид расположения точек ветвления и разрезов на комплексной плоскости k_{ρ} в различных частотных диапазонах. По сути случаи I и II отличаются только диапазонами I–2 и II–2, заключенными между плазменными частотами.

Как и в главе 2 при написании асимптотики мы будем опираться на условие существенности (2.1.19) (это условие означает, что в асимптотике будут учитываться только члены, убывающие с расстоянием либо $\sim R^{-1}$, либо $\sim \rho^{-1/2}$, т. е. только сферические и цилиндрические волны).

Как уже отмечалось в разделе 2.2, «первые» полюса могут давать лишь экспоненциально малые вклады в Фурье-гармоники свободного поля, поэтому они несущественны для нас. Аналогичным образом Фурье-гармоники вынужденного поля в среде 1 (1.1.2) также не удовлетворяют условию существенности (2.1.19), и в области $z < 0$ полное поле определяется только свободным полем. Вклады «третьих» полюсов, как будет показано в приложении В, представляют собой поверхностные волны, также не удовлетворяющие условию (2.1.19). В итоге, существенными могут оказаться только «вторые» полюса $k_{\rho} = \pm s_2$. Как следует из определения s_2 (1.4.4), в диапазонах I–1, II–1, I–3 и II–3 при выполнении условий (3.1.22) имеет место неравенство $|\operatorname{Re} s_2^2| \ll |\operatorname{Im} s_2^2|$ (модуль означает, что как $\operatorname{Re} s_2^2$, так и $\operatorname{Im} s_2^2$ могут быть отрицательными), поэтому $|\operatorname{Re} s_2| \ll \operatorname{Im} s_2$, полюса $k_{\rho} = \pm s_2$ расположены вблизи мнимой оси k_{ρ} и заведомо несущественны. Только в диапазонах I–2 и II–2 при выполнении условий (3.1.22) справедливо соотношение $\operatorname{Im} s_2 \ll |\operatorname{Re} s_2|$, и полюса $\pm s_2$ могут в принципе быть существенными, поэтому только в этих двух диапазонах эти полюса показаны на рисунках 3.3 и 3.4.

3.2. Асимптотики поля в вакууме

Процедура построения асимптотик поля в среде 1 принципиально ничем не отличается от аналогичной процедуры в случае изотропной среды (см. раздел 2.2). Более того, общий вид комплексной плоскости ψ , седловая точка $\psi_{S1} = \theta$ и КНС $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ в точности совпадают. Отличия имеются только в расположении точек ветвления $\pm \psi_{b2}$ ($\sin \psi_{b2} = k_1^{-1} k_2$) и соответствующих им разрезов, а также в расположении полюсов $\pm \psi_2^{(1)}$ ($\sin \psi_2^{(1)} = k_1^{-1} s_2$), находящихся на одном из берегов этих разрезов (см. формулу (3.1.20)). Поэтому, не повторяя аналогичных выкладок, перейдем к анализу комплексной плоскости ψ .

На рис. 3.5, а представлен вид комплексной плоскости ψ в диапазонах I–1 и II–1. Как

видно, полюса $\pm\psi_2^{(1)}$ расположены вблизи мнимой оси, т. е. заведомо несущественны. Комплексная плоскость ψ для диапазонов I–3 и II–3 представлена на рис. 3.5, б. Полюса $\pm\psi_2^{(1)}$ также расположены вблизи мнимой оси, и не вносят вклада в асимптотику. Как видно из рис. 3.5, б, в этом случае имеются вклады интегралов по контурам наискорейшего спуска Γ_{b2}^+ , исходящим из точки ветвления ψ_{b2} . Как и в случае левой среды (см. раздел 2.2.1), они определяют боковые волны, которые не учитываются в асимптотике в силу их относительно быстрого убывания. Таким образом, в рассмотренных диапазонах асимптотика представляет собой сферическую волну переходного излучения:

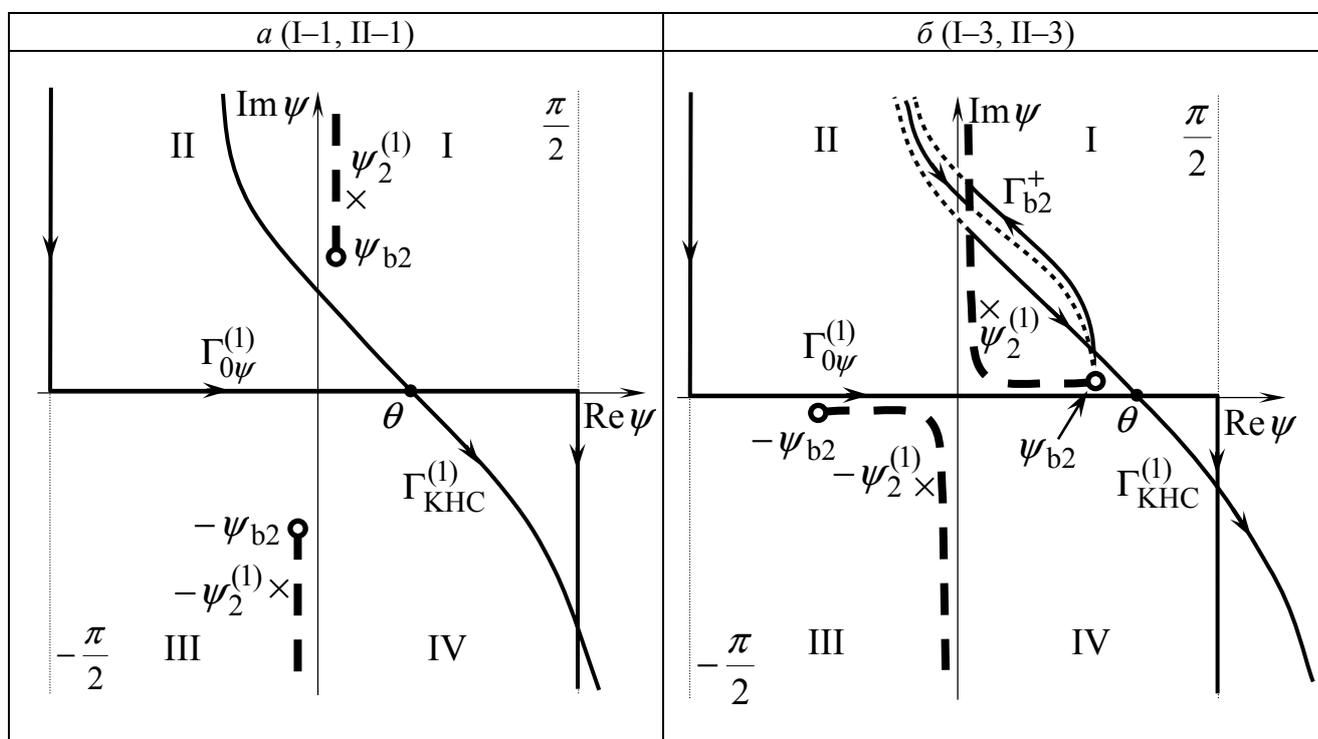


Рис. 3.5. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 1 ($z < 0$) в случае диапазонов I–1, II–1 (а) и диапазонов I–3, II–3 (б). Римские цифры на рисунке означают четверти плоскости k_ρ . Значком \bullet отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезy, значки \times обозначают полюса $\pm\psi_2^{(1)}$, $\psi = \theta$ – седловая точка, $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ – контур наискорейшего спуска, контур $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ . Части контуров $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ и Γ_{b2}^+ , показанные мелким пунктиром (точками), лежат на листе римановой поверхности с $\text{Im}k_z^{(2)} < 0$.

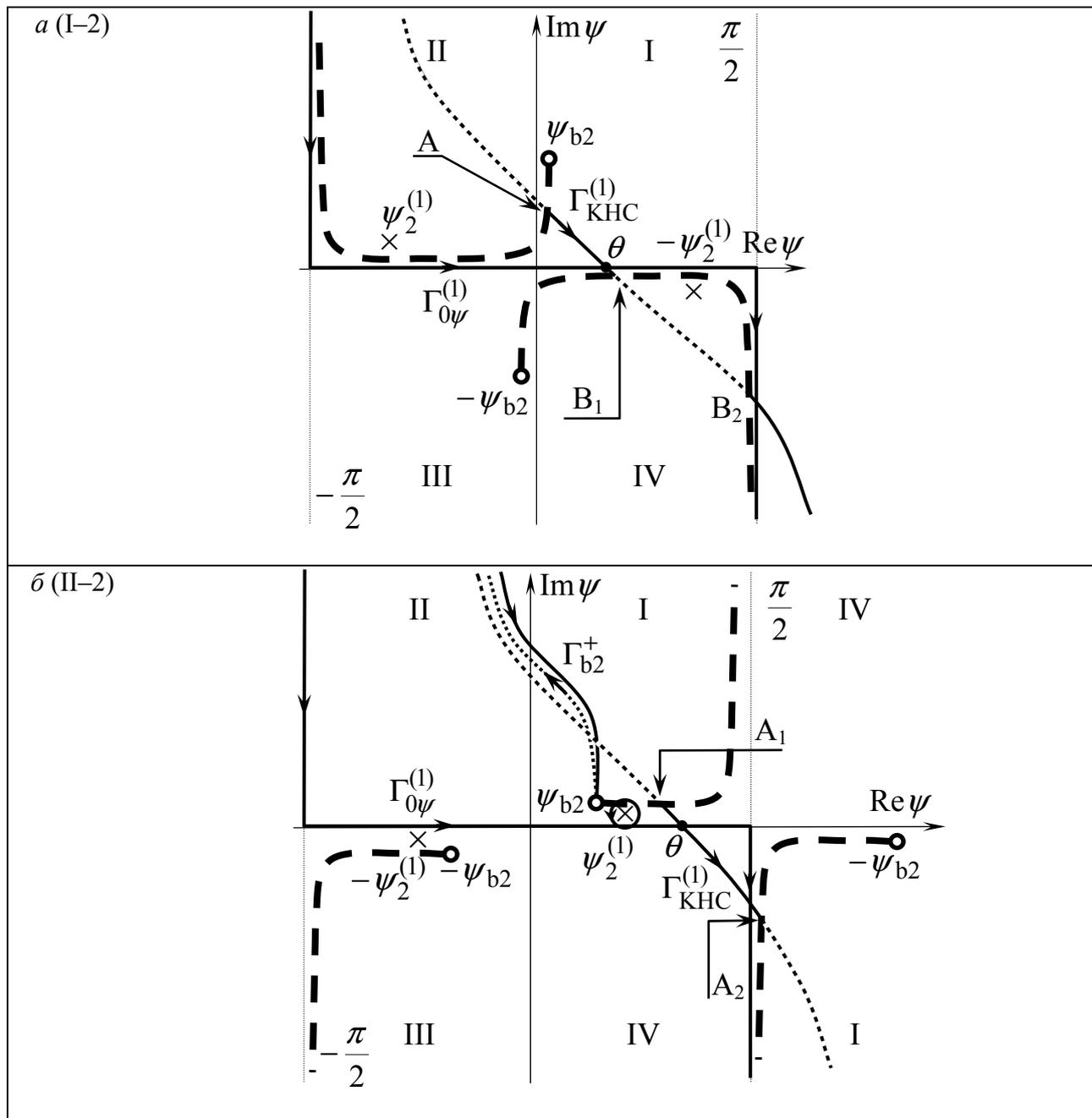


Рис. 3.6. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 1 ($z < 0$) в случае диапазонов I-2 (а) и II-2 (б). Римские цифры на рисунке означают четверти плоскости k_ρ . Значком \bullet отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значки \times обозначают полюса $\pm\psi_2^{(1)}$, $\psi = \theta$ – седловая точка, $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ – контур наискорейшего спуска, контур $\Gamma_{0\psi}^{(1)}$ – исходный контур интегрирования. Части контуров $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ и Γ_{b2}^\pm , показанные мелким пунктиром, лежат на листе с $\text{Im } k_z^{(2)} < 0$.

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ E_{z\omega}^{b(1)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2} h_1}{k_1 \sin \theta} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-3\pi i/4) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-\pi i/4) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\theta, \omega) \exp(-3\pi i/4) \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_1 R)}{R}, \quad (3.2.1)$$

где $h_1 = \sqrt{-2/\varphi_1''(\theta)}$, $\arg h_1 = -\pi/4$,

$$\begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{q}{2\pi \beta c} \begin{Bmatrix} c[\omega \varepsilon_1]^{-1} (k_1 \sin \psi)^2 k_1 \cos \psi \\ -i c[\omega \varepsilon_1]^{-1} (k_1 \sin \psi)^3 \\ -(k_1 \sin \psi)^2 \end{Bmatrix} B^{(1)}(k_1 \sin \psi, \omega). \quad (3.2.2)$$

Выражение (3.2.1) справедливо при $1/\sqrt{\Omega_1} \ll \theta < \pi/2$ и полностью аналогично выражению (2.2.6) случая изотропной среды.

Вид комплексной плоскости ψ для диапазонов I–2 и II–2 представлен на рис. 3.6. В случае диапазона I–2 (рис. 3.6, а) полюса $\pm \psi_2^{(1)}$ располагаются на берегах разреза таким образом, что не затрагиваются при трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(1)} \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. Действительно, после трансформации контур интегрирования на отрезках $(+\infty, A)$ и (B_1, B_2) идет по листу $\text{Im} k_z^{(2)} < 0$. При трансформации исходный контур пересекает разрез, переходя с берега $\arg k_z^{(2)} = 0$ на листе $\text{Im} k_z^{(2)} > 0$ на берег с тем же аргументом на листе $\text{Im} k_z^{(2)} < 0$. Полюс при этом не затрагивается, поскольку он расположен на берегу с $\arg k_z^{(2)} = \pi$. В этом случае асимптотика поля представляется той же формулой (3.2.1).

Иная картина возникает в диапазоне II–2 ($\omega_{p\parallel} < \omega < \omega_{p\perp}$), где берега разреза $\text{Im} k_z^{(2)} = 0$ с $\arg k_z^{(2)} = \pi$, на которых лежат полюса $\pm \psi_2^{(1)}$, обращены к исходному контуру интегрирования (рис. 3.6, б). После трансформации контур интегрирования состоит из двух частей: части, идущей вдоль $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$, и части $\Gamma_{b_2}^+$ идущей вдоль контуров наискорейшего спуска, исходящих из точки ветвления ψ_{b_2} . Отрезок контура вдоль $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$ между точками A_1 и A_2 лежит на листе $\text{Im} k_z^{(1)} > 0$, а остальная его часть лежит на листе $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$. Седловая точка проходится контуром по листу с $\text{Im} k_z^{(1)} > 0$ и $\text{Im} k_z^{(2)} > 0$. При трансформации полюс $\psi_2^{(1)}$ захватывается на листе с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$, при этом $\text{Re} k_z^{(1)}(s_2) > 0$, $\text{Im} k_z^{(1)}(s_2) < 0$. В итоге получаем:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \int_{\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \\ h_{\varphi\omega}^{b(1)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(R k_1 \sin \theta \sin \psi) \\ H_0^{(1)}(R k_1 \sin \theta \sin \psi) \\ H_1^{(1)}(R k_1 \sin \theta \sin \psi) \end{Bmatrix} \exp(i R k_1 \cos \theta \cos \psi) d\psi + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Чтобы выписать строгое условие захвата полюса $\psi_2^{(1)}$, поступим аналогично случаю изотропной среды. Опираясь на условие существенности (2.2.19) отметим, что волна, соответствующая полюсу $\psi_2^{(1)}$, будет значима для асимптотики в том случае, если она имеет лишь слабое экспоненциальное затухание вследствие наличия потерь. Другими словами, для ее существенности должны быть выполнены следующие условия:

$$\operatorname{Re} s_2 \gg \operatorname{Im} s_2, \quad \operatorname{Re} k_z^{(1)}(s_2) \gg \operatorname{Im} k_z^{(1)}(s_2),$$

или

$$\operatorname{Re} s_2^2 \gg \operatorname{Im} s_2^2, \quad \operatorname{Re} \left(k_z^{(1)}(s_2) \right)^2 \gg \operatorname{Im} \left(k_z^{(1)}(s_2) \right)^2,$$

что эквивалентно условиям (с точностью до членов $\sim \varepsilon''_{\perp} / |\varepsilon'_{\perp}|$, $\varepsilon''_{\parallel} / \varepsilon'_{\parallel}$)

$$|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \gg \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right) + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|}, \quad (3.2.4)$$

$$\varepsilon_1 \beta^2 - \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right) \gg \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right) + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right). \quad (3.2.5)$$

Условие (3.2.4) выполнено для любых значений $\omega_{p\parallel} < \omega < \omega_{p\perp}$ и любых β . Условие же (3.2.5) при стремлении диссипации к нулю ($\varepsilon''_{\parallel, \perp} \rightarrow 0$) и фиксированной скорости β можно записать в виде

$$\omega_{p\parallel} < \omega < \Omega(\beta), \quad (3.2.6)$$

где $\Omega(\beta)$ определяется из формулы

$$\Omega^2(\beta) = \frac{\omega_{p\parallel}^2 (1 - \beta^2)}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{p\parallel}^4 (1 - \beta^2)^2}{4} + \omega_{p\parallel}^2 \omega_{p\perp}^2 \beta^2}. \quad (3.2.7)$$

При фиксированной частоте условие (3.2.5) имеет вид

$$\beta > \beta_{\text{RCTR}}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{p\parallel}^2)}{\omega_{p\parallel}^2 (\omega_{p\perp}^2 - \omega^2)}}. \quad (3.2.8)$$

Учет ненулевых потерь ($\varepsilon''_{\parallel, \perp} \neq 0$) приводит к некоторому сужению интервалов (3.2.6) и (3.2.8). Например, при фиксированной частоте для существенности полюса $\psi_2^{(1)}$ необходимо, чтобы наряду с (3.2.8) выполнялось следующее неравенство:

$$\beta - \beta_{\text{RCTR}} \gg \frac{\beta_{\text{RCTR}}}{2} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right). \quad (3.2.9)$$

Таким образом, для выполнения условия (3.2.5) относительная скорость β должна быть достаточно далека от порогового значения β_{RCTR} . Аналогично можно показать, что для выполнения (3.2.5) при фиксированном β частота ω должна быть достаточно далека от

пороговых значений $\omega_{p\parallel}$ и Ω . Отметим, что условие $\beta > \beta_{\text{RCTR}}$ ($\omega < \Omega$) и условие (3.2.9) считаются выполненными на рис. 3.6, б.

Отметим, что при выполнении (3.2.4) и (3.2.5) имеют место следующие разложения:

$$s_2 \approx s_2^{(0)} + s_2^{(1)} + s_2^{(2)}, \quad (3.2.10)$$

$$k_z^{(1)}(s_2) \approx [k_z^{(1)}(s_2)]^{(0)} + [k_z^{(1)}(s_2)]^{(1)} + [k_z^{(1)}(s_2)]^{(2)}, \quad (3.2.11)$$

где

$$s_2^{(0)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{\sqrt{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}{\sqrt{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}, \quad (3.2.12)$$

$$s_2^{(1)} = \frac{i}{2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{\sqrt{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}{\sqrt{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}} \left[\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right], \quad (3.2.13)$$

$$s_2^{(2)} = \frac{1}{8} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{\sqrt{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}{\sqrt{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}} \left\{ \left[\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} - \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right]^2 - 4 \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right)^2 \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right\}, \quad (3.2.14)$$

$$[k_z^{(1)}(s_2)]^{(0)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_{\parallel}} - \frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}, \quad (3.2.15)$$

$$[k_z^{(1)}(s_2)]^{(1)} = -\frac{i}{2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_{\parallel}} - \frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_{\parallel}} - \frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}} \left[\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right], \quad (3.2.16)$$

$$[k_z^{(1)}(s_2)]^{(2)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left\{ [k_z^{(1)}(s_2)]^{(0)} \right\}^2 + (s_2^{(0)})^2}{\left\{ [k_z^{(1)}(s_2)]^{(0)} \right\}^3} (s_2^{(1)})^2 + 2 \frac{s_2^{(0)} s_2^{(2)}}{[k_z^{(1)}(s_2)]^{(0)}} \right\}, \quad (3.2.17)$$

а верхний индекс в скобках означает порядок малости по параметрам

$$\frac{\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right) + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|}}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1} \ll 1, \quad \frac{\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right) + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right)}{\varepsilon_1 \beta^2 - \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \left(|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2 + 1 \right)} \ll 1 \quad (3.2.18)$$

для s_2 и $k_z^{(1)}(s_2)$ соответственно. Отметим, что разложения (3.2.10) – (3.2.17) получены с помощью формулы двукратного ряда Тейлора для функций s_2 и $k_z^{(1)}(s_2)$. Эти функции были записаны в виде

$$s_2(\xi, \eta) = \frac{\omega}{c\beta} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel} \beta^2 (1+i\eta) + \frac{\varepsilon'_{\parallel} (1+i\eta)}{|\varepsilon'_{\perp}| (1-i\xi)}}, \quad k_z^{(1)}(s_2) = k_z^{(1)}(s_2(\xi, \eta)), \quad \xi \equiv \frac{\varepsilon'_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|}, \quad \eta \equiv \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}},$$

и разложены в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Чтобы выписать строгие условия захвата полюса $\psi_2^{(1)}$, найдем угол θ_1 , при котором данный полюс лежит точно на $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. В этом случае точка $\psi = \psi_2^{(1)}$ удовлетворяет системе (2.2.4) при $\psi = \psi_2^{(1)}$ и $\theta = \theta_1$. Воспользовавшись (3.2.10) – (3.2.17), получаем следующую систему для нахождения θ_1 :

$$\begin{cases} U_1^{(0)}(\theta_1) + U_1^{(2)}(\theta_1) = 0, \\ U_1^{(1)}(\theta_1) > 0, \end{cases} \quad (3.2.19)$$

где

$$U_1^{(0)}(\theta) = k_1 (1 - \cos(\theta - \theta_{10})), \quad (3.2.20)$$

$$U_1^{(1)}(\theta) = \frac{k_1}{2} \operatorname{tg} \theta_{10} \left[\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right] \sin(\theta - \theta_{10}), \quad (3.2.21)$$

$$U_1^{(2)}(\theta) = - \left[k_z^{(1)}(s_2) \right]^{(2)} \cos \theta - s_2^{(2)} \sin \theta, \quad (3.2.22)$$

$$\sin \theta_{10} = \sqrt{\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}, \quad \cos \theta_{10} = \sqrt{\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - 1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}}. \quad (3.2.23)$$

Верхний индекс величин $U_1^{(0,1,2)}$ означает порядок малости по параметрам (3.2.18), а нижний индекс означает принадлежность к среде 1. Из (3.2.20) – (3.2.23) видно, что имеют место свойства, аналогичные (2.2.23), (2.2.24):

$$U_1^{(0)}(\theta_{10}) = U_1^{(1)}(\theta_{10}) = 0, \quad (3.2.24)$$

$$\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \theta}(\theta_{10}) = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial \theta^2}(\theta_{10}) = k_1, \quad \left[\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \theta}(\theta_{10}) \right]^2 = 2k_1 |U_1^{(2)}(\theta_{10})|. \quad (3.2.25)$$

Рассуждая в духе метода последовательных приближений (см. раздел 2.2.1 и формулы (2.2.25) – (2.2.29)), можно получить, что искомый угол θ_1 имеет вид

$$\theta_1 = \theta_{10} + \delta \theta_1, \quad (3.2.26)$$

где θ_{10} дается формулой (3.2.23), а поправка первого порядка малости имеет вид

$$\delta \theta_1 = \sqrt{\frac{2}{k_1} |U_1^{(2)}(\theta_{10})|}. \quad (3.2.27)$$

Таким образом, условие захвата полюса $\psi_2^{(1)}$ имеет вид $\theta > \theta_1$. Теперь можно записать выражение для вкладов полюса в диапазоне II–2:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{array} \right\} = \frac{iq}{\beta c} \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_2 k_z^{(1)}(s_2)}{g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ -i s_2^2 H_0^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ \frac{-s_2 [\omega \varepsilon_1]}{c g_3^*(\omega)} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \end{array} \right\} \exp(i k_z^{(1)}(s_2) R \cos \theta) \Theta(\theta - \theta_1), \quad (3.2.28)$$

$$g_3^*(\omega) = -\frac{\omega \varepsilon_1}{c\beta} + \varepsilon_{\perp} k_z^{(1)}(s_2), \quad (3.2.29)$$

$\Theta(\xi)$ – функция единичного включения (Хэвисайда), $\text{Im} k_z^{(1)}(s_2) < 0$.

Как и в случае левой среды, второе слагаемое в формуле (3.2.3) представляет собой преломленное из среды 2 в среду 1 излучение Вавилова-Черенкова. Мы называем его обратным черенковско-переходным излучением (ОЧПИ) по тем же причинам, что и в случае левой среды. Как было показано в разделе 1.4, в рассматриваемом частотном диапазоне $\omega_{p\parallel} < \omega < \omega_{p\perp}$ имеем $\varepsilon'_{\parallel} > 0$, $\varepsilon'_{\perp} < 0$, и вектор групповой скорости (и плотности энергии) излучения Вавилова-Черенкова направлен к границе раздела (см. рис. 1.9). Таким образом, обратный характер излучения Вавилова-Черенкова, приводящий к появлению ОЧПИ в среде 1, возникает вследствие анизотропии (3.1.1) и дисперсии вида (3.1.2), (3.1.3).

Неравенство $\theta > \theta_1$, определяющее область существования ОЧПИ в среде 1, можно записать также в следующем виде:

$$\sin \theta > \sqrt{\frac{\varepsilon'_{\parallel}}{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}{|\varepsilon'_{\perp}| \beta^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right) \right)}. \quad (3.2.30)$$

Если пренебречь потерями, положив $\varepsilon''_{\parallel} = \varepsilon''_{\perp} = 0$, то формулу (3.2.30) можно переписать в виде

$$\beta > \sqrt{\frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{p\parallel}^2)}{(\omega_{p\perp}^2 - \omega^2) (\omega_{p\parallel}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta - \omega^2)}}, \quad (3.2.31)$$

что можно трактовать как наличие нижнего порога, зависящего от угла наблюдения. При $\theta = \pi/2$ из (3.2.31) получим условие (3.2.8). При $\beta < \beta_{\text{RCTR}}(\omega)$ обратное излучение Вавилова-Черенкова испытывает полное внутреннее отражение на границе. Действительно, в этом случае $\text{Re}(k_z^{(1)}(s_2))^2 < 0$, $\text{Re} k_z^{(1)}(s_2) \ll \text{Im} k_z^{(1)}(s_2)$, и преломленная волна (3.2.28) приобретает поверхностный характер, что и означает полное внутреннее отражение.

В диапазоне II–2, как и в ЛЧД II–2 левой среды, при условии (3.2.6) или (3.2.8) полюс

$\psi_2^{(1)}$ может оказаться вблизи седловой точки θ . Поэтому, строго говоря, в данном диапазоне для интеграла вдоль КНС (первое слагаемое в (3.2.3)) необходимо пользоваться равномерным асимптотическим представлением [92]. В результате для Фурье-гармоник свободного поля может быть получено представление аналогичное (2.2.33), которое верно при $\Omega_1 \gg 1$, $1/\sqrt{\Omega_1} \ll \theta < \pi/2$ независимо от расстояния между седловой точкой и указанным полюсом. Однако мы не будем его выписывать ввиду громоздкости, а ограничимся оценкой области «полутени», вне которой справедлива неравномерная асимптотика.

Процедура оценки размеров области «полутени» аналогична соответствующей процедуре в случае изотропной среды (см. раздел 2.2.2), поэтому приведем сразу конечный результат. Область «полутени» определяется неравенствами

$$|\theta - \theta_{10}| \lesssim \Delta\theta_1, \quad R \lesssim R_1, \quad (3.2.32)$$

где

$$\Delta\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{k_1 R} \left(1 - \frac{R}{R_1}\right)}, \quad (3.2.33)$$

$$R_1 = \frac{1}{|U_1^{(2)}(\theta_{10})|} = \frac{8}{k_1} \left[\operatorname{tg} \theta_{10} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + |\varepsilon'_{\perp}| \beta^2} \right) \right]^{-2}. \quad (3.2.34)$$

Отметим, что величину $\delta\theta_1$ (3.2.27) удобно выразить через R_1 :

$$\delta\theta_1 = \sqrt{2/k_1 R_1}. \quad (3.2.35)$$

Вне области «полутени», т. е. когда выполнено либо неравенство $R \gg R_1$, либо неравенство $|\theta - \theta_{10}| \gg \Delta\theta_1$, асимптотическое представление (3.2.3) принимает вид

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)S} \\ E_{z\omega}^{b(1)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{Bmatrix}, \quad (3.2.36)$$

где первое слагаемое описывается формулой (3.2.1), а второе – формулой (3.2.28).

3.3. Асимптотики поля в среде

В данном разделе мы обсудим процедуру получения асимптотик поля в области $z > 0$ и рассмотрим только самый интересный диапазон II–2 (см. рис. 3.4), когда в среде 1 один из существенных полюсов дает вклад, представляющий собой обратное черенковско-переходное излучение (ОЧПИ). В данном диапазоне $\varepsilon'_{\perp} < 0$, $\varepsilon'_{\parallel} > 0$. Ход рассуждений для

получения асимптотик аналогичен случаю изотропной среды. Как обычно, введем новую переменную ψ , такую что $k_\rho = k_2 \sin \psi$. Радикал $k_z^{(2)}$ (3.1.12) запишем в виде

$$k_z^{(2)} = k_2 \sqrt{\varepsilon_\perp / \varepsilon_\parallel} \cos \psi, \quad \text{Im} \sqrt{\varepsilon_\perp / \varepsilon_\parallel} > 0, \quad (3.3.1)$$

при этом вместо требования $\text{Im} k_z^{(2)} > 0$ будем иметь условие $\text{Re}(k_2 \cos \psi) > 0$.

Далее, аналогично (2.4.2) получаем:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\phi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{0\psi}^{(2)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_0^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \end{Bmatrix} \exp \left(i R k_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}} \cos(\pi - \theta) \cos \psi \right) d\psi, \quad (3.3.2)$$

$$\begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{q}{2\pi \beta c} \begin{Bmatrix} c(k_2 \sin \psi)^2 k_2 \cos \psi \\ \frac{\omega \varepsilon_\perp \sqrt{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel^{-1}}}{i c (k_2 \sin \psi)^3} \\ \frac{\omega \varepsilon_\parallel \sqrt{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel^{-1}}}{(k_2 \sin \psi)^2} \\ \sqrt{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel^{-1}} \end{Bmatrix} B^{(2)}(k_2 \sin \psi, \omega). \quad (3.3.3)$$

Используя асимптотику функций Ханкеля, представим экспоненциальный множитель в (3.3.2) в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\phi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \sim \int_{\Gamma_{0\psi}^{(2)}} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \\ h_{\phi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) \end{Bmatrix} \exp(\Omega_2 \varphi_2(\psi)) d\psi, \quad \Omega_2 = |k_2| R, \quad (3.3.4)$$

$$\varphi_2(\psi, \theta) = i \exp(i \arg k_2) M(\theta) \cos(\psi - \psi_{S2}), \quad (3.3.5)$$

$$M^2(\theta) = \sin^2(\pi - \theta) + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel^{-1} \cos^2(\pi - \theta), \quad M = \sqrt{M^2}, \quad \text{Im} M > 0, \quad (3.3.6)$$

$$\cos \psi_{S2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}} \frac{\cos(\pi - \theta)}{M(\theta)}, \quad \sin \psi_{S2} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{M(\theta)}. \quad (3.3.7)$$

Введем угол θ_2^* , такой что

$$\text{tg} \theta_2^* = \sqrt{|\varepsilon'_\perp| / \varepsilon'_\parallel}. \quad (3.3.8)$$

С учетом (3.3.8) получаем из (3.3.6):

$$\text{Re} M^2 = \cos^2(\pi - \theta) \left(\text{tg}^2(\pi - \theta) - \text{tg}^2 \theta_2^* \right), \quad (3.3.9)$$

$$\text{Im} M^2 = \cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2 \theta_2^* \left(\frac{\varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'_\parallel} + \frac{\varepsilon''_\perp}{|\varepsilon'_\perp|} \right). \quad (3.3.10)$$

Дальнейшее рассмотрение естественным образом разбивается на два случая.

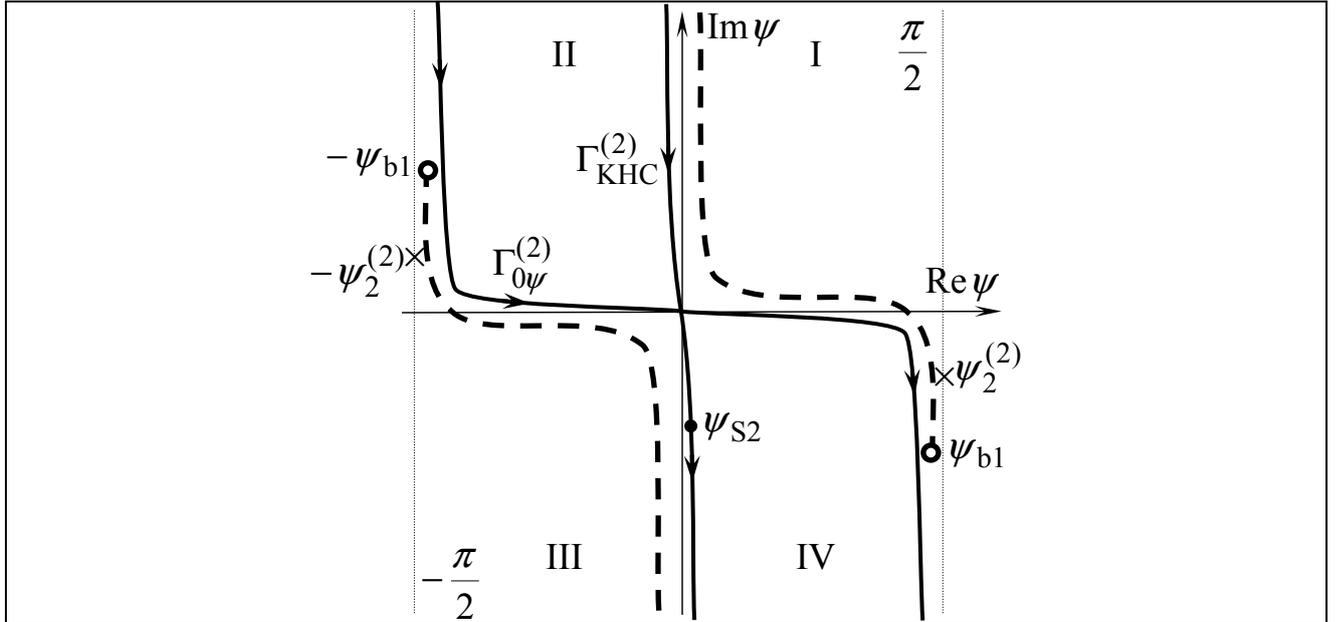


Рис. 3.7. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 2 ($z > 0$) в диапазоне II–2 в случае углов, близких к оси движения частицы: $\theta > \pi - \theta_2^*$. Римские цифры на рисунке означают четверти плоскости k_ρ . Значком \circ отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значки \times обозначают полюса $\pm \psi_2^{(2)}$, ψ_{S2} – седловая точка, $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ – контур наискорейшего спуска, контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ .

3.3.1. Область углов вблизи оси движения ($\theta > \pi - \theta_2^*$)

В данном случае, т. к. $\text{tg}^2(\pi - \theta) < \text{tg}^2\theta_2^*$, то, как видно из (3.3.9), $\text{Re} M^2 < 0$. При выполнении условия $\text{Im} M^2 \ll |\text{Re} M^2|$, которое означает, что угол наблюдения θ достаточно далек от $\pi - \theta_2^*$, имеет место следующее приближенное равенство (с точностью до членов, пропорциональных $\text{Im} M^2 / |\text{Re} M^2| \ll 1$):

$$M \approx \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}{\sqrt{\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^* - \sin^2(\pi - \theta)}} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}''}{\varepsilon_{\parallel}'} + \frac{\varepsilon_{\perp}''}{|\varepsilon_{\perp}'|} \right) + i \sqrt{\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^* - \sin^2(\pi - \theta)}. \quad (3.3.11)$$

Седловая точка ψ_{S2} определяется следующим выражением:

$$\cos \psi_{S2} \approx \text{tg}\theta_2^* \frac{\cos(\pi - \theta)}{\text{Im} M} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}''}{\varepsilon_{\parallel}'} + \frac{\varepsilon_{\perp}''}{|\varepsilon_{\perp}'|} \right) \frac{\text{tg}^2(\pi - \theta)}{\text{tg}^2\theta_2^* - \text{tg}^2(\pi - \theta)} \right]. \quad (3.3.12)$$

Общий вид комплексной плоскости ψ , КНС, проходящего через седловую точку ψ_{S2} , а также расположение полюсов в данном случае представлены на рис. 3.7. Положение точки ψ_{S2} на плоскости ψ следует из (3.3.7), (3.3.11) и (3.3.12). Контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 . Полюса $\pm s_2$ переходят в $\pm\psi_2^{(2)}$ ($\sin\psi_2^{(2)} = k_2^{-1} s_2$), точки ветвления $\pm k_2$ исчезают, а точки ветвления $\pm k_1$ переходят в $\pm\psi_{b1}$ ($\sin\psi_{b1} = k_2^{-1} k_1$).

Как видно, трансформация $\Gamma_{0\psi}^{(2)} \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ не затрагивает ни полюсов, ни разрезов. В итоге асимптотика поля при $\Omega_2 = R|k_2| \gg 1$ представляется вкладом седловой точки и имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} = \frac{2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{k_2 \sin(\pi - \theta)} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i3\pi/4) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i\pi/4) \\ h_{\varphi\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i3\pi/4) \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_2 RM)}{R}. \quad (3.3.13)$$

В данном случае, как видно из (3.3.11), $\text{Im} M \gg |\text{Re} M|$, асимптотика (3.3.13) экспоненциально мала и не удовлетворяет условию существенности (2.1.19). Фактически это означает, что в данном диапазоне углов существенное электромагнитное поле отсутствует. Физическое объяснение этого факта можно получить, рассмотрев дисперсионное уравнение (1.4.11).

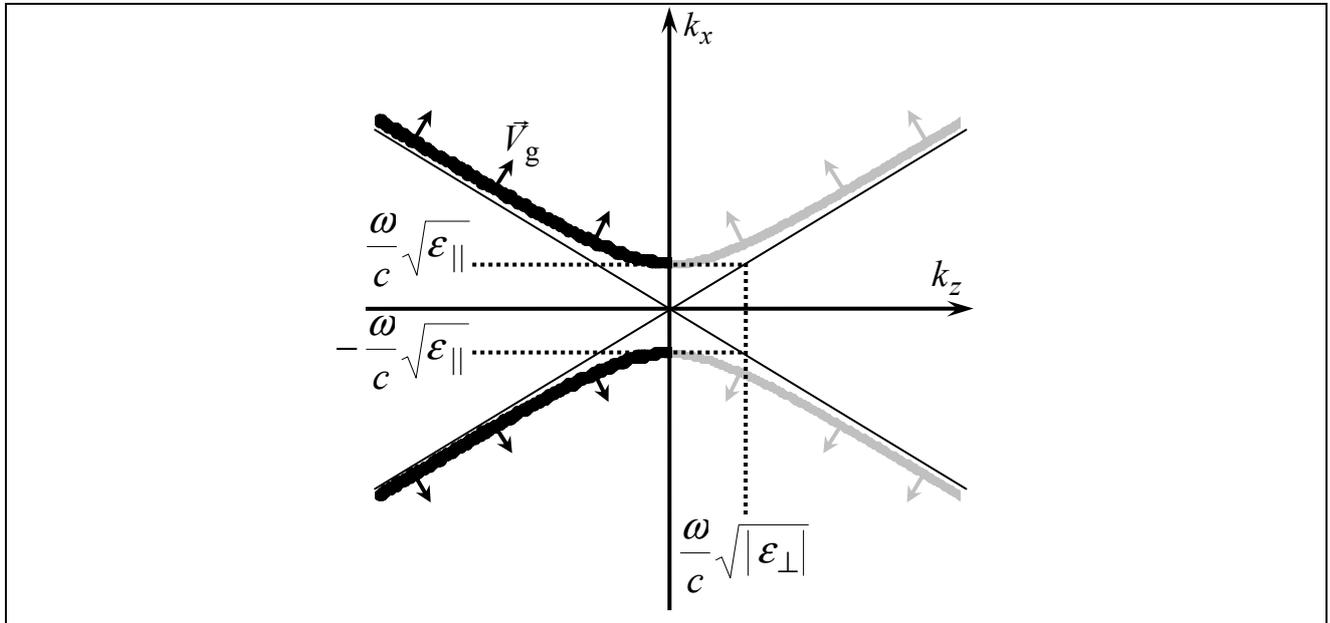


Рис. 3.8. Поверхности волновых векторов (гиперболы) и направления групповой скорости \vec{V}_g для среды (1.3.1) – (1.3.3) в случае диапазона I–2 ($\omega_{p||} < \omega < \omega_{p\perp}$). Части гипербол, которые соответствуют волнам, уходящим по групповой скорости от границы раздела, показаны более темным цветом.

В рассматриваемом диапазоне II-2 ($\omega_{p\parallel} < \omega < \omega_{p\perp}$) в случае без потерь поверхности волновых векторов (гиперболы) имеют вид, представленный на рис. 3.8. Асимптоты гипербол имеют вид

$$k_x = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\perp}|}} k_z. \quad (3.3.14)$$

Части гипербол, которые соответствуют волнам, уходящим по групповой скорости от границы раздела, показаны более темным цветом. Как видно, групповая скорость этих волн составляет с направлением движения частицы (положительным направлением оси k_z) угол, не меньший чем θ_2^* (3.3.8). Таким образом, в конусе $\theta > \pi - \theta_2^*$ энергия свободного поля не распространяется. Следует отметить, что в рассматриваемом диапазоне частот, как показано в разделе 1.4, в среде генерируется излучение Вавилова–Черенкова, имеющее обратный характер. Соответствующее ему вынужденное поле существует и внутри конуса $\theta > \pi - \theta_2^*$, так что полное поле там отлично от нуля.

3.3.2. Область углов вблизи границы ($\pi/2 < \theta < \pi - \theta_2^*$)

В данном случае $\text{tg}^2(\pi - \theta) > \text{tg}^2\theta_2^*$ и, как видно из (3.3.9), $\text{Re}M^2 > 0$. Для дальнейшего анализа удобно получить следующие разложения:

$$M \approx M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)}, \quad (3.3.15)$$

$$M^{(0)} = \sqrt{\sin^2(\pi - \theta) - \cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}, \quad (3.3.16)$$

$$M^{(1)} = \frac{i}{2} \frac{\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}{\sqrt{\sin^2(\pi - \theta) - \cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right), \quad (3.3.17)$$

$$M^{(2)} = \frac{1}{8} \frac{(\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*)^2}{(\sin^2(\pi - \theta) - \cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*)^{3/2}} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}{\sqrt{\sin^2(\pi - \theta) - \cos^2(\pi - \theta) \text{tg}^2\theta_2^*}} \left[\left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right)^2 + \frac{\varepsilon''_{\parallel} \varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\parallel} |\varepsilon'_{\perp}|} \right], \quad (3.3.18)$$

где верхний индекс величин $M^{(0,1,2)}$ означает порядок малости по параметру $\text{Im}M^2 / \text{Re}M^2 \ll 1$. Аналогично представим k_2 :

$$k_2 \approx k_2^{(0)} + k_2^{(1)} + k_2^{(2)}, \quad (3.3.19)$$

$$k_2^{(0)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}}, \quad k_2^{(1)} = \frac{i}{2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}}, \quad k_2^{(2)} = \frac{1}{8} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'_{\parallel}} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} \right)^2, \quad (3.3.20)$$

где верхний индекс означает порядок малости по параметру $\varepsilon''_{\parallel} / \varepsilon'_{\parallel} \ll 1$. Используя первые два члена в разложении $M(\theta)$ (3.3.15), получим следующее выражение, определяющее седловую точку ψ_{S2} :

$$\cos \psi_{S2} \approx \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta_2^* \frac{\cos(\pi - \theta)}{M^{(0)}} \left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}} + \frac{\varepsilon''_{\perp}}{|\varepsilon'_{\perp}|} \right) \frac{\operatorname{tg}^2(\pi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\pi - \theta) - \operatorname{tg}^2 \theta_2^*} + i \operatorname{tg} \theta_2^* \frac{\cos(\pi - \theta)}{M^{(0)}}. \quad (3.3.21)$$

Положение точки ψ_{S2} на комплексной плоскости ψ , представленной для данного случая на рис. 3.9 и 3.10, следует из формул (3.3.7), (3.3.15) – (3.3.18) и (3.3.21).

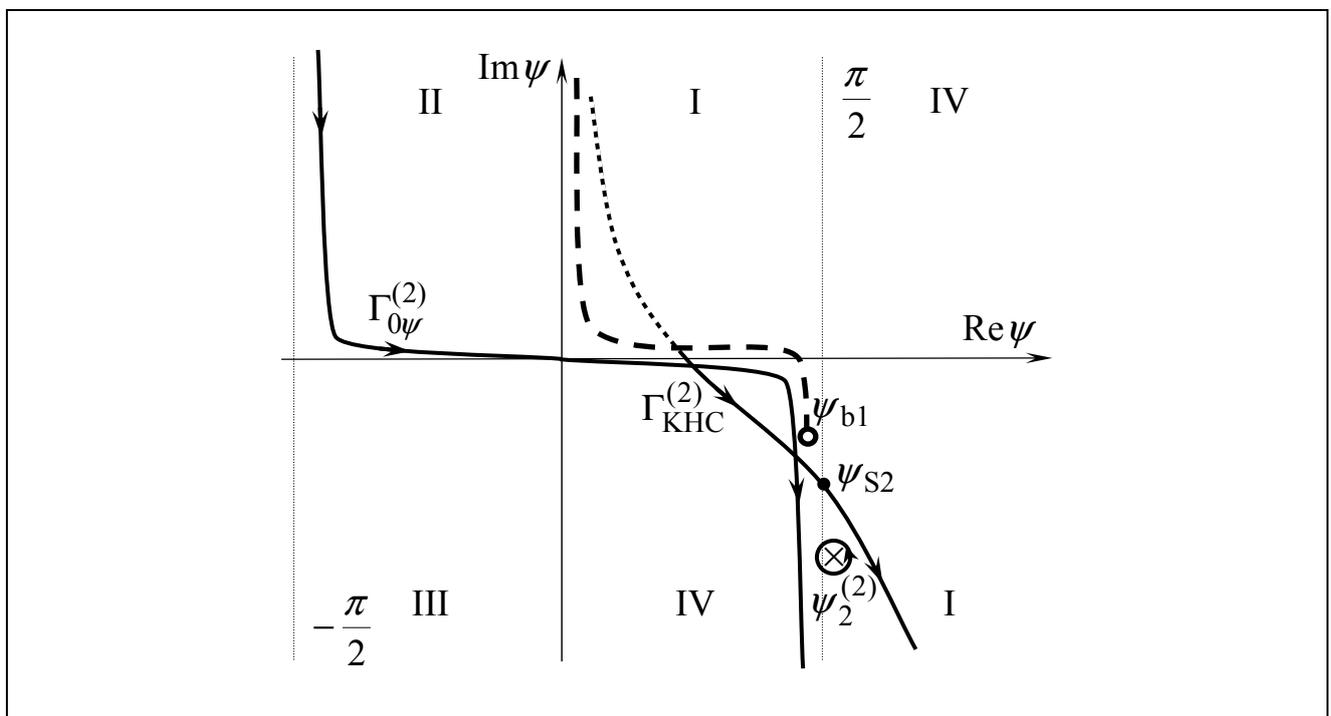


Рис. 3.9. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 2 ($z > 0$) в диапазоне П–2 в случае «средних» углов: $(1 - k_2^{(0)} k_1^{-1})^{-1} \operatorname{tg}^2 \theta_2^* > \operatorname{tg}^2(\pi - \theta) > \operatorname{tg}^2 \theta_2^*$. Римские цифры означают четверти плоскости k_{ρ} . Значком \odot отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значки \otimes обозначают полюса $\pm \psi_2^{(2)}$, ψ_{S2} – седловая точка, $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ – контур наискорейшего спуска, контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_{ρ} . Часть контура $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$, показанная мелким пунктиром (точками), лежит на листе римановой поверхности с $\operatorname{Im} k_z^{(1)} < 0$.

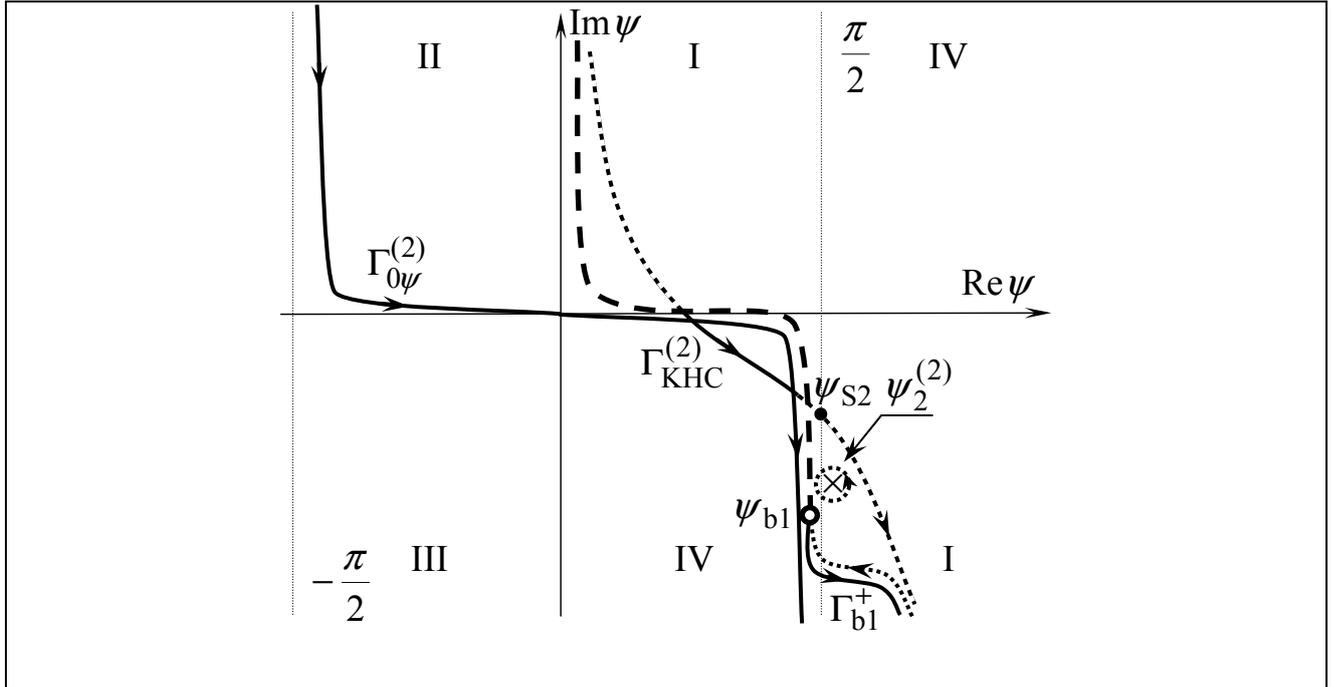


Рис. 3.10. Характерный вид комплексной плоскости ψ при вычислении поля в среде 2 ($z > 0$) в диапазоне II-2 в случае углов вблизи границы: $\text{tg}^2(\pi - \theta) > (1 - k_2^{(0)} k_1^{-1})^{-1} \text{tg}^2 \theta_2^*$. Римские цифры означают четверти плоскости k_ρ . Значком \bullet отмечены точки ветвления, пунктирными линиями показаны разрезы, значки \times обозначают полюса $\pm \psi_2^{(2)}$, ψ_{S2} – седловая точка, $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ – контур наискорейшего спуска, контур $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ соответствует исходному контуру интегрирования Γ_0 на плоскости k_ρ . Часть контуров $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ и Γ_{b1}^+ , а также контур, охватывающий полюс $\psi_2^{(2)}$, показанные мелким пунктиром (точками), лежат на листе римановой поверхности с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$. Седловая точка ψ_{S2} также лежит на листе римановой поверхности с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$.

После трансформации $\Gamma_{0\psi}^{(2)}$ в $\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}$ получаем:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \int_{\Gamma_{\text{КНС}}^{(2)}} d\psi \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) H_0^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \\ h_{\varphi\omega}^{b(2)}(\psi, \omega) H_1^{(1)}(Rk_2 \sin \theta \sin \psi) \end{Bmatrix} \exp \left(i R k_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}} \cos(\pi - \theta) \cos \psi \right) + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix}, \quad (3.3.22)$$

где второе слагаемое представляет собой вклад полюса $\psi_2^{(2)}$.

Прежде всего, отметим некоторые особенности взаимного расположения контуров, разрезов и точки ветвления. В случае, когда выполнено неравенство $\text{tg}^2(\pi - \theta) < (1 - k_2^{(0)} k_1^{-1})^{-1} \text{tg}^2 \theta_2^*$ (область «средних» углов), взаимное расположение

контуров, разрезов и особенностей на комплексной плоскости представлено на рис. 3.9. В этом случае седловая точка ψ_{S2} лежит ниже точки ветвления ψ_{b1} , после трансформации КНС проходит через седловую точку на листе с $\text{Im} k_z^{(1)} > 0$, другими словами $\text{Im} k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_{S2}) > 0$. При этом полюс $\psi_2^{(2)}$ захватывается только когда он лежит ниже точки ветвления и ниже седловой точки, при этом $\text{Im} k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_2^{(2)}) > 0$.

При выполнении неравенства $\text{tg}^2(\pi - \theta) > \left(1 - k_2^{(0)} k_1^{-1}\right)^{-1} \text{tg}^2 \theta_2^*$ расположение контуров и разрезов показано на рис. 3.10. В этом случае седловая точка ψ_{S2} лежит выше точки ветвления ψ_{b1} , и после трансформации КНС проходит через седловую точку на листе с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$, т. е. $\text{Im} k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_{S2}) < 0$. Полюс $\psi_2^{(2)}$ может захватываться как на листе с $\text{Im} k_z^{(1)} > 0$ (если он лежит ниже точки ветвления ψ_{b1}), так и на листе с $\text{Im} k_z^{(1)} < 0$ (если он лежит выше точки ветвления ψ_{b1}). Последняя ситуация отражена на рис. 3.10. Нетрудно видеть, что она соответствует случаю генерации обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) в вакууме. Действительно, если полюс лежит выше точки ветвления и достаточно далеко от нее, то он оказывается вблизи разреза $\text{Im} k_z^{(1)} = 0$, при этом $\left| \text{Im} k_z^{(1)}(s_2) \right| \ll \text{Re} k_z^{(1)}(s_2)$, что эквивалентно неравенству (3.2.5), приводящему к условиям наличия ОЧПИ в вакууме (3.2.6) или (3.2.8). Таким образом, при выполнении (3.2.6) или (3.2.8) и, следовательно, наличии ОЧПИ в вакуумной области имеем $\text{Im} k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_2^{(2)}) < 0$ (рис. 3.10).

Кроме того, следует отметить, что в области углов $(\text{tg}^2(\pi - \theta) > \left(1 - k_2^{(0)} k_1^{-1}\right)^{-1} \text{tg}^2 \theta_2^*)$ в асимптотику, вообще говоря, вносит вклад интеграл вдоль контура Γ_{b1}^+ , который состоит, в свою очередь, из двух контуров наискорейшего спуска, исходящих из точки ветвления ψ_{b1} (см. рис. 3.10). Этот вклад, как уже неоднократно упоминалось, описывает боковую волну и не удовлетворяет условию существенности (2.1.19), поэтому и не учитывается в асимптотике (3.3.22).

Найдем строгое условие захвата полюса $\psi_2^{(2)}$. Для этого поступим так же, как и во всех предыдущих случаях – найдем угол θ_2 при котором полюс лежит ровно на КНС. Все выкладки аналогичны рассмотренным ранее случаям, приведем их с минимальными комментариями. Имеем следующую систему для определения θ_2 :

$$\begin{cases} U_2^{(0)}(\theta_2) + U_2^{(2)}(\theta_2) = 0, \\ U_2^{(1)}(\theta_2) > 0, \end{cases} \quad (3.3.23)$$

где

$$U_2^{(0)}(\theta) = M^{(0)}(\theta)k_2^{(0)} + \omega(c\beta)^{-1} \cos(\pi - \theta) - s_2^{(0)} \sin(\pi - \theta), \quad (3.3.24)$$

$$U_2^{(1)}(\theta) = -M^{(0)}(\theta) \left| k_2^{(1)} \right| - k_2^{(0)} \left| M^{(1)}(\theta) \right| + \sin(\pi - \theta) \left| s_2^{(1)} \right|, \quad (3.3.25)$$

$$U_2^{(2)}(\theta) = M^{(0)}(\theta)k_2^{(2)} + M^{(2)}(\theta)k_2^{(0)} - \left| M^{(1)}(\theta) \right| \left| k_2^{(1)} \right| - s_2^{(2)} \sin(\pi - \theta). \quad (3.3.26)$$

Сначала найдем угол θ_{20} , такой что $U_2^{(0)}(\theta_{20}) = 0$. В результате выкладок находим:

$$\operatorname{tg} \theta_{20} = \operatorname{tg} \theta_2^* \sqrt{1 + \beta^2 |\varepsilon'_\perp|}. \quad (3.3.27)$$

Можно убедиться, что как и в случае среды 1 выполнены равенства $U_2^{(1)}(\theta_{20}) = 0$, $\partial U_2^{(1)} / \partial \theta \Big|_{\theta_{20}} = 0$. Опуская громоздкие выкладки, сходные с выкладками предыдущих случаев, выпишем результат:

$$\theta_2 = \theta_{20} + \delta \theta_2, \quad \delta \theta_2 = \sqrt{\frac{2}{R_2} \left| \frac{\partial^2 U_2^{(0)}(\theta_{20})}{\partial \theta^2} \right|^{-1}}, \quad (3.3.28)$$

$$R_2 = \frac{1}{U_2^{(2)}(\theta_{20})} = \frac{8\beta^2 |\varepsilon'_\perp| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2^* (1 + \beta^2 |\varepsilon'_\perp|)}}{\omega (c\beta)^{-1} (1 + \beta^2 |\varepsilon'_\perp|)} \left(\frac{\varepsilon''_\parallel}{\varepsilon'_\parallel} + \frac{\varepsilon''_\perp}{|\varepsilon'_\perp|} \frac{1 + 2\beta^2 |\varepsilon'_\perp|}{1 + \beta^2 |\varepsilon'_\perp|} \right)^{-2}. \quad (3.3.29)$$

Для вклада полюса в области углов $\operatorname{tg}^2(\pi - \theta) > \left(1 - k_2^{(0)} k_1^{-1}\right)^{-1} \operatorname{tg}^2 \theta_2^*$ при выполнении условия наличия ОЧПИ в вакууме (3.2.5) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ E_{z\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \\ H_{\varphi\omega}^{\text{b}(2)\text{P}} \end{array} \right\} = \frac{i q}{\beta c} \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_2}{\varepsilon_\perp} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ -i \beta s_2^2 H_0^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ \frac{\omega \varepsilon_\parallel}{-\beta s_2} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ \frac{c}{c} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \end{array} \right\} \frac{g_3^*(\omega) \exp\left(-i \frac{\omega}{\beta c} R \cos(\pi - \theta)\right)}{2 \left(\frac{\omega \varepsilon_1}{c\beta} + \varepsilon_\perp k_z^{(1)}(s_2) \right)} \Theta((\pi - \theta_2) - \theta), \quad (3.3.30)$$

где $g_3^*(\omega)$ определено формулой (3.2.30). В области же «средних» углов ($\operatorname{tg}^2(\pi - \theta) < \left(1 - k_2^{(0)} k_1^{-1}\right)^{-1} \operatorname{tg}^2 \theta_2^*$), где нарушается (3.2.5), выражение для вклада полюса $\psi_2^{(2)}$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix} &= \frac{i q}{\beta c} \begin{Bmatrix} \frac{s_2}{\varepsilon_{\perp}} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ -i \beta s_2^2 H_0^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \\ \frac{\omega \varepsilon_{\parallel}}{c} H_1^{(1)}(s_2 R \sin \theta) \end{Bmatrix} \frac{\frac{\omega \varepsilon_1}{c \beta} + \varepsilon_{\perp} k_z^{(1)}(s_2)}{2g_3^*(\omega)} \times \\ &\times \exp\left(-i \frac{\omega}{\beta c} R \cos(\pi - \theta)\right) \Theta((\pi - \theta_2) - \theta), \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Как и в случае левой среды, вклады полюсов (3.3.30), (3.3.31) описывают отраженное от границы раздела излучение Вавилова–Черенкова, для которого мы применяем термин отраженное ОЧПИ.

Чтобы получить асимптотику интеграла вдоль КНС (первое слагаемое в (3.3.22)) при $\Omega_2 = |k_2| R \gg 1$, необходимо учесть тот факт, что полюс $\psi_2^{(2)}$ может находиться вблизи седловой точки, и асимптотика, вообще говоря, должна иметь вид, аналогичный (2.2.33), т. е. быть равномерной. Однако мы, как при рассмотрении поля в среде 1, не будем выписывать её, а ограничимся определением области «полутени». Опуская громоздкие выкладки, аналогичные случаю изотропной среды, выпишем результат. Область «полутени», как обычно, определяется неравенствами

$$|\theta - (\pi - \theta_{20})| \lesssim \Delta\theta_2, \quad R \lesssim R_2, \quad (3.3.32)$$

$$\Delta\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{R} \left| \frac{\partial^2 U_2^{(0)}(\theta_{20})}{\partial \theta^2} \right|^{-1} \left(1 - \frac{R}{R_2}\right)}. \quad (3.3.33)$$

Вне области (3.3.32), т. е. при $|\theta - (\pi - \theta_{20})| \gg \Delta\theta_2$ или $R \gg R_2$ имеем:

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{Bmatrix}, \quad (3.3.34)$$

$$\begin{Bmatrix} E_{\rho\omega}^{b(2)S} \\ E_{z\omega}^{b(2)S} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)S} \end{Bmatrix} = \frac{2 \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right)}{k_2 \sin(\pi - \theta)} \begin{Bmatrix} e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i 3\pi/4) \\ e_{z\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i \pi/4) \\ h_{\varphi\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega) \exp(-i 3\pi/4) \end{Bmatrix} \frac{\exp(i k_2 R M)}{R}. \quad (3.3.35)$$

Отметим, что по внешнему виду (3.3.35) совпадает с (3.3.13). Однако, в отличие от (3.3.13), в формуле (3.3.35) $\text{Re} M \gg \text{Im} M$, поэтому (3.3.35) описывает распространяющиеся сферические волны переходного излучения (ПИ). Также следует отметить, что в величинах

$e_{\rho\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega)$, $e_{z\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega)$ и $h_{\varphi\omega}^{b(2)}(\psi_{2S}, \omega)$ в случае углов $\text{tg}^2(\pi - \theta) > (1 - k_2^{(0)} k_1^{-1})^{-1} \text{tg}^2 \theta_2^*$

следует заменить $k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_{2S})$ на $-k_z^{(1)}(k_2 \sin \psi_{2S})$.

3.4. Влияние потерь в среде на поле излучения

В данном разделе мы проанализируем влияние потерь в среде 2 (при построении асимптотик потери в среде 1 не учитывались) на Фурье-гармоники поля излучения, а именно, сферические волны переходного излучения и цилиндрические волны излучения Вавилова–Черенкова и обратного черенковско-переходного излучения.

Прежде всего рассмотрим ситуацию, когда диссипация в среде 2 пренебрежимо мала ($\epsilon_{\parallel, \perp} \rightarrow 0$). Рассмотрим случай, когда частота лежит в диапазоне П–2 и выполнено условия наличия ОЧПИ в вакууме (3.2.5). Поле в среде 1 определяется свободным полем, его асимптотика вне области «полутени» (3.2.32) описывается формулами (3.2.36), (3.2.1) и (3.2.28). В среде 2 свободное поле существует только в области углов $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_2^*$, его асимптотика описывается формулами (3.3.34), (3.3.35), (3.3.30) и (3.4.31), а полное поле в этом случае определяется суммой свободного и вынужденного полей. Структура Фурье-гармоники полного поля в рассматриваемом случае представлена на рис. 3.11.

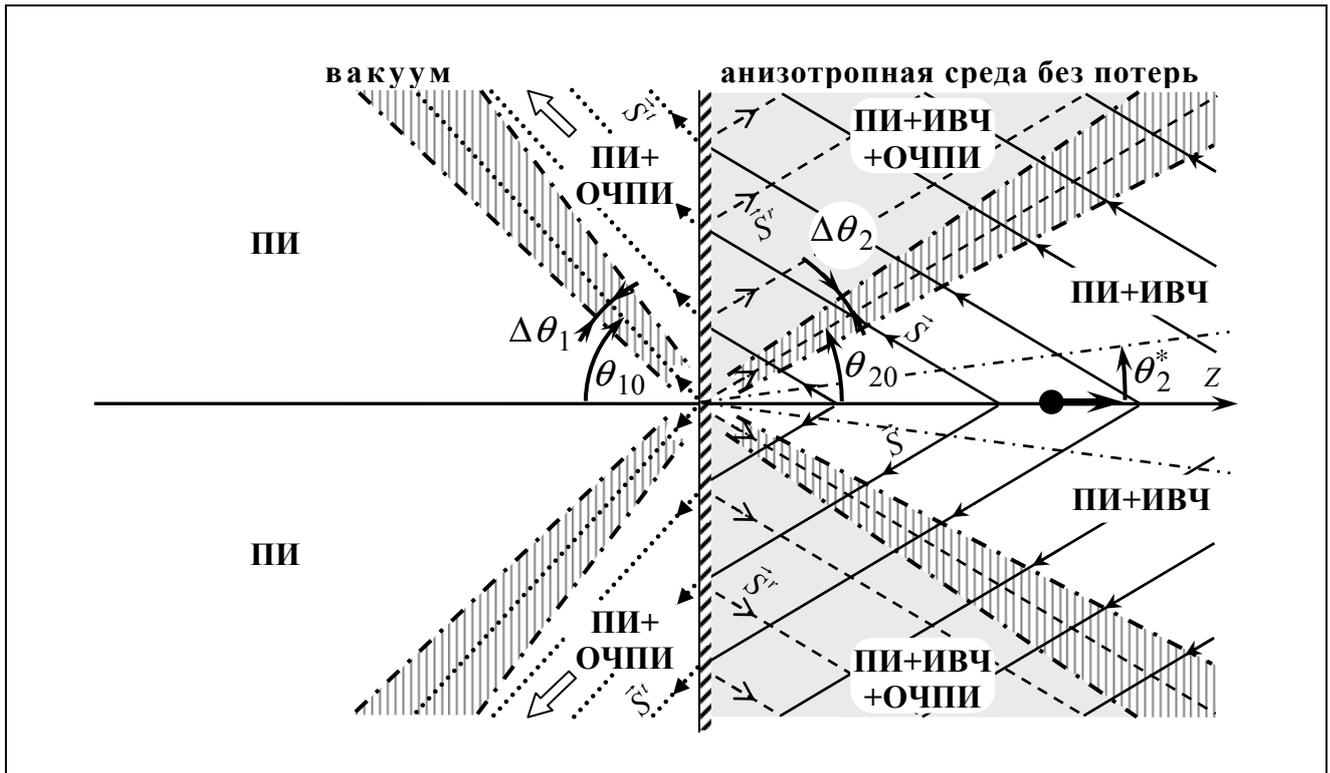


Рис. 3.11. Пространственная структура Фурье-гармоники электромагнитного поля в случае границы раздела вакуум – анизотропная среда (3.1.1) без потерь. Частота Фурье-гармоники лежит внутри интервала (3.3.6). Линии \longrightarrow параллельны вектору Пойтинга \vec{S} ИВЧ, линии \dashrightarrow – вектору Пойтинга \vec{S}^r ОЧПИ в среде (отраженного ИВЧ), линии $\cdots\cdots\longrightarrow$ – вектору Пойтинга \vec{S}^t вакуумного ОЧПИ (преломленного ИВЧ). Линией $\dashv\dashv$ показаны границы областей «полутени», сами области «полутени» показаны штриховкой.

В случае отсутствия диссипации в рассматриваемых Фурье-гармониках отсутствует экспоненциальное убывание. В этом случае мы будем говорить, что область их существенности не ограничена по расстоянию. На рис. 3.11 области существования цилиндрических волн, соответствующих различным видам излучения, показаны с помощью линий, параллельных вектору Пойтинга. Существование сферических волн переходного излучения (ПИ) в различных областях отмечено с помощью принятого сокращения «ПИ».

Вынужденное поле и соответствующее ему излучение Вавилова–Черенкова (ИВЧ), показанное сплошными линиями на рис. 3.11, существует во всем полупространстве $z > 0$. Обратное черенковско-переходное излучение (ОЧПИ) в среде 2, показанное пунктирными линиями на рис. 3.11 существует при любом расстоянии R в диапазоне углов $\pi/2 < \theta < \pi - \theta_{20}$ и интерферирует в этой области с полем ИВЧ. Волны ОЧПИ в вакуумной области, показанные линиями из точек на рис. 3.11, существуют при любом R в диапазоне углов $\pi/2 > \theta > \theta_{10}$. Отметим, что сферические волны ПИ в анизотропной среде, как следует из (3.3.13), отсутствуют вблизи оси движения заряда ($\theta > \pi - \theta_2^*$). Это связано с тем, что в данном диапазоне углов не существует волн, переносящих энергию.

Как следует из (3.2.34) и (3.3.29) при отсутствии диссипации в среде, максимальные радиальные размеры областей «полутени» $R_{1,2}$ бесконечно велики. Другими словами, области существенности ПИ, ИВЧ и ОЧПИ не имеют ограничения по расстоянию. На рис. 3.11 области «полутени» показаны штриховкой.

Обратимся теперь к случаю, когда в среде 2 учитывается малая диссипация, и рассмотрим вопрос о влиянии потерь на распространение описанных типов излучения. В поглощающей среде 2 как сферическая волна ПИ, так и цилиндрическая волна отраженного ОЧПИ испытывают слабое экспоненциальное затухание. В области углов $\theta > \pi - \theta_2^*$, где только и существенна сферическая волна ПИ, ее затухание описывается следующим множителем:

$$\left\{ \begin{array}{l} |E_{\rho\omega}^{b(2)S}| \\ |E_{z\omega}^{b(2)S}| \\ |H_{\varphi\omega}^{b(2)S}| \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2R}{R_{2S}(\theta)}\right), \quad (3.4.1)$$

где

$$R_{2S}(\theta) = \frac{4\sqrt{\operatorname{tg}(\pi - \theta) - \operatorname{tg}\theta_2^*}}{\omega c^{-1}\sqrt{\varepsilon'_{\parallel}}\cos(\pi - \theta)\left[\left(\frac{\varepsilon''_{\parallel}}{\varepsilon'_{\parallel}}\right)\operatorname{tg}^2(\pi - \theta) + \left(\frac{\varepsilon''_{\perp}}{\varepsilon'_{\perp}}\right)\operatorname{tg}^2\theta_2^*\right]}. \quad (3.4.2)$$

При этом область существенности ПИ определяется неравенством

$$R \leq R_{2S}(\theta). \quad (3.4.3)$$

Экспоненциальное убывание цилиндрических волн ОЧПИ описывается множителем

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega}^{b(2)P} \\ E_{z\omega}^{b(2)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)P} \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2\rho}{\rho_2}\right), \quad \rho_2 = \frac{4}{\omega c^{-1} \sqrt{\epsilon'_{\parallel}}} \sqrt{\frac{\beta^2 |\epsilon'_{\perp}|}{1 + \beta^2 |\epsilon'_{\perp}|} \left(\frac{\epsilon''_{\parallel}}{\epsilon'_{\parallel}} + \frac{\epsilon''_{\perp}}{|\epsilon'_{\perp}|} \frac{1}{1 + \beta^2 |\epsilon'_{\perp}|} \right)^{-1}}. \quad (3.4.4)$$

Область существенности отраженного ОЧПИ определяется неравенствами

$$\rho \leq \rho_2, \quad \pi/2 < \theta < \pi - \theta_2. \quad (3.4.5)$$

Отметим, что область существенности цилиндрических волн вынужденного поля (1.4.3), соответствующих излучению Вавилова–Черенкова, также определяется первым из неравенств (3.4.5).

Оценим область существенности ОЧПИ в вакуумной области. Вклад полюса s_2 обладает следующим экспоненциальным убыванием вследствие наличия потерь:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho\omega}^{b(1)P} \\ E_{z\omega}^{b(1)P} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)P} \end{array} \right\} \sim \exp\left(-\frac{2R}{R_{1P}(\theta)}\right), \quad R_{1P}(\theta) = \frac{\sqrt{2R_1}}{\sqrt{k_1} \sin(\theta - \theta_{10})}, \quad \theta > \theta_1. \quad (3.4.6)$$

Пространственная область существенности ОЧПИ определяется следующим неравенством:

$$R \leq R_{1P}(\theta). \quad (3.4.7)$$

Зависимость «расстояния существенности» R_{1P} от угла θ , как видно из (3.4.6), является монотонно убывающей функцией и имеет максимум при $\theta = \theta_1$,

$$R_{1P}(\theta) \Big|_{\max} = R_{1P}(\theta_1) = R_1, \quad (3.4.8)$$

и минимум при $\theta = \pi/2$,

$$R_{1P}(\theta) \Big|_{\min} = R_{1P}(\pi/2) = \rho_2, \quad (3.4.9)$$

где ρ_2 определено второй из формул (3.4.4).

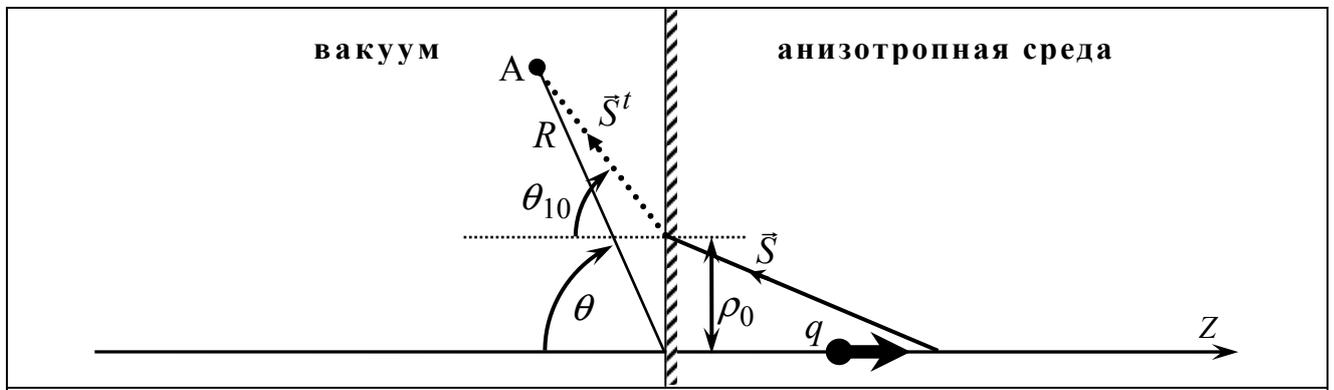


Рис. 3.12. К объяснению убывания ОЧПИ в вакууме.

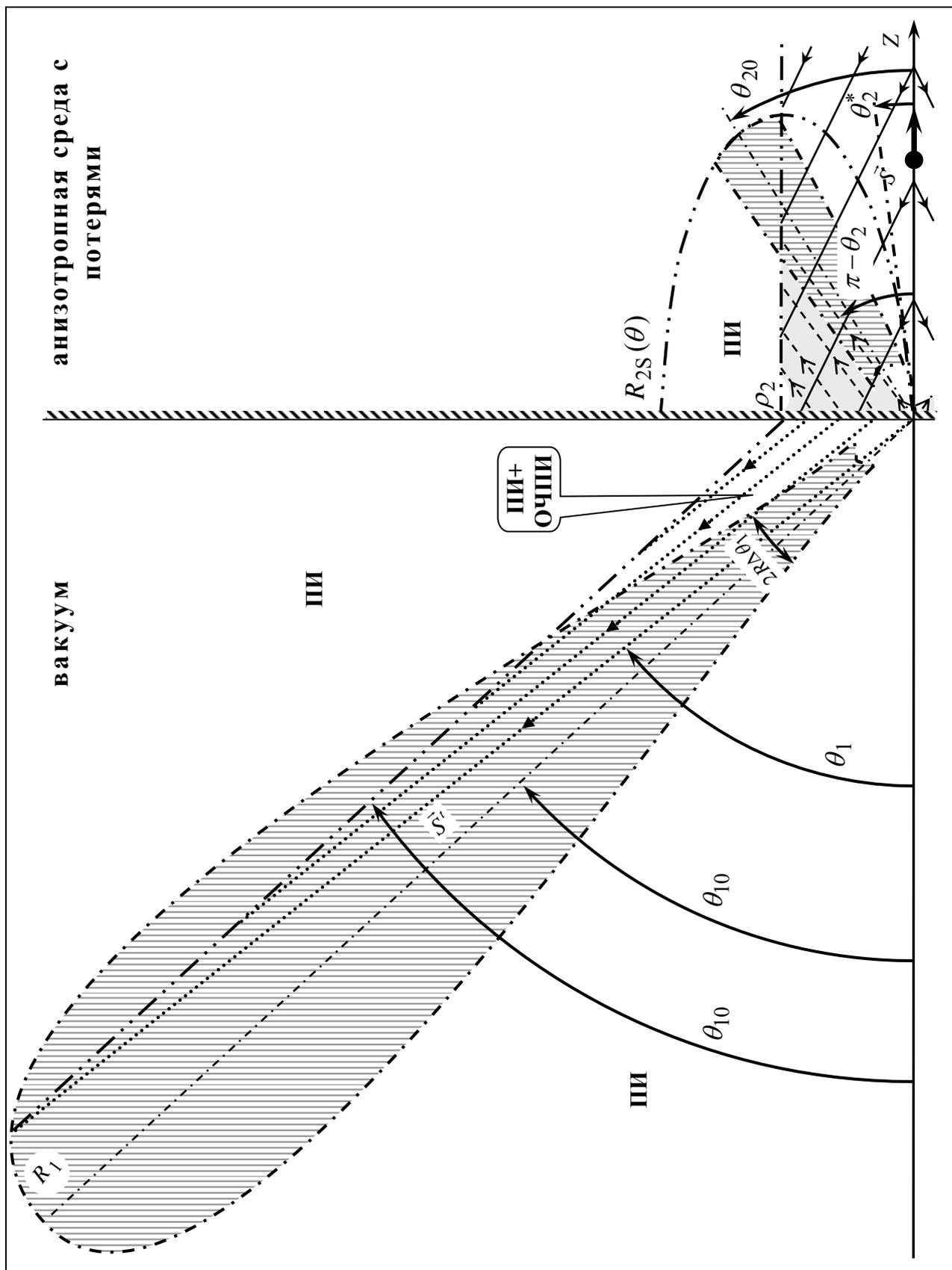


Рис. 3.13. Структура Фурье-гармоники поля в случае анизотропной среды с диссипацией. Обозначения приведены в подписи к рис. 3.11.

Экспоненциальное убывание волн ОЧПИ в вакууме связано с тем, что порождающие их волны излучения Вавилова–Черенкова проходят определенный путь в поглощающей среде. Если вычислить путь ρ_0 , который волна проходит в среде прежде чем попасть в точку (R, θ) в вакууме (см. рис. 3.12), и подставить его в первую из формул (3.4.4), получится результат (3.4.6). Чем ближе точка наблюдения к границе раздела (при $R = \text{const}$), тем больший путь проходит волна ИВЧ в среде прежде чем достигнет границы и вызовет преломленное ОЧПИ в вакууме. Наименьшее ослабление волны вакуумного ОЧПИ испытывают при $\theta = \theta_1$, т. е. на границе области своего существования (напомним, что ОЧПИ в вакууме существует при $\theta > \theta_1$).

Неравенства $\theta > \theta_1$ и (3.4.7) могут быть также представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho \geq |z| \operatorname{tg} \theta_1, \\ \rho \leq \rho_2 + |z| \operatorname{tg} \theta_{10}. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Система (3.4.10) означает, что на плоскости (ρ, z) волны ОЧПИ значимы в области между двумя лучами. «Нижний» луч исходит из точки влета и наклонен к оси z под углом θ_1 , а «верхний» исходит из точки $z = 0, \rho = \rho_2$ и наклонен к оси z под углом θ_{10} . Структура Фурье-гармоники полного поля с учетом диссипации в среде показана на рис. 3.13. Обозначения на рис. 3.13 совпадают с обозначениями рис. 3.11. Отметим, что область (3.4.10) на рис. 3.13 сильно вытянута, поскольку углы θ_1 и θ_{10} отличаются на малую величину $\delta\theta_1$.

3.5. Численные результаты и обсуждение

Как уже отмечалось, наряду с асимптотическими представлениями, рассмотренными в разделах 3.2 и 3.3, для анализа свободного поля в рассматриваемой задаче использовался подход, основанный на численном расчете интегралов для Фурье-гармоник (3.1.7), (3.1.8). Напомним, что вынужденное поле заряда в случае анизотропной среды (3.1.1) – (3.1.3) подробно исследовалось в разделе 1.4.

Численный алгоритм, использовавшийся для расчета Фурье-гармоник свободного поля в рассматриваемой задаче с анизотропной средой, базируется на тех же принципах, что и аналогичный алгоритм для случая изотропной среды (см. раздел 2.5.1). В случае диапазона П–2 вблизи контура интегрирования на плоскости k_ρ располагаются полюса $\pm s_2$. Это приводит к резкому изменению подынтегральных выражений в (3.1.7), (3.1.8) вблизи полюсов, что затрудняет интегрирование. В рамках численного алгоритма, реализованного в среде *Mathcad*, предусмотрена аналитическая оценка отрезков вещественной оси k_ρ , на которых существенно влияние этих полюсов (см. формулы раздела 2.5.1). На этих отрезках интегрирование производится с более мелким шагом по сравнению со всей остальной частью

контура.

На рис. 3.14 представлены кривые зависимости $\text{Re} H_{\varphi\omega}(\theta)$ (зависимости вещественной части Фурье-гармоники компоненты H_{φ} полного поля ($H_{\varphi\omega} = H_{\varphi\omega}^q + H_{\varphi\omega}^b$) от угла наблюдения θ на полуокружности $R = \text{const}$ (см. пунктирную линию на рис. 3.1)) при различных значениях скорости заряда β , полученные с помощью описанного численного алгоритма. Эти кривые иллюстрируют пространственное распределение Фурье-гармоники на фиксированной частоте. Среды описываются дисперсионными закономерностями (3.1.1) – (3.1.3). Значения параметров сред, а также значения пороговой скорости эффекта обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) β_{RCTR} указаны в подписи к рис. 3.14. Приведены результаты для случая, когда частота Фурье-гармоники лежит в частотном диапазоне П-2 ($\omega_{\text{p}\parallel} < \omega < \omega_{\text{p}\perp}$).

Для сравнения на графиках рис. 3.14 построены также зависимости $\text{Re} H_{\varphi\omega}(\theta)$, полученные с помощью асимптотических формул (3.2.36), (3.2.1), (3.2.28) для области $z < 0$ и (3.3.34), (3.3.35), (3.3.30), (3.3.31) для области $z > 0$ (пунктирные линии на рис. 3.14).

Из сравнения результатов рис. 3.14 видно, что кривые, соответствующие неравномерной асимптотике и численному расчету по точным формулам хорошо совпадают вне затененных диапазонов угла θ , соответствующих областям «полутени» (3.2.32), (3.3.32). Эти области сосредоточены в окрестностях углов θ_1 (3.2.26) и θ_2 (3.3.28). Из сравнения точных и асимптотических кривых можно сделать вывод, что выброшенные из асимптотики члены (поверхностные и боковые волны) не вносят существенного вклада в полное поле при выбранных параметрах.

Как и в случае изотропной среды, ярко выраженные осцилляции на рис. 3.14 связаны с наличием цилиндрических волн в спектре полного поля. При выполнении неравенства (3.2.8) $\beta > \beta_{\text{RCTR}}$ цилиндрические волны обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ) в вакууме фактически определяют полное поле в области своего существования ($\theta_1 < \theta < \pi/2$), что согласуется с аналитическими результатами. При стремлении $\beta \rightarrow 1$ ОЧПИ в вакууме становится все более выраженным, что проявляется в увеличении количества осцилляций.

Волны ОЧПИ в среде проявляются в виде осциллирующего поля вблизи границы раздела (при $\pi/2 < \theta < \theta_2$). В этой области наблюдается интерференция волн ОЧПИ с вынужденным полем, которая ярко видна на рис. 3.14 при любой скорости β . Совершенно естественным выглядит тот факт, что при $\beta < \beta_{\text{RCTR}}$, когда все падающее на границу излучение Вавилова–Черенкова отражается, интерференция в среде оказывается наиболее выраженной. При $\beta > \beta_{\text{RCTR}}$, когда часть падающего излучения проникает в вакуум, интерференция становится менее заметной.

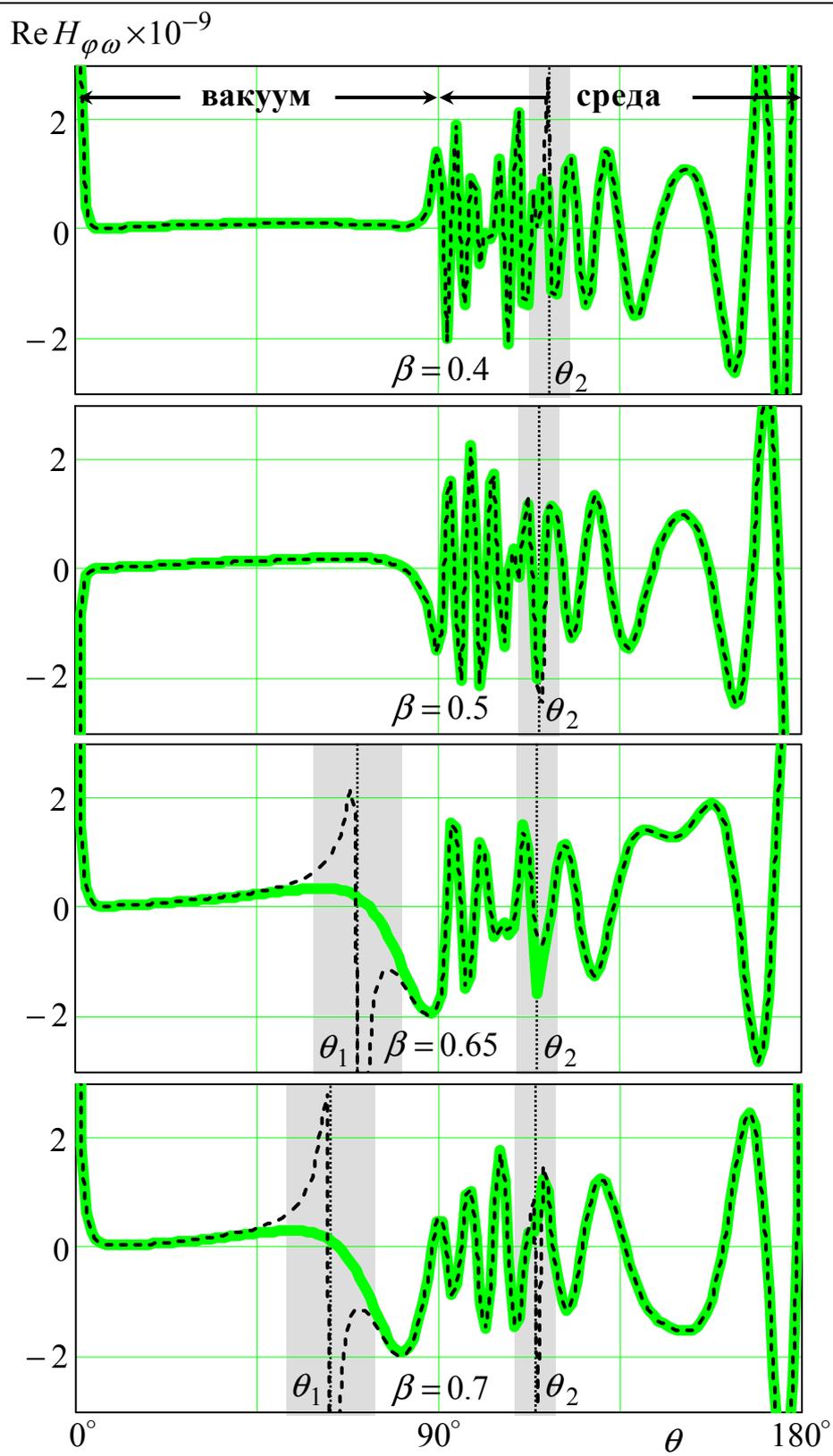


Рис. 3.14. (начало)

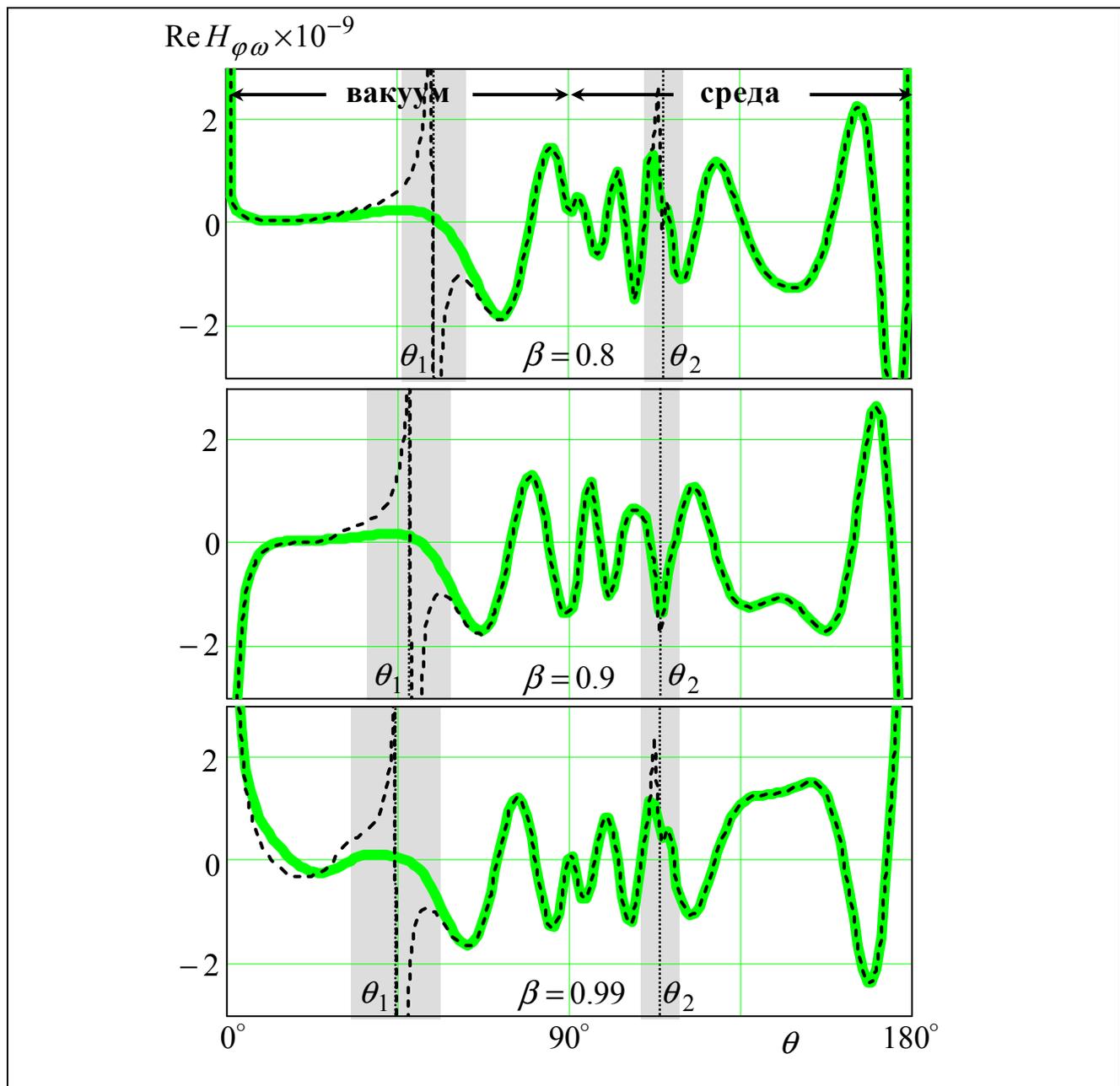


Рис. 3.14. Пространственное распределение вещественной части Фурье-гармоники магнитного поля (зависимость $\text{Re} H_{\varphi\omega}$ ($\text{Ам}^{-1}\text{с}$) от θ при $R = \text{const} = 14$ см) для $q = -1$ нКл и различных скоростей β в случае сред (3.1.1) – (3.1.3) с параметрами (в единицах $\omega_{p\parallel} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$): $\omega_{p\perp} = 1.5$, $\omega_{d\parallel} = \omega_{d\perp} = 10^{-3}$; $\omega_{p1} = 10^{-2}$, $\omega_{d1} = 10^{-6}$. Частота Фурье-гармоники лежит в диапазоне II–2: $\omega = 1.13$, $\beta_{\text{RCTR}} = 0.6$. Сплошная линия рассчитана по точным формулам, пунктирная линия соответствует неравномерной асимптотике. Затенены области «полутени», сосредоточенные в окрестности углов θ_1 и θ_2 .

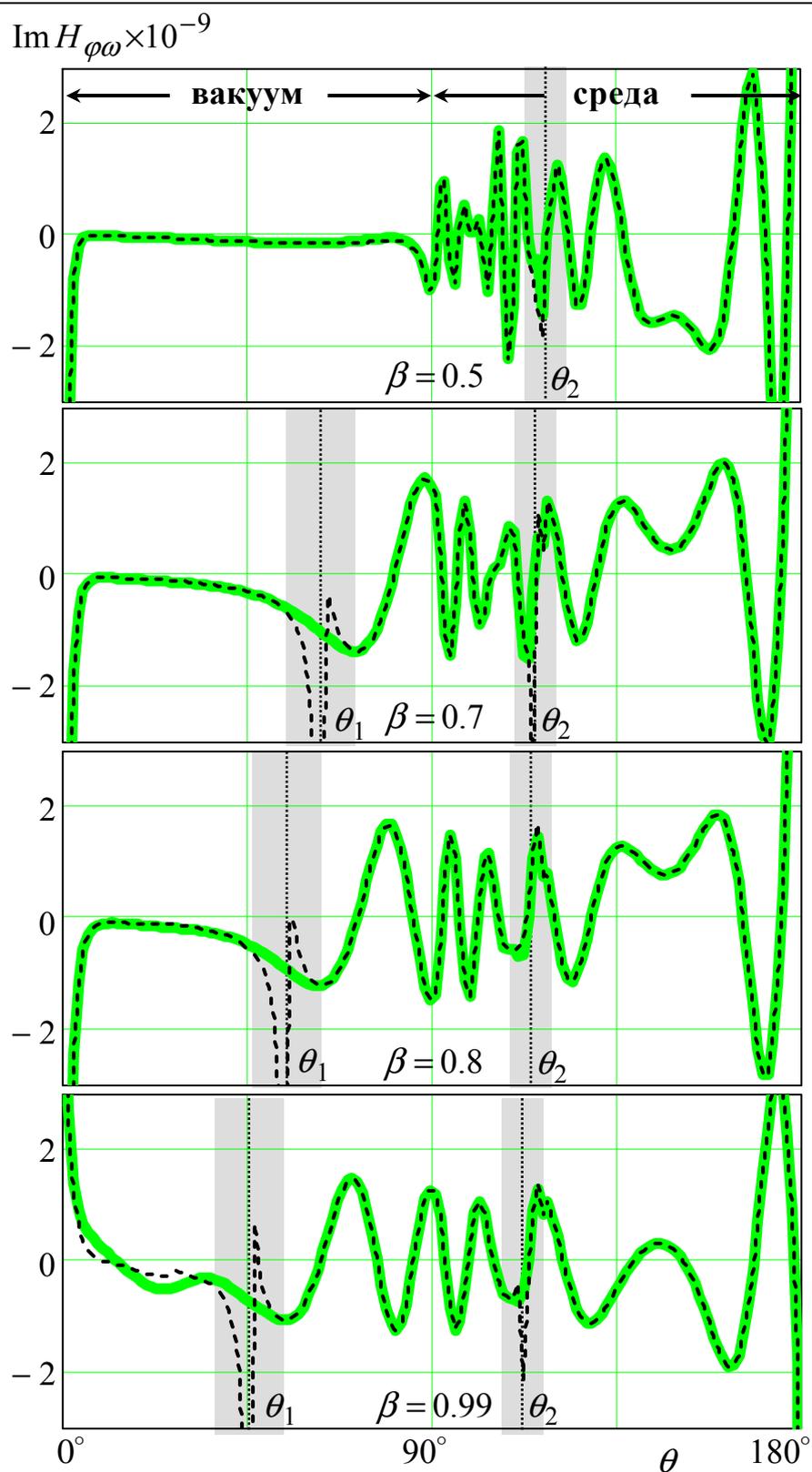


Рис. 3.15. Пространственное распределение мнимой части Фурье-гармоники магнитного поля – зависимость $\text{Im } H_{\varphi\omega}(\theta)$ ($\text{Ам}^{-1}\text{с}$). Параметры расчета приведены в подписи к рис. 3.14.

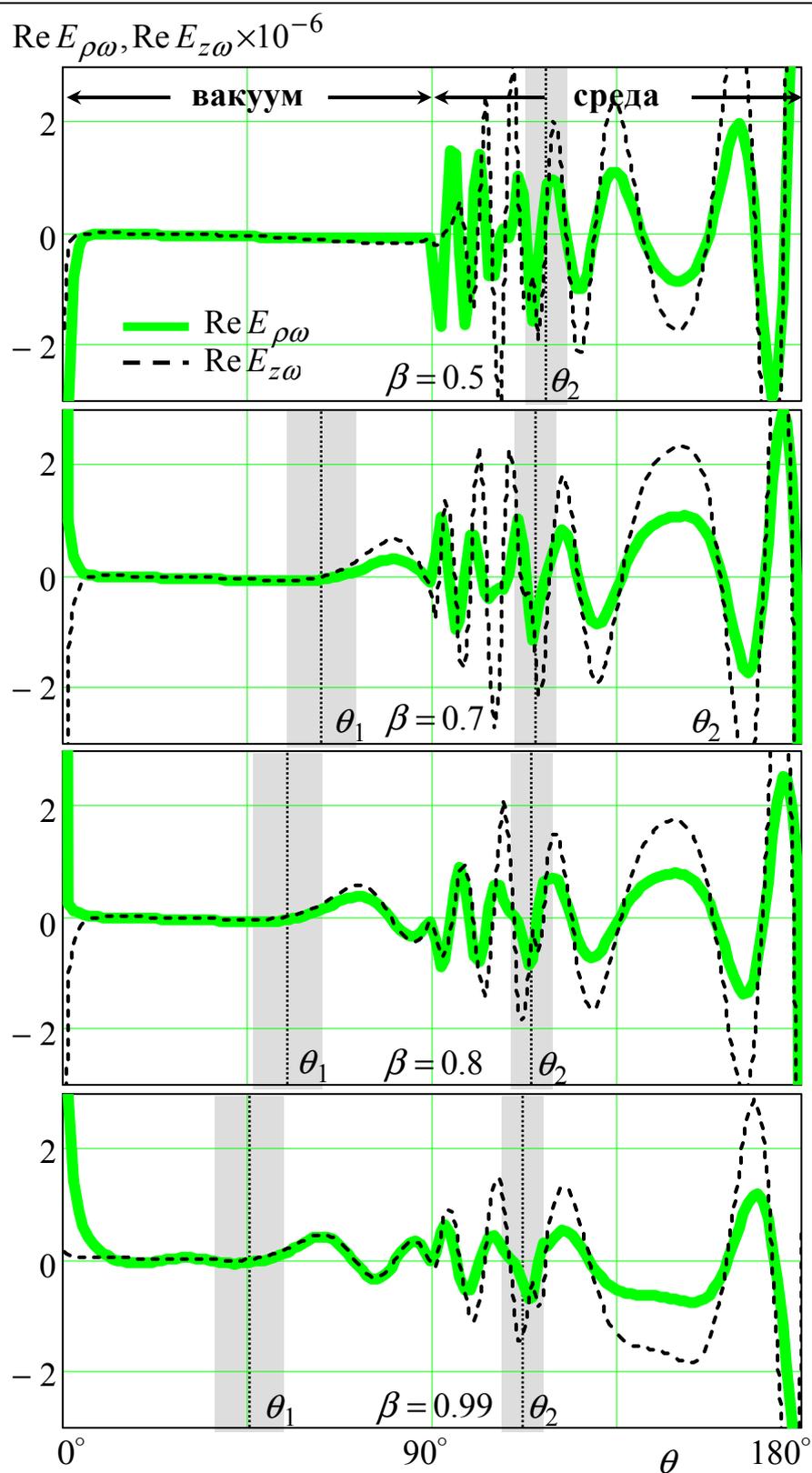


Рис. 3.16. Пространственное распределение вещественной части Фурье-гармоник электрического поля ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$). Параметры расчета приведены в подписи к рис. 3.14.

Пространственное распределение мнимой части Фурье-гармоники $H_{\varphi\omega}$ (зависимость $\text{Im}H_{\varphi\omega}$ от угла θ при $R = \text{const}$) при различных значениях β представлено на рис. 3.15. Из сравнения рис. 3.14 и 3.15 видно, что зависимости $\text{Re}H_{\varphi\omega}(\theta)$ и $\text{Im}H_{\varphi\omega}(\theta)$ качественно совпадают. На обоих рисунках видно, что результаты расчета по точным формулам совпадают с асимптотическими результатами вне областей «полутени». Также из рис. 3.14 и 3.15 отчетливо видно наличие нижнего порога по скорости для ОЧПИ в вакуумной области. Таким образом, как и в случае изотропной среды, для иллюстрации эффектов можно ограничиться рассмотрением только вещественной части Фурье-гармоник, что мы и будем делать в дальнейшем. Рис. 3.16 иллюстрирует пространственное распределение вещественных частей Фурье-гармоник компонент E_ρ и E_z электрического поля. Зависимости $\text{Re}E_{\rho\omega}(\theta)$ и $\text{Re}E_{z\omega}(\theta)$, представленные на рис. 3.16, также качественно совпадают с зависимостью $\text{Re}H_{\varphi\omega}(\theta)$, подробно проанализированной выше. Таким образом, приведенные результаты для пространственного распределения Фурье-гармоник полного поля находятся в согласии с результатами аналитических исследований и в частности свидетельствуют о наличии обратного черенковско-переходного излучения в вакууме.

Обратимся теперь к анализу спектрального распределения Фурье-гармоник в фиксированной точке пространства. Для этого на рисунке 3.17 представлена зависимость $\text{Re}H_{\varphi\omega}(\omega)$ при $R = \text{const}$, различных углах наблюдения θ в полупространстве $z < 0$ и при различных значениях скорости β (значения β отложены по вертикальной оси). На рис. 3.18 представлены аналогичные зависимости для Фурье-гармоник электрического поля. Результаты рис. 3.17 и 3.18 получены с помощью численного интегрирования по точным формулам.

Диапазон частот эффекта ОЧПИ четко проявляется на рис. 3.17 и 3.18 в виде нескольких осцилляций на приведенных кривых. Согласно (3.2.6), этот диапазон определяется неравенством $\omega_{p\parallel} < \omega < \Omega(\beta)$. На рис. 3.17 и 3.18 показаны вертикальная линия $\omega = \omega_{p\parallel}$ и линия $\beta_{\text{RCTR}}(\omega)$. Частоты, на которых указанные линии пересекаются с прямой $\beta = \text{const}$, являются граничными частотами спектра ОЧПИ. Как видно из рис. 3.17 и 3.18, результаты численных расчетов находятся в соответствии с предсказаниями формул (3.2.6), (3.2.8). Кроме того, из рисунков видно, что амплитуда осцилляций Фурье-гармоник вакуумного ОЧПИ и число этих осцилляций увеличивается с увеличением угла наблюдения и максимальна вблизи границы раздела, ширина спектра максимальна при $\beta \rightarrow 1$.

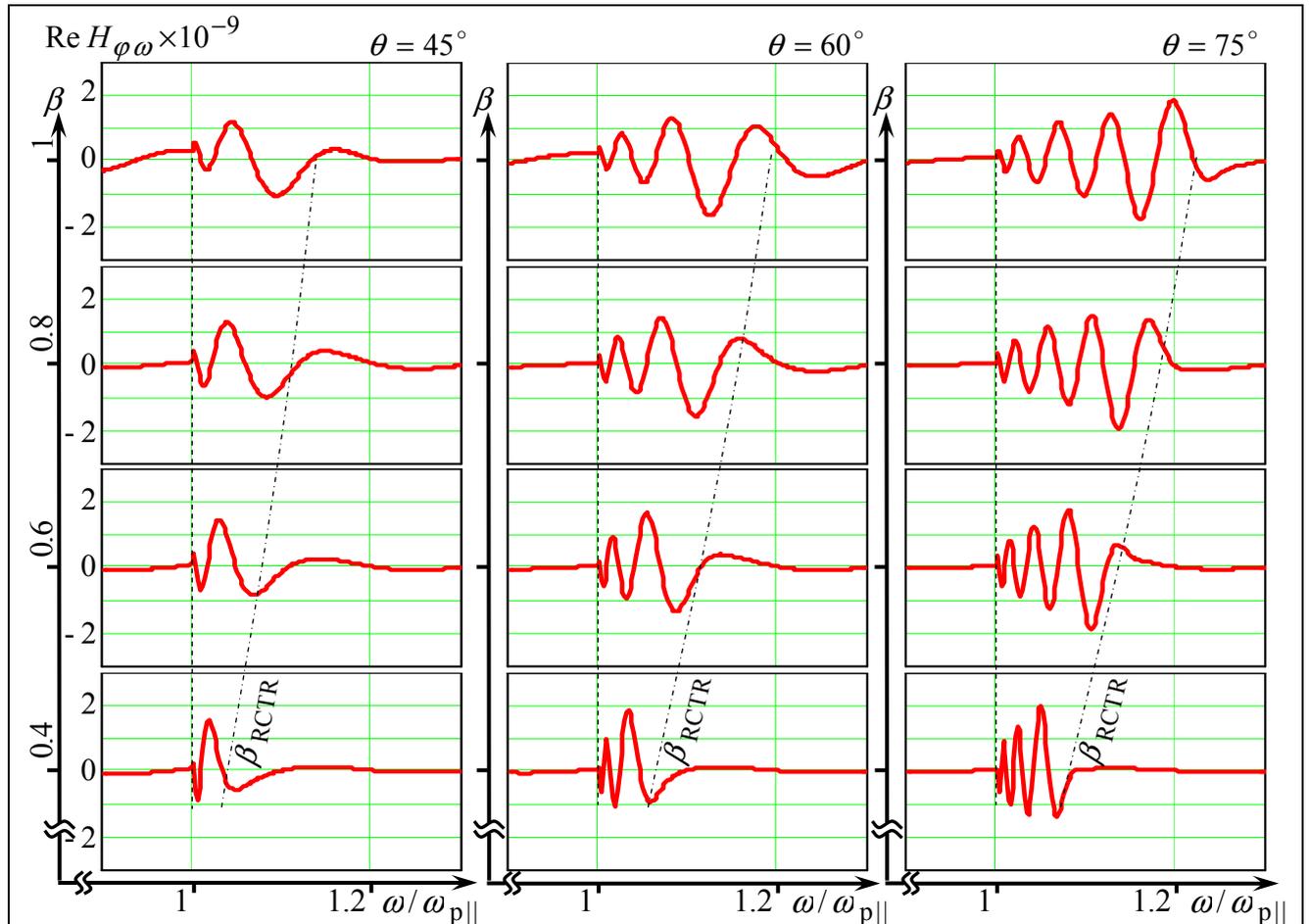


Рис. 3.17. Спектральное распределение вещественной части Фурье-гармоники полного магнитного поля в вакууме (зависимость $\text{Re}H_{\phi\omega}$ ($\text{Ам}^{-1}\text{с}$) от ω) для $q = -1\text{нКл}$ при $R = 14\text{см}$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 75^\circ$ и различных β (значения β отложены по вертикальной оси). Параметры сред приведены в подписи к рис. 3.14.

Интересно сравнить результаты рис. 3.17 и 3.18 с аналогичными спектрами для случая границы раздела вакуум – изотропная левая среда (рис. 2.14, 2.15). Как видно, в случае левой среды не только верхний, но и нижний пороги вакуумного ОЧПИ монотонно растут с ростом скорости частицы. Также отметим, что в случае рассматриваемой анизотропной среды нижний порог вакуумного ОЧПИ β_{RCTR} связан с эффектом полного внутреннего отражения, а верхний порог отсутствует. В этом состоит одно из основных отличий этого эффекта от аналогичного явления в случае левой среды, когда с полным внутренним отражением связан верхний порог, а нижний порог является порогом генерации ИВЧ (см. раздел 2.2.1).

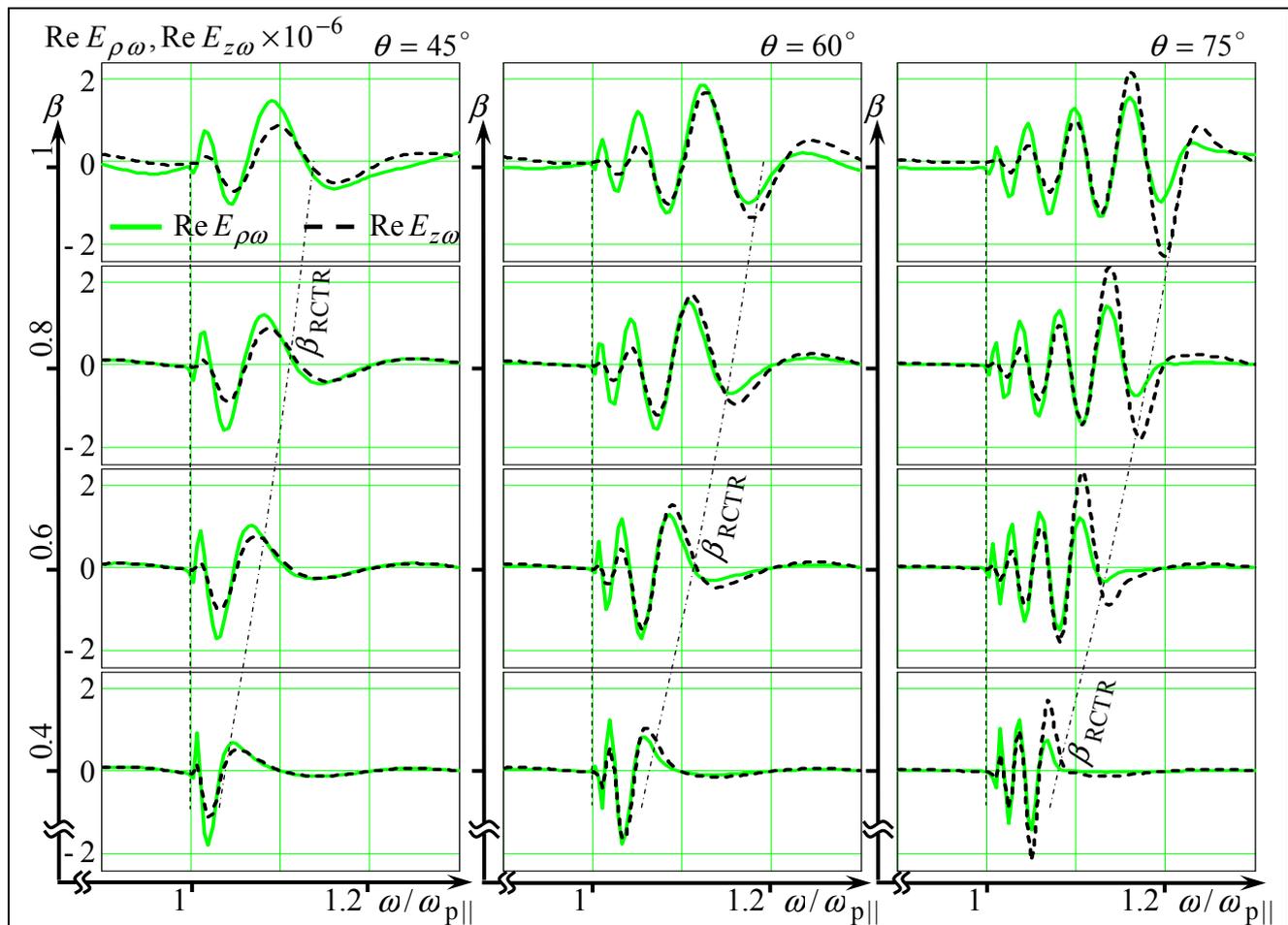


Рис. 3.18. Спектральное распределение вещественной части Фурье-гармоник полного электрического поля в вакууме (зависимости $\text{Re}E_{\rho\omega}$ и $\text{Re}E_{z\omega}$ ($\text{Вм}^{-1}\text{с}$) от ω). Параметры расчетов приведены в подписи к рис. 3.17.

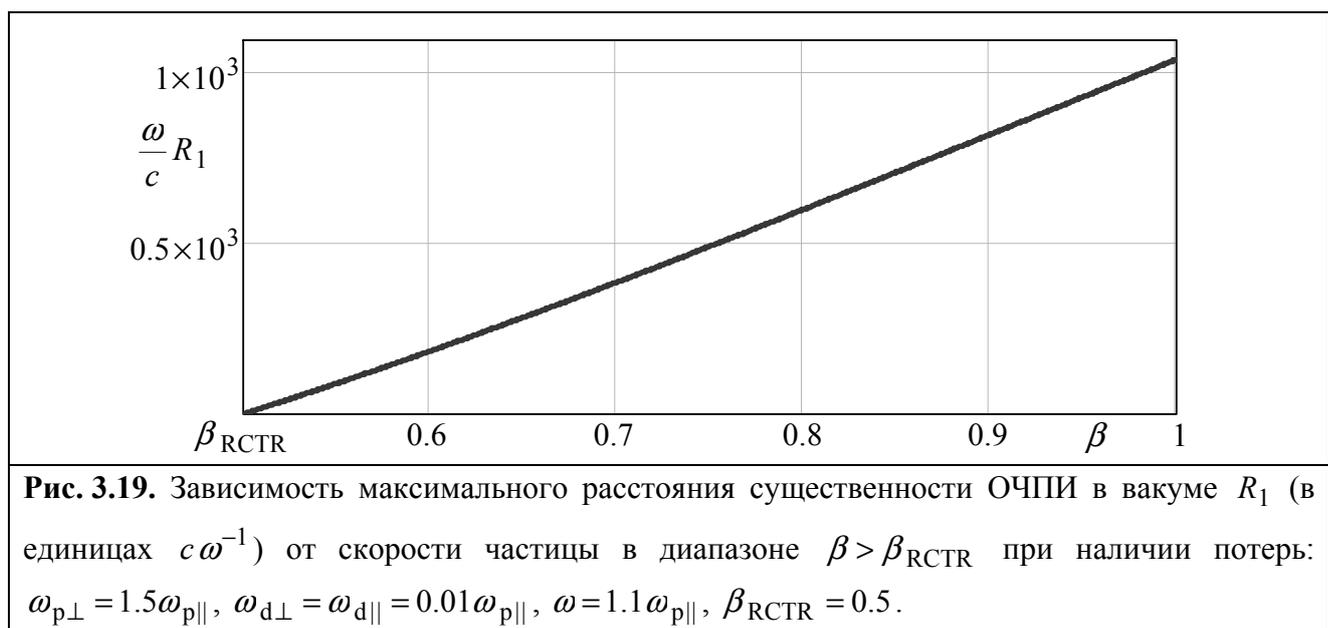


Рис. 3.19. Зависимость максимального расстояния существенности ОЧПИ в вакууме R_1 (в единицах $c\omega^{-1}$) от скорости частицы в диапазоне $\beta > \beta_{\text{RCTR}}$ при наличии потерь: $\omega_{\perp} = 1.5\omega_{\parallel}$, $\omega_{d\perp} = \omega_{d\parallel} = 0.01\omega_{\parallel}$, $\omega = 1.1\omega_{\parallel}$, $\beta_{\text{RCTR}} = 0.5$.

Как и в случае левой среды, частотные границы эффекта ОЧПИ ярко выражены и могут в принципе быть измерены с хорошей точностью. Поэтому спектр ОЧПИ может быть использован для определения скорости движения заряженных частиц в малых пучках в ускорителях. Отметим также, что рассмотренная анизотропная среда, являясь гораздо менее экзотичной по сравнению с левой средой, может быть и реализована более простыми средствами. В частности, анизотропия с рассмотренным видом дисперсии может наблюдаться в обычных одноосных кристаллах на частотах, существенно превышающих все резонансные частоты.

В заключение остановимся на вопросе о пределах существенности вакуумного ОЧПИ и, соответственно, о возможности наблюдения этого излучения в реальных условиях. Напомним, что по определению области существенности на ее границе экспоненциальный множитель в Фурье-гармонике ОЧПИ убывает в e^2 раз. Как было показано в разделе 3.2.2, максимальный размер области существенности ОЧПИ в вакууме определяется параметром R_1 , выражение для которого (3.2.34) с учетом (3.2.23) можно записать в виде

$$R_1 = \frac{8}{k_1} \left[\sqrt{\frac{1 + |\epsilon'_\perp| \beta^2}{\epsilon_1 (\epsilon'_\parallel)^{-1} |\epsilon'_\perp| \beta^2 - 1 - |\epsilon'_\perp| \beta^2}} \left(\frac{\epsilon''_\parallel}{\epsilon'_\parallel} + \frac{\epsilon''_\perp}{|\epsilon'_\perp|} \frac{1}{1 + |\epsilon'_\perp| \beta^2} \right) \right]^{-2}.$$

На рис. 3.19 представлена зависимость этого расстояния от скорости β в диапазоне ОЧПИ (3.2.8) при некоторых реалистичных значениях параметров, отвечающих за диссипацию. Как видно из рис. 3.19, R_1 почти линейно возрастает с ростом β и имеет величину порядка тысяч длин волн в вакууме. Эта оценка свидетельствует о возможности уверенного обнаружения ОЧПИ в эксперименте.

3.6. Выводы

В данной главе было проанализировано электромагнитное поле, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела между вакуумом и электрически анизотропной немагнитной средой. Был рассмотрен случай, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид, типичный для одноосных кристаллов, причем его компоненты обладают дисперсией плазменного типа. Для сравнения было рассмотрено два возможных соотношения плазменных частот, при которых генерируемое в среде излучение Вавилова–Черенкова носит либо прямой, либо обратный характер.

Электромагнитное поле исследовалось с помощью двух методов. Первый из них основан на применении метода перевала для построения асимптотик поля в дальней по отношению к точке влета зоне. Как и в случае левой среды (глава 2) в поле объемного излучения основную роль играют сферические волны переходного излучения (вклад седловой точки) и цилиндрические волны излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) и обратного черенковско-переходного излучения (ОЧПИ). Была построена неравномерная асимптотика, учитывающая указанные типы объемных волн. Данная асимптотика корректно описывает поведение электромагнитного поля вне переходных областей (областей

«полутени»), внутри которых происходит переход от наличия волн ОЧПИ к их отсутствию. При учете конечных потерь в среде области «полутени» оказываются ограниченными и по углу, и по расстоянию (ограничение по расстоянию возникает вследствие затухания волн ИВЧ в среде).

Были найдены условия генерации ОЧПИ, которые являются условиями захвата соответствующих полюсов при трансформации исходного контура интегрирования к контуру наискорейшего спуска. В отличие от случая левой среды ОЧПИ в вакуумной области имеет только нижний порог по скорости движения частицы, причем этот порог связан с полным внутренним отражением. В частотной области вакуумное ОЧПИ имеет как нижний, так и верхний пороги. Нижний порог совпадает с одной из плазменных частот, а верхний порог, монотонно возрастающий с ростом скорости, связан с полным внутренним отражением на границе.

Был проведен анализ влияния потерь в среде на распространение указанных типов излучения (переходное излучение, излучение Вавилова-Черенкова и ОЧПИ) и оценены пространственные области их существенности. Как и в случае левой среды, наличие потерь в среде приводит к ослаблению волн ОЧПИ не только в среде, но и вакуумной области. Максимальное расстояние от точки влета заряда в среду, на котором ОЧПИ в вакууме является значимым эффектом, составляет (при использовании реалистичных параметров анизотропной среды) величину порядка тысячи длин волн. Эта величина представляется вполне достаточной для регистрации излучения в эксперименте и его использования в целях диагностики пучков частиц или диагностики свойств материалов.

Другой метод исследования полного поля состоял в применении разработанного численного алгоритма для расчета Фурье-гармоник поля по точным формулам. С помощью данного метода было исследовано пространственное и спектральное распределение Фурье-гармоник полного поля. Результаты для Фурье-гармоник подтверждают все выводы аналитического исследования, в частности, наличие эффекта ОЧПИ и его свойства. Отметим, что в целях диагностики (пучков частиц или свойств материалов) могут быть использованы, прежде всего, граничные частоты в спектре вакуумного ОЧПИ.

Заключение

В настоящей диссертации был рассмотрен ряд задач об излучении движущегося заряда в присутствии материальной среды. Прежде всего, это анализ поля заряда, равномерно движущегося в безграничной среде с частотной дисперсией. Были проанализированы случай среды с произвольным числом резонансных частот, случай «левой» среды (среды с отрицательным показателем преломления) и случай анизотропной плазмopodobной среды. Во всех трех ситуациях компоненты электромагнитного поля заряда были представлены в виде суммы физически различных составляющих: «квазикулоновской» (квазистатической) составляющей, волновой составляющей и составляющей «плазменного следа» (если таковая имеется). Было показано, что полученные выражения обладают рядом преимуществ по сравнению с ранее известными. Также был разработан эффективный метод численного расчета полного поля, использующий определенную трансформацию исходного контура интегрирования. Среди наиболее ярких эффектов следует отметить более сильное отставание волнового поля от заряда в левой среде по сравнению со случаем обычной (правой) среды. Данный эффект является следствием обратного характера излучения Вавилова–Черенкова в левой среде. Аналогичный, но менее выраженный эффект наблюдался и при рассмотрении анизотропной среды в такой ситуации, когда генерируемое излучение Вавилова–Черенкова носит обратный характер.

Далее были рассмотрены две задачи, посвященные анализу поля заряда, пересекающего границу раздела между вакуумом и средой. Было рассмотрено два случая: когда заряд влетает в левую среду и когда он влетает в электрически анизотропную среду с плазменной дисперсией компонент тензора диэлектрической проницаемости.

Электромагнитное поле исследовалось с помощью двух методов. Первый из них основан на применении метода перевала для построения асимптотик поля в дальней (по отношению к точке влета) зоне. При этом в обеих граничных задачах была построена асимптотика, учитывающая главные члены объемного излучения – сферические и цилиндрические волны. Были найдены условия, при которых равномерная асимптотика переходит в неравномерную, и оценены области «полутени».

В случае, когда генерируемое в среде излучение Вавилова–Черенкова носит обратный характер (а это имеет место как для левой среды, так и для анизотропной среды при определенных условиях), в вакууме генерируется излучение, названное «обратным черенковско-переходным излучением» (ОЧПИ). Найдены условия генерации ОЧПИ и показано, что в случае левой среды ОЧПИ в вакуумной области является двухпороговым эффектом как по скорости движения частицы, так и по частоте. Нижний порог совпадает с порогом генерации излучения Вавилова–Черенкова, а верхний порог связан с полным внутренним отражением на границе. В случае анизотропной среды ОЧПИ в вакууме имеет только нижний порог по скорости, связанный с полным внутренним отражением.

Был проведен анализ влияния потерь в среде на распространение волн переходного излучения, излучение Вавилова–Черенкова и ОЧПИ, а также были оценены пространственные области их существенности. Интересно отметить, что наличие потерь в среде приводит к затуханию волн ОЧПИ не только в среде (что естественно), но и вакуумной

области. Это объясняется тем, что излучение Вавилова–Черенкова, порождающее ОЧПИ, проходит определенный путь в среде, прежде чем достигнет границы и преломится в вакуумную область. Проведенные оценки размеров областей существенности для реалистичных параметров сред свидетельствуют о том, что ОЧПИ в вакуумной области может быть уверенно зарегистрировано в эксперименте и использовано в целях диагностики пучков частиц или свойств метаматериалов.

Другой метод исследования состоял в применении разработанного численного алгоритма для расчета Фурье-гармоник поля и полного поля по точным формулам. С помощью данного метода было исследовано пространственное и спектральное распределение Фурье-гармоник полного поля. Результаты для Фурье-гармоник подтверждают все выводы аналитического исследования, в частности, возможность эффекта ОЧПИ и его пороговые свойства. Для случая левой среды было также рассчитано полное поле и показано, что обратное черенковско-переходное излучение может быть доминирующим типом излучения.

Отметим, что полученные результаты могут применяться как для диагностики пучков заряженных частиц, так и для определения электромагнитных характеристик различных материалов. К примеру, весьма привлекательными для этих целей представляются пороговые свойства обратного черенковско-переходного излучения.

Приложение А. О выводе выражений для компонент поля равномерно движущегося заряда с использованием принципа причинности

Задача о поле заряда, движущегося равномерно, прямолинейно и при этом бесконечно долго в неограниченной среде является одной из базовых (модельных) задач электродинамики. Как и любая другая задача с бесконечно существующим источником, для однозначного решения она требует наложения определенных «условий на бесконечности». В теории излучения Вавилова–Черенкова, как и в теории волновых процессов вообще, применяются условие Зоммерфельда, условие Мандельштама и «условие поглощаемости» (требование экспоненциального убывания волны при наличии поглощения) [79]. Отметим, что условие Зоммерфельда, требующее ухода волны от источника в смысле направления фазовой скорости, может применяться без дополнительного обоснования только в том случае, когда фазовая скорость по направлению совпадает с групповой. Поэтому задачи для относительно сложных сред решались либо с помощью условия Мандельштама (требование ухода волны от источника в смысле направления групповой скорости), либо с помощью «условия поглощаемости» [8, 92]

Несмотря на достаточную ясность данного вопроса, определенный методический интерес представляет процедура получения решения для случая бесконечно существующего источника из задачи с источником, «включающимся» в некоторый момент времени. Однозначное решение такой задачи получается непосредственно из принципа причинности. В наиболее распространенной в физике формулировке этот принцип математически выражается условием зануления поля до момента включения источника. В настоящем приложении мы покажем, как из принципа причинности получаются выражения (1.1.1), (1.1.2) для поля заряда, движущегося бесконечно долго в изотропной диспергирующей среде.

В принципе не имеет значения, какую начальную задачу мы будем рассматривать, т. к. в последующем будет проведен предельный переход к случаю бесконечно движущегося заряда. Можно, к примеру, использовать следующую постановку задачи. Точечный заряд q рождается в момент t_1 в некоторой точке пространства, а при $t > t_1$ он движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{V}_1 = V \vec{e}_z = c \beta \vec{e}_z$ ($\beta > 0$). При этом, имея в виду закон сохранения заряда, будем считать, что одновременно в той же точке рождается заряд противоположного знака, движущийся со скоростью $\vec{V}_2 = -V \vec{e}_z = -c \beta \vec{e}_z$. Законы движения частиц после рождения выглядят следующим образом:

$$z_1 = V t, \quad z_2 = -V(t - 2t_1),$$

при этом частицы появляются в точке $z = z_1(t_1) = z_2(t_1) = V t_1$, $x = y = 0$. В такой постановке плотности тока и заряда имеют вид:

$$\rho = [q \delta(x) \delta(y) \delta(z - V t) - q \delta(x) \delta(y) \delta(z + V(t - 2t_1))] \Theta(t - t_1), \quad \vec{j} = j \vec{e}_z = V \rho \vec{e}_z, \quad (\text{A.1})$$

где $\Theta(\xi)$ – единичная функция Хэвисайда.

Для последующего понадобится разложение (A.1) в четырехкратный интеграл Фурье:

$$\rho(\vec{R}, t) = \int d^3\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho_{\omega, \vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{R} - i\omega t), \quad \vec{j}(\vec{R}, t) = \int d^3\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{j}_{\omega, \vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{R} - i\omega t). \quad (\text{A.2})$$

Используя интегральное представление для единичной функции $\Theta(\xi)$

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ix\xi)}{x - i0} dx,$$

получаем

$$\begin{Bmatrix} j_{\omega, \vec{k}} \\ \rho_{\omega, \vec{k}} \end{Bmatrix} = \frac{iq}{16\pi^4} \begin{Bmatrix} V \\ 1 \end{Bmatrix} \exp(i(\omega - V k_z)t_1) \left[\frac{1}{\omega - V k_z + i0} \pm \frac{1}{\omega + V k_z + i0} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Введем векторный $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ и скалярный Φ потенциалы, через которые поле определяется по формулам

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (\text{A.4})$$

Для временных Фурье-образов потенциалов из уравнений Максвелла в калибровке Лоренца ($\text{div } \vec{A}_\omega = i\omega c^{-1} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \Phi_\omega$) получаем следующие уравнения:

$$\Delta \vec{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} \vec{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \mu(\omega) \vec{j}_\omega, \quad \Delta \Phi_\omega + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} \Phi_\omega = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \rho_\omega. \quad (\text{A.5})$$

Представляя \vec{A}_ω и Φ_ω в виде трехкратных интегралов Фурье в (A.5) и используя (A.3), легко получить соответствующие Фурье-образы. В итоге для потенциалов имеем

$$\begin{Bmatrix} A_z \\ \Phi \end{Bmatrix} = -\frac{iq}{4\pi^3} \int d^3\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \begin{Bmatrix} \beta \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{Bmatrix} \frac{\exp(i\vec{k}_\rho \vec{\rho})}{(\omega + i0)^2 n^2(\omega + i0) c^{-2} - k^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\omega - V k_z + i0} \pm \frac{1}{\omega + V k_z + i0} \right] \exp(ik_z(z - V t_1) + i\omega(t_1 - t)). \quad (\text{A.6})$$

При $t < t_1$ контур интегрирования на плоскости ω может быть дополнен бесконечной полуокружностью в верхней полуплоскости, а поскольку источник еще не появился, то, согласно принципу причинности, поле должно быть равно нулю, то есть в области выше контура не может быть полюсов. Если в среде учитывается поглощение, то полюсы автоматически будут расположены ниже вещественной оси (так как при $t > t_1$ они должны обеспечить затухание во времени). Тогда требование зануления поля при $t < t_1$ выполнится автоматически. Если же пренебречь поглощением, то полюсы, располагающиеся бесконечно близко к вещественной оси, должны обходиться сверху. Для того чтобы формально отразить это обстоятельство, в (A.6) в аргументах функций, которые могут давать особенности, $(\omega^2 n^2(\omega), \varepsilon(\omega), \mu(\omega))$, введена добавка $+i0$ к ω , смещающая полюса вниз с вещественной оси.

В дальнейшем мы рассмотрим только поле заряда, движущегося в положительном направлении оси z . Оно описывается формулой (A.6), если в ней отбросить второе слагаемое в квадратных скобках. Все последующие вычисления могут быть аналогичным образом проведены и для поля второго заряда, который движется в отрицательном

направлении оси z .

Изменим в (А.6) порядок интегрирования и перейдем к цилиндрическим координатам как в исходном пространстве, так и в пространстве волновых векторов, при этом $\exp(i\vec{k}_\rho \vec{\rho}) = \exp(ik_\rho \rho \cos(\varphi_k - \varphi))$. Интегрируя по углу φ_k , используя интегральное представление для функции Бесселя

$$\int_0^{2\pi} \exp(ik_\rho \rho \cos(\varphi_k - \varphi)) d\varphi_k = 2\pi J_0(k_\rho \rho), \quad (\text{A.7})$$

и переходя к интегрированию по бесконечному интервалу, получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} A_z \\ \Phi \end{matrix} \right\} = & -\frac{iq}{4\pi^2 V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \begin{matrix} \beta \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{matrix} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\exp(ik_z(z - Vt_1) + i\omega(t_1 - t))}{k_z^2 + k_\rho^2 - (\omega + i0)^2 n^2 (\omega + i0) c^{-2}} \frac{1}{k_z - \omega V^{-1} - i0}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

причем в интеграле по k_ρ контур идет по верхнему берегу разреза функции Ханкеля, который проводится по отрицательной вещественной полуоси. Интеграл по k_z в (А.8) можно взять по вычетам, дополняя исходный контур полуокружностью бесконечного радиуса в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака $z - Vt_1$:

$$\left\{ \begin{matrix} A_z \\ \Phi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A_z^q \\ \Phi^q \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} A_z^* \\ \Phi^* \end{matrix} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

$$\left\{ \begin{matrix} A_z^q \\ \Phi^q \end{matrix} \right\} = \frac{q}{2\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \begin{matrix} \beta \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{matrix} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho)}{k_\rho^2 - s^2(\omega + i0)} \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{V} - t\right)\right] \cdot \Theta(z - Vt), \quad (\text{A.10})$$

$$\left\{ \begin{matrix} A_z^* \\ \Phi^* \end{matrix} \right\} = \frac{q}{4\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \begin{matrix} \beta \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{matrix} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \frac{\exp(ik_{z0}|z - Vt_1| + i\omega(t_1 - t))}{k_{z0}(k_{z0} \operatorname{sgn}(z - Vt_1) - \omega V^{-1} - i0)}, \quad (\text{A.11})$$

где

$$s^2(\omega + i0) = \frac{(\omega + i0)^2}{V^2} (n^2(\omega + i0)\beta^2 - 1), \quad (\text{A.12})$$

$$k_{z0} = \sqrt{(\omega + i0)^2 n^2 (\omega + i0) c^{-2} - k_\rho^2}, \quad \operatorname{Im} k_{z0} > 0. \quad (\text{A.13})$$

В (А.10) можно сразу проинтегрировать по k_ρ , замыкая контур в верхнюю полуплоскость:

$$\left\{ \begin{matrix} A_z^q \\ \Phi^q \end{matrix} \right\} = \frac{iq}{2V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \begin{matrix} \beta \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{matrix} \right\} H_0^{(1)}(s(\omega + i0)\rho) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{V} - t\right)\right] \cdot \Theta(z - Vt_1), \quad (\text{A.14})$$

где радикал $s = \sqrt{s^2}$ определен правилом $\operatorname{Im} s > 0$.

Рассмотрим ситуацию, когда момент рождения отодвигается в бесконечно далекое прошлое, т. е. $t_1 \rightarrow -\infty$ при конечных ρ и z . При этом $z - Vt_1 \rightarrow +\infty$, $\Theta(z - Vt_1) = 1$, и из (А.14) получаем

$$\begin{Bmatrix} A_z^q \\ \Phi^q \end{Bmatrix} = \frac{iq}{2V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \begin{Bmatrix} \beta \mu(\omega+i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega+i0) \end{Bmatrix} H_0^{(1)}(s(\omega+i0)\rho) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{V}-t\right)\right], \quad \text{Im}s(\omega+i0) > 0. \quad (\text{A.15})$$

С помощью формул (А.4) из (А.15) легко получить выражения для компонент электромагнитного поля равномерно движущегося заряда (1.1.1), (1.1.2). Отметим, что полученный результат верен как при отсутствии диссипации, так и при ее наличии (в последнем случае добавка $+i0$ к частоте ω несущественна).

Покажем, что потенциалы A_z^* и Φ^* обращаются в нуль в рассматриваемом пределе. При $z-Vt_1 \rightarrow +\infty$ интеграл по k_ρ в (А.11) удобно вычислять с помощью метода перевала. Подынтегральная функция в этом интеграле обладает точками ветвления за счет радикала k_{z0} , а также полюсами $\pm s$ – нулями выражения $k_{z0} - \omega V^{-1} - i0$. Будем проводить разрезы на плоскости k_ρ по линиям $\text{Im}k_{z0} = 0$, при этом полюса $\pm s$ лежат на тех берегах разрезов, где $\text{sgn}(\text{Re}k_{z0}) = \text{sgn}\omega$, добавка $-i0$ смещает их на лист $\text{Im}k_{z0} > 0$. Как обычно, с помощью тригонометрической замены $k_\rho = k_0 \sin\psi$, где $k_0 = \sqrt{(\omega+i0)^2 n^2 (\omega+i0)c^{-2}}$, $\text{Im}k_0 > 0$, можно избавиться от точек ветвления ($k_{z0} = k_0 \cos\psi$) и построить контур наискорейшего спуска (КНС) на плоскости ψ . Анализируя взаимное расположение исходного контура интегрирования, КНС и полюсов $\pm s$ на плоскости ψ , можно показать, что при $t_1 \rightarrow -\infty$ и конечных ρ и z полюса не затрагиваются при трансформации исходного контура к КНС, а интеграл по КНС пропорционален величине $\left(\sqrt{\rho^2 + (z-Vt_1)^2}\right)^{-1} \xrightarrow{t_1 \rightarrow -\infty} 0$. Таким

образом, в рассматриваемом пределе потенциалы A_z^* , Φ^* обращаются в нуль, а потенциалы A_z^q , Φ^q описывают поле бесконечно движущегося заряда. Результат (А.15) совпадает с результатами, получаемыми с помощью условий на бесконечности [4, 5, 8, 19, 21–24, 51, 76].

Отметим, что тот же результат можно получить и с помощью «причинной» функции Грина. Для временных Фурье-образов потенциалов в калибровке Лоренца имеем уравнения (А.5). Заменяя в уравнениях для потенциалов $\vec{j}(x, y, z, t)$ и $\rho(x, y, z, t)$ на $\delta(x, y, z, t)$ и учитывая, что Фурье-образ $\delta(t)$ равен $(2\pi)^{-1}$, для временных Фурье-образов функций Грина имеем

$$\Delta G_\omega^{A,\Phi} + k_0^2(\omega) G_\omega^{A,\Phi} = -4\pi \begin{Bmatrix} c^{-1} \mu(\omega) \\ \varepsilon^{-1}(\omega) \end{Bmatrix} \frac{\delta(x, y, z)}{2\pi}, \quad (\text{A.16})$$

где верхняя строчка в правой части относится к функции Грина для скалярного потенциала, а нижняя – для векторного. Используя метод Фурье и требуя выполнения требования принципа причинности ($G^{A,\Phi} = 0$ при $t < 0$), для пространственно-трехмерного случая нетрудно получить следующие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} G^A(\vec{R}, t) \\ G^\Phi(\vec{R}, t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ \begin{array}{l} c^{-1} \mu(\omega + i0) \\ \varepsilon^{-1}(\omega + i0) \end{array} \right\} \frac{\exp(ik_0(\omega + i0)R - i\omega t)}{R}, \quad (\text{A.17})$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $k_0(\omega) = \sqrt{\omega^2 c^{-1} n^2(\omega)}$, причем $\text{Im} k_0(\omega + i0) > 0$. Добавка $+i0$ в аргументах функций $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ и $k_0(\omega)$ введена для смещения особенностей в нижнюю полуплоскость, что обеспечивает выполнение принципа причинности. Свертка (A.17) с источником, соответствующим бесконечно движущемуся заряду,

$$\rho = q \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt), \quad \vec{j} = q V \delta(x) \delta(y) \delta(z - Vt) \vec{e}_z,$$

дает результат (A.15).

Обсудим некоторые следствия, вытекающие из определения функции s в (A.15). Запишем его в виде $\text{Im}(s(\omega + i\delta)) > 0$, $\delta \rightarrow +0$. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора, учитывая лишь линейное слагаемое:

$$s^2(\omega + i\delta) = s^2(\omega) + i\delta ds^2/d\omega, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (\text{A.18})$$

где

$$\frac{ds^2}{d\omega} = \frac{2\omega}{V^2} (n^2(\omega)\beta^2 - 1) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \omega}{n^2(\omega)\beta^2 - 1} \frac{dn^2}{d\omega} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Рассмотрим случай среды без поглощения. В области частот излучаемых волн, где $n^2(\omega)\beta^2 - 1 > 0$, имеем

$$s^2(\omega + i0) = \frac{\omega^2}{V^2} (n^2(\omega)\beta^2 - 1) \left[1 + i0 \text{sgn}(ds^2/d\omega) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Извлекая корень из (A.20) и требуя, чтобы $\text{Im}s > 0$, имеем

$$s = \frac{|\omega|}{V} \sqrt{n^2(\omega)\beta^2 - 1} \left[1 + i0 \text{sgn}(ds^2/d\omega) \right] \text{sgn}(ds^2/d\omega). \quad (\text{A.21})$$

Учитывая необходимость выполнения того же условия $\text{Im}s > 0$ в области «местных волн», имеем

$$s = \begin{cases} \frac{|\omega|}{V} \sqrt{n^2(\omega)\beta^2 - 1} \left[\text{sgn}(ds^2/d\omega) + i0 \right] & \text{при } n^2(\omega)\beta^2 > 1, \\ i \frac{|\omega|}{V} \sqrt{1 - n^2(\omega)\beta^2} & \text{при } n^2(\omega)\beta^2 < 1. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Поясним физический смысл выбора знака в верхней строке формулы (A.22). На большом расстоянии от оси подынтегральное выражение в (A.15) пропорционально функции $\exp(is\rho - i\omega t)$. Поэтому в области распространяющихся волн, где s вещественно, величина $d\omega/ds$ представляет собой проекцию групповой скорости \vec{V}_g на направление \vec{e}_ρ :

$$V_{g\rho} = \frac{1}{ds/d\omega} = \frac{2s}{ds^2/d\omega}. \quad (\text{A.23})$$

Учитывая (A.22), мы видим, что $V_{g\rho} > 0$ во всем диапазоне частот поля излучения, т. е. волны распространяются от оси движения заряда в смысле направления групповой скорости.

Как и следовало ожидать, мы тем самым подтвердили справедливость принципа излучения Мандельштама.

Отметим, что, как правило, поглощением можно пренебречь только в области нормальной дисперсии показателя преломления, когда $\omega \, dn^2/d\omega > 0$. В такой ситуации, согласно (A.19), $\text{sgn}(ds^2/d\omega) = \text{sgn} \, \omega$, и из (A.22) получаем

$$s = \begin{cases} \frac{\omega}{V} \sqrt{n^2(\omega)\beta^2 - 1} & \text{при } n^2(\omega)\beta^2 > 1, \\ i \frac{|\omega|}{V} \sqrt{1 - n^2(\omega)\beta^2} & \text{при } n^2(\omega)\beta^2 < 1. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Таким образом, в области нормальной дисперсии для распространяющихся волн $\omega s > 0$. Так как проекция фазовой скорости на направление, ортогональное оси движения, равна $V_{\text{ph}\rho} = \omega s k_0^{-2} > 0$, то волна уходит от оси движения частицы по фазе, т. е. принцип излучения Зоммерфельда оказывается справедливым. Этого и следовало ожидать, так как в такой ситуации направления фазовой и групповой скоростей совпадают.

Однако в левых средах дисперсия показателя преломления является аномальной ($\omega \, dn^2/d\omega < 0$) в больших частотных интервалах, причем поглощение при этом может быть незначительно. Подчеркнем, однако, что дисперсия диэлектрической и магнитной проницаемостей остается нормальной, то есть $\omega \, d\varepsilon/d\omega > 0$, $\omega \, d\mu/d\omega > 0$ (в областях аномальной дисперсии этих величин велико поглощение). Покажем, что в такой ситуации волны ИВЧ по фазе распространяются к оси движения заряда.

Рассмотрим положительную полуось частот $\omega > 0$. Найдем знак квадратной скобки в (A.19), учитывая, что в области излучения $n^2\beta^2 - 1 > 0$:

$$\begin{aligned} \text{sgn} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \omega}{n^2(\omega)\beta^2 - 1} \frac{dn^2}{d\omega} \right] &= \text{sgn} \left[2n^2(\omega) - 2\beta^{-2} + \omega \frac{dn^2}{d\omega} \right] = \\ &= \text{sgn} \left[\varepsilon\mu + \omega\varepsilon \frac{d\mu}{d\omega} + \varepsilon\mu + \omega\mu \frac{d\varepsilon}{d\omega} - 2\beta^{-2} \right] = \text{sgn} \left[\varepsilon \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \mu \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} - 2\beta^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

В области нормальной дисперсии диэлектрической и магнитной проницаемости при положительных частотах обе производные в квадратных скобках положительны. Так как в левой среде $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, то вся квадратная скобка в (A.25) отрицательна независимо от величины β . Таким образом, в левой среде при $\omega > 0$ имеем $ds^2/d\omega < 0$. Функция $s^2(\omega)$ является четной вследствие четности $n^2(\omega)$. Следовательно, ее производная нечетна, и мы имеем $\text{sgn}(ds^2/d\omega) = -\text{sgn} \, \omega$, откуда согласно (A.22) $\text{sgn} \, s = -\text{sgn} \, \omega$. Это означает отрицательность проекции фазовой скорости на радиальное направление: $V_{\text{ph}\rho} = \omega s k_0^{-2} < 0$. Такого результата и следовало ожидать согласно условию Мандельштама, так как фазовая скорость в изотропной левой среде антипараллельна групповой.

Приложение Б. О вкладе «третьих» полюсов в асимптотику поля в случае границы раздела между вакуумом и левой средой

В данном приложении мы проанализируем расположение полюсов $\pm k_\rho^{\text{P3}}$ на комплексной плоскости k_ρ , а также возможности их захвата при трансформации исходного контура интегрирования к КНС на плоскости ψ .

В случае границы раздела между вакуумом и изотропной левой средой (2.1.1) уравнение для «третьих» полюсов (2.1.18) имеет вид

$$g_3(k_\rho^{\text{P3}}) = \varepsilon_1 k_z^{(2)}(k_\rho^{\text{P3}}) + \varepsilon_2 k_z^{(1)}(k_\rho^{\text{P3}}) = 0, \quad (\text{Б.1})$$

откуда

$$\left(k_\rho^{\text{P3}}\right)^2 = \frac{k_1^2 \varepsilon_2^2 - k_2^2 \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} = k_1^2 + \frac{(k_1^2 - k_2^2) \varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} = k_2^2 + \frac{(k_1^2 - k_2^2) \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}. \quad (\text{Б.2})$$

Для упрощения анализа положим, что потери присутствуют только в среде 2 и притом только в магнитной проницаемости μ_2 : $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = 0$, $\mu_2'' > 0$. Определим

$$k_\rho^{\text{P3}} = \sqrt{\left(k_\rho^{\text{P3}}\right)^2}, \quad \text{Im} k_\rho^{\text{P3}} > 0. \quad (\text{Б.3})$$

Имеем:

$$\left(k_\rho^{\text{P3}}\right)^2 = \frac{k_1^2 \varepsilon_2^2 - k_2^2 \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} = \frac{k_1^2 \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} + i \frac{\mu_2'' \varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2}{\mu_2'' \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}, \quad (\text{Б.4})$$

где $\text{Re} k_2^2 = \omega^2 c^{-2} \varepsilon_2 \mu_2'$. В предыдущих разделах, опираясь на условие существенности (2.1.19), мы учитывали в асимптотике поля только объемные волны. В рамках данного рассмотрения вместо условия (2.1.19) будем опираться на менее сильное условие $\text{Re} \left(k_\rho^{\text{P3}}\right)^2 > 0$, которое выполняется и для поверхностных волн, которые распространяются вдоль границы раздела. Как мы увидим в дальнейшем, вклады полюсов $\pm k_\rho^{\text{P3}}$ соответствуют именно таким волнам. Рассмотрим положение «третьих» полюсов в диапазонах, указанных на рис. 2.2.

Диапазоны I–1 и II–1. В этих диапазонах требование $\text{Re} \left(k_\rho^{\text{P3}}\right)^2 > 0$ приводит к условию $\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1^2$, и выражение для k_ρ^{P3} при условии малости мнимой части принимает вид

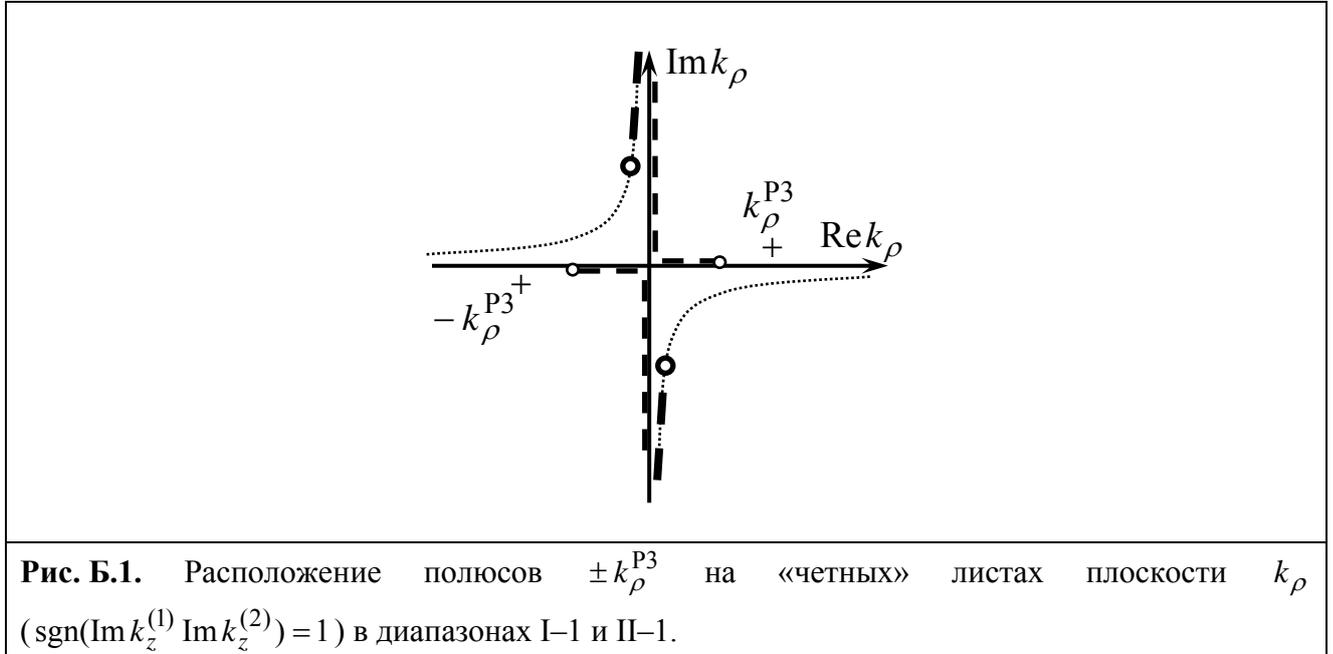
$$k_\rho^{\text{P3}} \approx \sqrt{\frac{k_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 |\text{Re} k_2^2|}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}} + i \frac{\mu_2'' \varepsilon_1^2 |\text{Re} k_2^2|}{2 \mu_2'' \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} \frac{\sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}}{\sqrt{k_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 |\text{Re} k_2^2|}}. \quad (\text{Б.5})$$

Анализ показывает, что уравнение (2.4.1) может быть выполнено только на «четных» листах

комплексной плоскости k_ρ , т.е. на листах, удовлетворяющих требованию

$$\text{Im} k_z^{(1)} \text{Im} k_z^{(2)} > 0. \quad (\text{«четные» листы}) \quad (\text{Б.6})$$

Расположение полюса показано символом «+» на рис. Б.1.



Уже из рис. А.1 видно, что если полюс k_ρ^{P3} и будет захвачен при трансформации исходного контура к КНС, его вклад будет представлять собой поверхностную волну. Чтобы установить факт захвата или его отсутствия рассмотрим плоскость ψ . На рис. А.2. показано взаимное расположение полюса $\psi_3^{(1)}$ ($\sin \psi_3^{(1)} = k_1^{-1} k_\rho^{P3}$) и контуров $\Gamma_{0\psi}$ и $\Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$. Можно видеть, что при трансформации захватывается полюс, лежащий в I четверти. Пренебрегая потерями ($\mu_2'' \rightarrow 0$), условие захвата можно записать в виде:

$$\sin \theta > \frac{k_1 \sqrt{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}}{\sqrt{k_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 |\text{Re} k_2^2|}}, \quad \varepsilon_2^2 > \varepsilon_1^2. \quad (\text{Б.7})$$

В принципе, опираясь на метод последовательных приближений (см., например, формулы (2.1.35) – (2.1.48) главы 2), можно уточнить условие (Б.7) на случай ненулевых потерь. Таким образом, при условии (Б.7) полюс k_ρ^{P3} дает в среде 1 поверхностную волну.

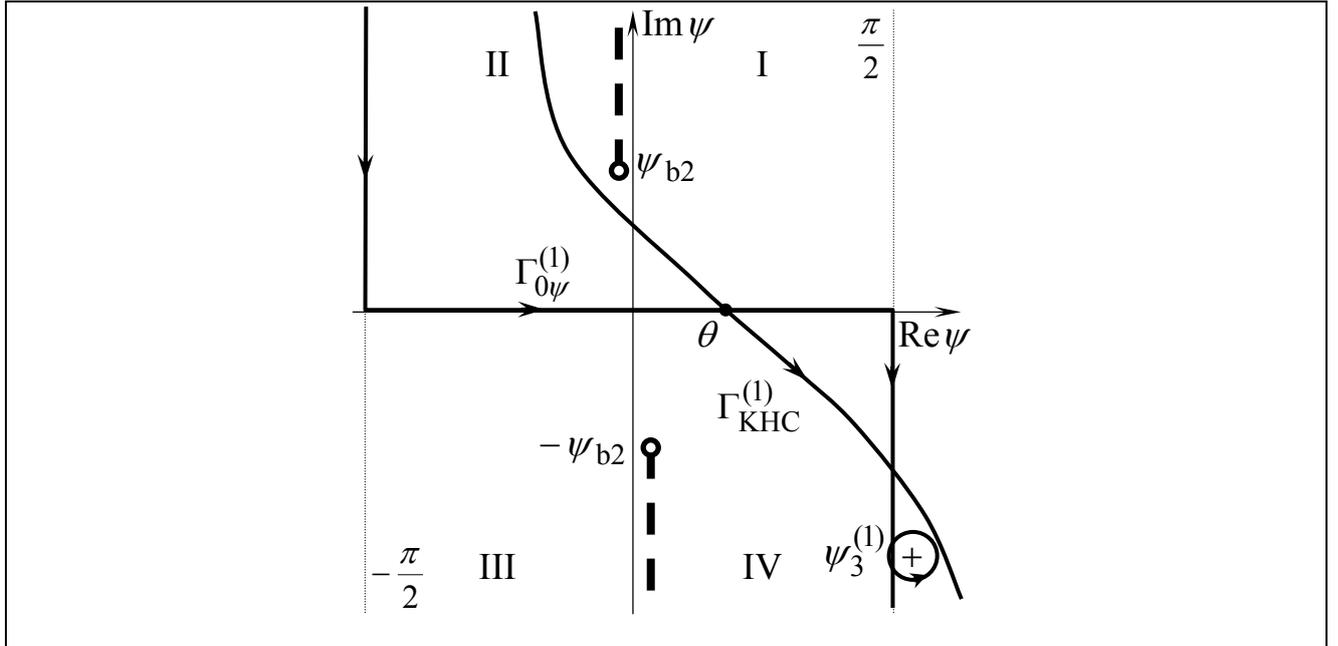


Рис. Б.2. «Третий» полюс («+») на плоскости ψ в диапазонах I–1 и II–1.

Диапазон I–2 (ПЧД). В этом диапазоне, как нетрудно убедиться, выполнено условие $\text{Re}(k_\rho^{\text{P3}})^2 > 0$, и полюс k_ρ^{P3} расположен вблизи вещественной оси. Имеем

$$k_\rho^{\text{P3}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} + \frac{i}{2} \frac{\mu_2''}{\mu_2'} \frac{\varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}}. \quad (\text{Б.8})$$

В данном диапазоне уравнение (Б.1) может быть выполнено только на «нечетных» листах, т. е. на листах, удовлетворяющих требованию

$$\text{Im} k_z^{(1)} \text{Im} k_z^{(2)} < 0. \quad (\text{«нечетные» листы}) \quad (\text{Б.9})$$

Нетрудно доказать, что полюс всегда располагается выше линии разреза $\text{Im}(k_z^{(2)})^2 = 0$.

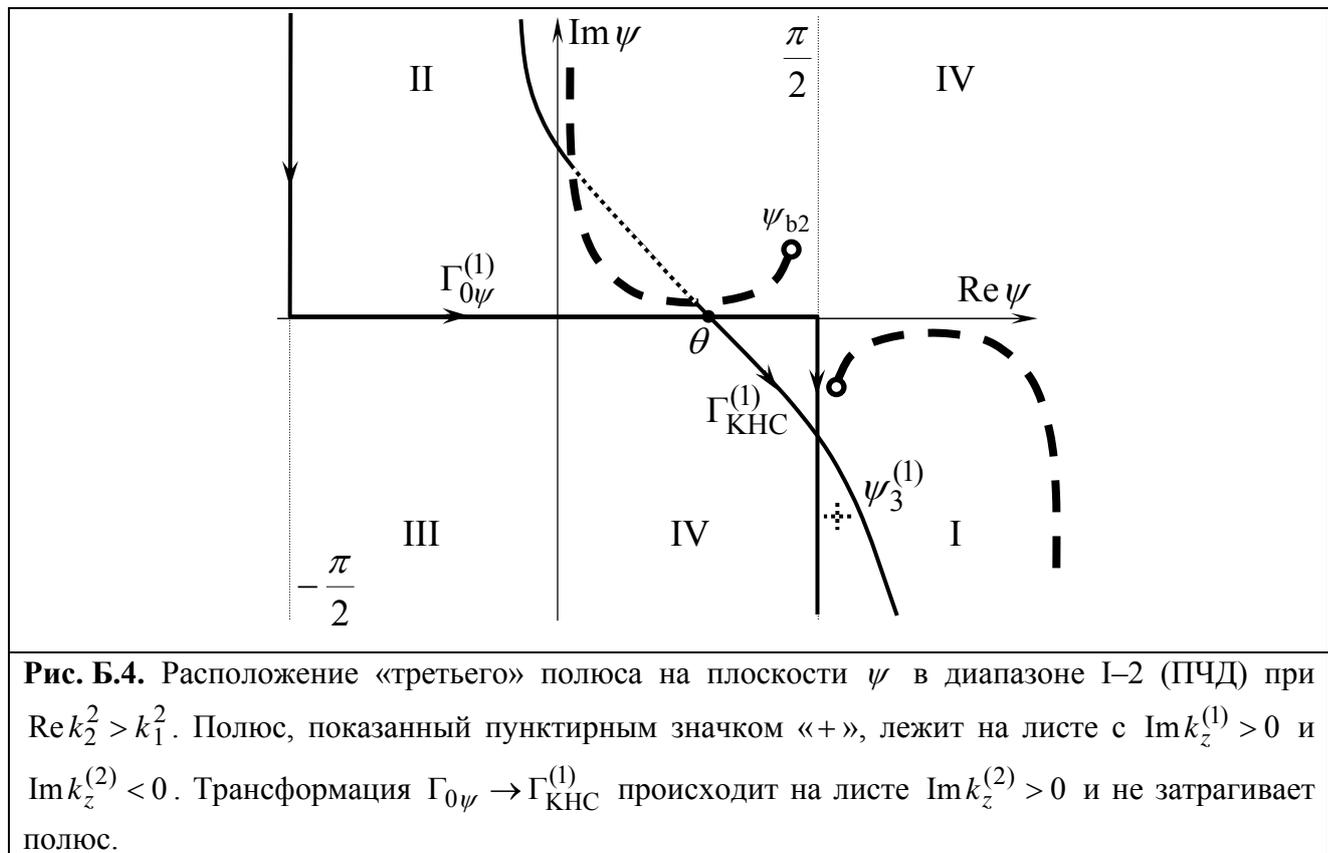
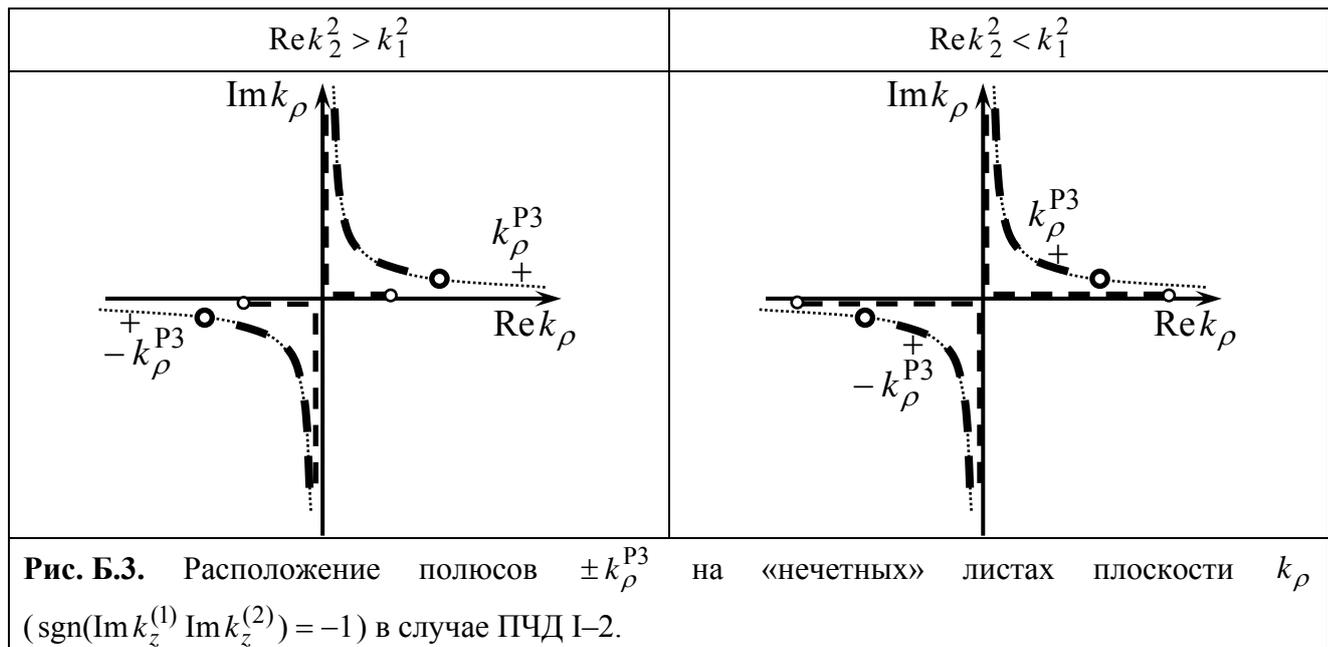
Действительно, гипербола $\text{Im}(k_z^{(2)})^2 = 0$ определяется следующей формулой (см. (2.1.20)):

$$\text{Im} k_\rho^{\text{cut}} (\text{Re} k_\rho^{\text{cut}}) = \frac{\text{Re} k_2^2}{2 \text{Re} k_\rho^{\text{cut}}} \frac{\mu_2''}{\mu_2'}, \quad (\text{Б.10})$$

откуда

$$\text{Im} k_\rho^{\text{cut}} (\text{Re} k_\rho^{\text{P3}}) = \frac{\mu_2''}{\mu_2'} \frac{\text{Re} k_2^2 \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}}{2 \sqrt{\varepsilon_1^2 \text{Re} k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}} = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \text{Im} k_\rho^{\text{P3}} < \text{Im} k_\rho^{\text{P3}}, \quad (\text{Б.11})$$

что и требовалось доказать. Расположение полюса k_ρ^{P3} на плоскости k_ρ показано на рис. Б.3.



Диапазон II–2. Условие $\text{Re}(k_\rho^{\text{P3}})^2 > 0$ приводит к требованию

$$\frac{\varepsilon_1^2 \text{Re}k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} > 0. \quad (\text{Б.12})$$

Имеем

$$k_\rho^{\text{P3}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 \text{Re}k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} + \frac{i}{2} \frac{\mu''_2}{|\mu'_2|} \frac{\varepsilon_1^2 \text{Re}k_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 \text{Re}k_2^2 - k_1^2 \varepsilon_2^2}}. \quad (\text{Б.13})$$

Анализ показывает, что уравнение (Б.1) может быть удовлетворено на «четных» листах (Б.6). Выкладкой, аналогичной (Б.11), можно показать, что k_ρ^{P3} расположен выше гиперболы $\text{Im}(k_z^{(2)})^2 = 0$. В итоге, имеется четыре различных случая, которые отражены на рис. Б.5.

Анализ комплексной плоскости ψ (см. рис. Б.5) показывает, что полюс $\psi_3^{(1)}$ захватывается при любом угле наблюдения при выполнении условия

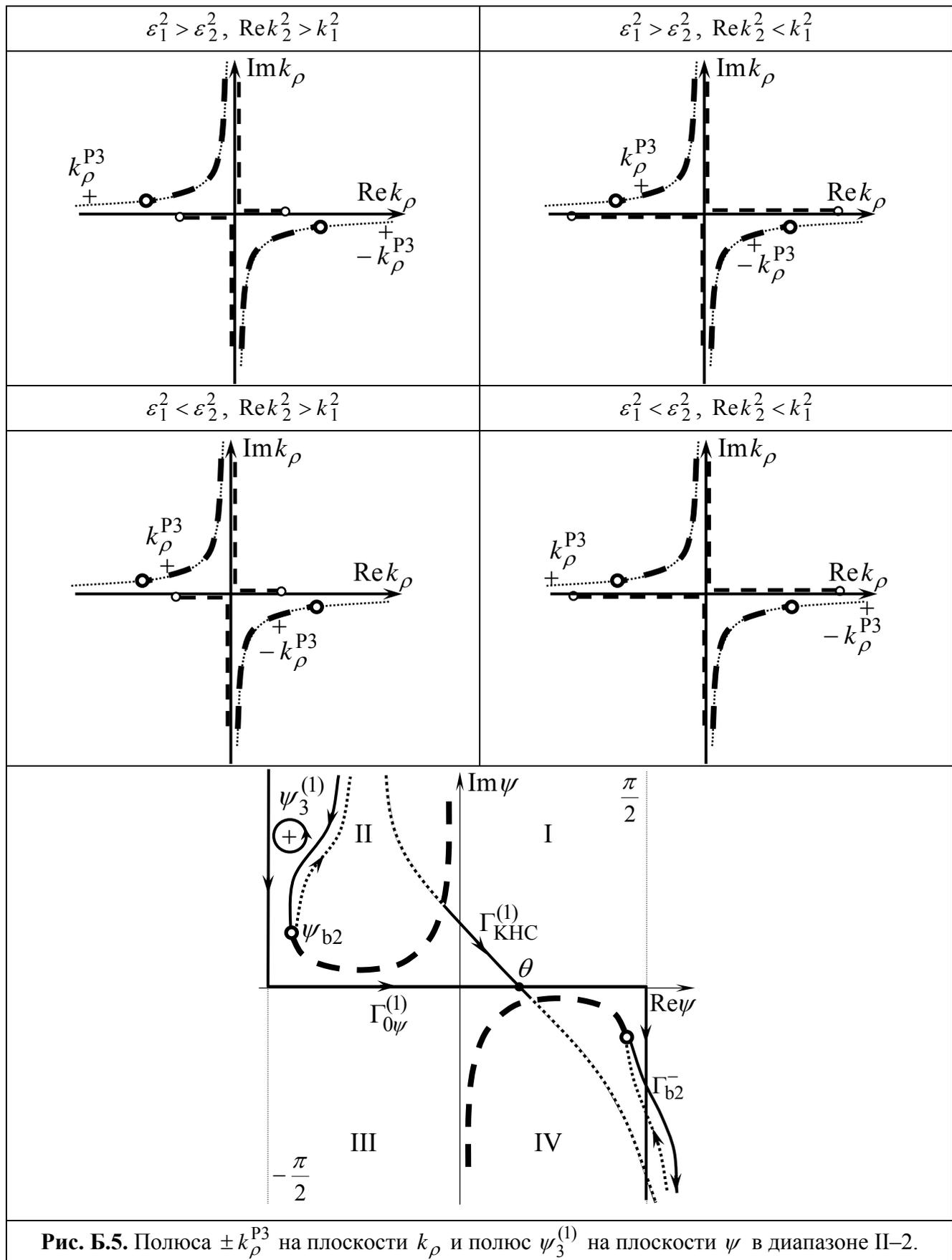
$$(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)(\text{Re}k_2^2 - k_1^2) > 0. \quad (\text{Б.14})$$

При этом его вклад представляет поверхностную волну, бегущую по фазе к оси движения частицы, что является отражением специфики левой среды.

Диапазоны I–3 и II–3. В этих диапазонах всегда выполняется условие $\text{Re}(k_\rho^{\text{P3}})^2 < 0$ и вклад полюса k_ρ^{P3} в любом случае несущественен.

Диапазоны I–4 и II–4. В данных диапазонах расположение полюса k_ρ^{P3} совпадает со случаем $\text{Re}k_2^2 < k_1^2$ диапазона I–2. Как было показано, полюс лежит на «нечетных» листах и не захватывается при трансформации.

Резюмируя результаты данного раздела, следует отметить, что вклад полюса k_ρ^{P3} существует в среде 1 в частотных диапазонах I–1, II–1 и II–2 и представляет собой поверхностную волну. Учитывая, что полюс определяется одним и тем же уравнением (Б.1) в обеих средах, можно заключить, что в левой среде вклад этого полюса существует в тех же диапазонах и также представляет поверхностную волну. Этот вывод оправдывает исключение вклада полюса из асимптотики в разделах 2.1 и 2.2 главы 2, поскольку при асимптотическом исследовании мы ограничились рассмотрением объемных сферических и цилиндрических волн.



Приложение В. О вкладе «третьих» полюсов в асимптотику поля в случае границы раздела между вакуумом и анизотропной плазмоподобной средой

В данном приложении мы покажем, что вклад «третьего» полюса в асимптотику поля представляет собой поверхностную волну. Проводимое здесь рассмотрение в целом аналогично случаю левой среды (см. приложение Б), поэтому для краткости мы опустим анализ тех случаев, когда полюса не захватываются при трансформации исходного контура к КНС.

В случае анизотропной среды (3.1.1) уравнение (3.1.20), определяющее «третьи» полюса, имеет вид

$$g_3(k_\rho^{P3}) = \varepsilon_1 k_z^{(2)}(k_\rho^{P3}) + \varepsilon_\perp k_z^{(1)}(k_\rho^{P3}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

откуда

$$\left(k_\rho^{P3}\right)^2 = \frac{k_1^2 \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_1 - \varepsilon_\perp)}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_\perp} = k_1^2 + \frac{(k_2^2 - k_1^2) \varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_\perp} = k_2^2 + \frac{(k_2^2 - k_1^2) \varepsilon_\perp \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_\perp}. \quad (\text{B.2})$$

Для упрощения дальнейшего анализа положим, что потери присутствуют только в анизотропной среде и притом только в компоненте ε_{\parallel} : $\varepsilon_1'' = \varepsilon_\perp'' = 0$, $\varepsilon_{\parallel}'' > 0$. Определим

$$k_\rho^{P3} = \sqrt{\left(k_\rho^{P3}\right)^2}, \quad \text{Im} k_\rho^{P3} > 0. \quad (\text{B.3})$$

Как и в случае левой среды (см. приложение Б), будем интересоваться только случаями, когда $\text{Re}\left(k_\rho^{P3}\right)^2 > 0$.

Как показывает довольно громоздкий анализ, в случае рассматриваемой анизотропной среды, полюса $\pm k_\rho^{P3}$ могут давать вклад в асимптотику только в диапазонах I–1 и II–1, которые мы и проанализируем более подробно.

В диапазонах I–1 и II–1 имеем $\varepsilon_\perp < 0$, $\varepsilon_{\parallel}' < 0$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_\perp > 0$. Условие $\text{Re}\left(k_\rho^{P3}\right)^2 > 0$ для полюсов $\pm k_\rho^{P3}$ выполняется, как видно из (B.2), только при $\varepsilon_1^2 < \varepsilon_\perp \varepsilon_{\parallel}'$. При этом получаем:

$$\left(k_\rho^{P3}\right)^2 \approx \frac{k_1^2 \varepsilon_{\parallel}' (\varepsilon_1 - \varepsilon_\perp)}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{\parallel}' \varepsilon_\perp} \left(1 + i \frac{\varepsilon_{\parallel}''}{\varepsilon_{\parallel}' \varepsilon_1^2 - \varepsilon_{\parallel}' \varepsilon_\perp} \varepsilon_1^2\right). \quad (\text{B.4})$$

Отметим, что приближенное выражение (B.4) справедливо при условии

$$\omega - \frac{\omega_{p\parallel} \omega_{p\perp}}{\sqrt{\omega_{p\parallel}^2 + \omega_{p\perp}^2}} \gg \frac{\omega_{p\parallel} \omega_{p\perp} \omega_{d\parallel}}{\omega_{p\parallel}^2 + \omega_{p\perp}^2}. \quad (\text{B.5})$$

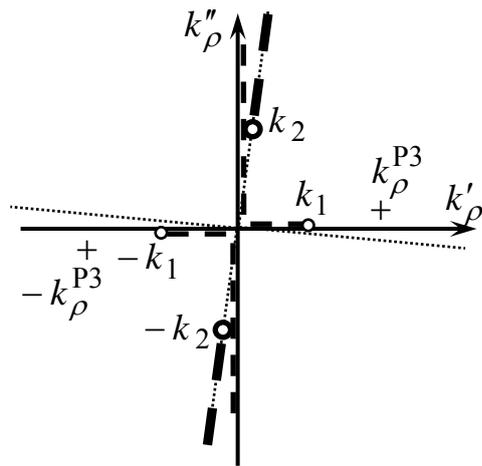


Рис. В.1. Расположение полюсов $\pm k_\rho^{P3}$ на «четных» листах плоскости k_ρ ($\text{sgn}(\text{Im } k_z^{(1)} \text{Im } k_z^{(2)}) = 1$) в диапазонах I-1 и II-1.

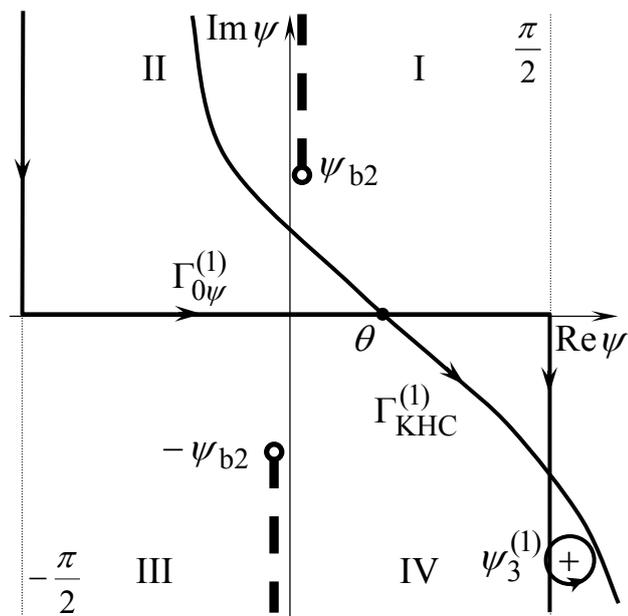


Рис. В.2. «Третий» полюс («+») на плоскости ψ в диапазонах I-1 и II-1.

Как видно из (В.4), $\text{Re}(k_\rho^{P3})^2 > 0$, $\text{Im}(k_\rho^{P3})^2 > 0$, и полюса расположены на «четных» листах комплексной плоскости k_ρ так, как это показано на рис. В.1.

Численный анализ показывает, что при нарушении условия (В.5) полюс существенно смещается в комплексную плоскость с вещественной оси и соответствующая ему волна экспоненциально убывает при удалении как от оси, так и от границы, и не представляет для нас интереса. Таким образом, достаточно исследовать положение полюса в рамках справедливости формулы (В.4)

Из анализа комплексной плоскости ψ (рис. В.2) следует, что полюс захватывается при трансформации $\Gamma_{0\psi} \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}^{(1)}$, а его вклад представляет собой поверхностную волну. При отсутствии потерь условие захвата имеет вид

$$\sin \theta > \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon'_\parallel \varepsilon_\perp}}{\sqrt{\varepsilon'_\parallel (\varepsilon_1 - \varepsilon_\perp)}}, \quad \varepsilon_1^2 < \varepsilon_\perp \varepsilon'_\parallel, \quad (\text{В.6})$$

т. е. поверхностная волна существует в области вблизи границы, что вполне естественно. Поскольку в анизотропной среде полюс определяется тем же уравнением (В.1), то его вклад существует в тех же частотных диапазонах и также представляет поверхностную волну, несущественную для асимптотики.

Список литературы

- [1] Черенков П. А. Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ - радиации // ДАН СССР. 1934. Т. 2. № 8. С. 451.
- [2] Вавилов С. И. О возможных причинах синего γ - свечения жидкостей // ДАН СССР. 1934. Т. 2. № 8. С. 457.
- [3] Čerenkov P. A. Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light // Phys. Rev. 1937. V. 52. P. 378.
- [4] Тамм И. Е., Франк И. М. Когерентное излучение быстрого электрона в среде // ДАН. 1937. Т.14. № 3. С. 107.
- [5] Tamm I. G. Radiation emitted by uniformly moving electrons // J. Phys. USSR. 1939. V. 1. No. 5 – 6. P. 439 – 454.
- [6] Гинзбург В. Л. Излучение электрона, движущегося с постоянной скоростью в кристалле // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 608 – 613.
- [7] Гинзбург В. Л. Квантовая теория сверхсветового излучения электрона, равномерно движущегося в среде // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 589 – 595.
- [8] Fermi E. The Ionization Loss of Energy in Gases and in Condensed Materials // Phys. Rev. 1940. V. 57. P. 485 – 493.
- [9] Halpern O., Hall H. Energy Losses of Fast Mesotrons and Electrons in Condensed Materials // Phys. Rev. 1940. V. 57. P. 459 – 460.
- [10] Halpern O., Hall H. The Ionization Loss of Energy of Fast Charged Particles in Gases and Condensed Bodies // Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 477 – 486.
- [11] Sternheimer R. M. The Energy Loss of a Fast Charged Particle by Čerenkov Radiation // Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 1148.
- [12] Sternheimer R. M. The Energy Loss of a Fast Charged Particle by Čerenkov Radiation // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 256 – 265.
- [13] Ситенко А. Г. Эффект Черенкова в ферродиелектрике // ЖТФ. 1953. Т. 23. С. 2200.
- [14] Иваненко Д. Д., Цытович В. Н. К теории потерь энергии заряженных частиц при прохождении ферромагнетика // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. №. 3. С. 291 – 296.
- [15] Коломенский А. А. Излучение Черенкова и поляризационные потери в одноосном кристалле // ДАН. 1952. Т. 86. С. 1097.
- [16] Коломенский А. А. Эффект Черенкова в гиротропной среде // ЖЭТФ. 1953. Т. 24. С. 167.
- [17] Каганов М. И. Движение заряженной частицы в анизотропном диэлектрике с осевой симметрией // ЖТФ. 1953. Т. 23. С. 507.
- [18] Ситенко А. Г., Каганов М. И., О потерях энергии на черенковское излучение в кристалле // ДАН. 1955. Т. 100. С. 681.
- [19] Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова–Черенкова // УФН. 1957. Т. 62. № 3. С. 201 – 246.
- [20] Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова–Черенкова (III) // УФН. 1961. Т. 75. № 2. С. 295 – 350.

- [21] Джелли Дж. Черенковское излучение и его применения. М.: Изд. Иностран. лит., 1960. 335 с.
- [22] Зрелов В. П. Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1, 2. М.: Атомиздат, 1968.
- [23] Франк И. М. Излучение Вавилова–Черенкова: вопросы теории. М.: Наука, 1988. 288 с.
- [24] Afanasiev G. N., Kartavenko V. G. Radiation of a point charge uniformly moving in a dielectric medium. // *J. Phys. D.* 1998. V. 31. P. 2760 – 2776.
- [25] Xiao L., Gai W., Sun X. Field analysis of a dielectric-loaded rectangular waveguide accelerating structure // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 65. P. 016505.
- [26] Альтмарк А. М., Канарейкин А. Д., Шейнман И. Л. Управляемая ускорительная кильватерная структура с диэлектрическим заполнением // *ЖТФ.* 2005. Т. 75. № 1. С. 89 – 97.
- [27] Jing C., Kanareykin A., Power J. G., Conde M., Yusof Z., Schoessow P., Gai W. Observation of enhanced transformer ratio in collinear wakefield acceleration // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 144801.
- [28] Альтмарк А. М., Канарейкин А. Д. Использование многослойного диэлектрического заполнения для уменьшения потерь мощности в ускорительных структурах // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34. № 4. С. 81 – 87.
- [29] Kanareykin A. D., Tyukhtin A. V. Analysis of multimode wakefield generation in accelerating structures with conductive dielectric loading // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A.* 2006. V. 558. No.1. P. 62 – 65.
- [30] Schächter L. Hybrid Cerenkov mode in a resonant medium // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62. No. 1. P. 1252 – 1257.
- [31] Tyukhtin A., Kanareykin A., Schoessow P. Wakefields generated by electron beams passing through a waveguide loaded with a slightly dispersive active medium // *Physical Review STAB.* 2007. V.10. P. 051302.
- [32] Иванов Н. В., Тюхтин А. В. Об усилении излучения пучка заряженных частиц, движущихся в волноводе со слоем активной среды // *Письма в ЖТФ.* 2006. Т. 32. № 10. С. 68 – 75.
- [33] Тюхтин А. В. О применении анизотропных диспергирующих материалов для высокоточного определения энергии заряженных частиц // *Письма в ЖТФ.* 2009. Т. 35. № 6. С. 31 – 38.
- [34] Tyukhtin A. V., Doil'nitsina E. G., Kanareykin A. Particle energy determination technique based on waveguide mode frequency measurement // *Proceedings of IPAC10. Kyoto, Japan, 2010.* P. 1071 – 1073.
- [35] Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W.J., Youngs I. Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 4773.
- [36] Pendry J. B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. No. 18. P. 3966 – 3969.
- [37] Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J., Stewart W. J. Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques.* 1999. V. 47. No. 11. P. 2075 – 2084.
- [38] Shelby R. A., Smith D. R., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Microwave transmission through

- a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial // *Applied Phys. Lett.* 2000. V. 78. No. 4. P. 489 – 491.
- [39] Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84, No. 18. P. 4184.
- [40] Shelby R. A., Smith D. R., Schultz S. Experimental Verification of a Negative Index of Refraction // *Science*. 2001. V. 292. P. 77 – 79.
- [41] Smith D. R., Kroll N. Negative Refractive Index in Left-Handed Materials // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 2933.
- [42] Soukoulis C. M., Zhou J., Koschny T., Kafesaki M., Economou E. N. The science of negative index materials // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2008. V. 20. P. 304217.
- [43] Веселаго В. Г. О свойствах веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической (ϵ) и магнитной (μ) восприимчивостей // *ФТТ*. 1966. Т. 8. № 12. С. 3571.
- [44] Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // *УФН*. 1967. Т. 92. № 3. С. 517 – 526.
- [45] Веселаго В. Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // *УФН*. 2003. Т. 173. № 3. С. 790 – 794.
- [46] Мандельштам Л. И. Групповая скорость в кристаллической решетке // *ЖЭТФ*. 1945. Т. 15. № 9. С. 475 – 478.
- [47] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
- [48] Агранович В. М., Гартштейн Ю. Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // *УФН*. 2006. Т. 176. № 10. С. 1051 – 1068.
- [49] Veselago V., Braginsky L., Shklover V., and Hafner C. Negative Refractive Index Materials // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2006. V. 3. P. 1 – 30.
- [50] Moroz A. <http://www.wave-scattering.com/negative.html>.
- [51] Lu J., Grzegorzczak T. M., Zhang Y., Jr J. P., Wu B.-I., Kong J. A., Chen M. Cerenkov radiation in materials with negative permittivity and permeability // *Opt. Express*. 2003. V. 11. No. 7. P. 723 – 734.
- [52] Duan Z. Y., Wu B.-I., Xi S., Chen H. S., Chen M. Research Progress in Reversed Cherenkov Radiation in Double-Negative Metamaterials // *Progress In Electromagnetics Research, PIER*. 2009. V. 90. P. 75 – 87.
- [53] Xi S., Chen H., Jiang T., Ran L., Huangfu J., Wu B.-I., Kong J. A., Chen. M. Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 194801.
- [54] Bakunov M. I., Mikhaylovskiy R. V., Bodrov S. B., and Luk'yanchuk B. S. Reversed Cherenkov emission of terahertz waves from an ultrashort laser pulse in a sandwich structure with nonlinear core and left-handed cladding // *Opt. Express*. 2010. V. 18. No. 2. P. 1684 – 1694.
- [55] Пафомов В. Е. К вопросу о переходном излучении и излучении Вавилова–Черенкова // *ЖЭТФ*. 1959. Т. 36. № 6. С. 1853 – 1858.
- [56] Пафомов В. Е. К теории излучения Вавилова–Черенкова в анизотропных средах и при наличии границ // *Труды ФИАН*. 1961. Т. 16. С. 94 – 139.

- [57] Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 1. С. 15.
- [58] Басс Ф. Г., Яковенко В. М. Теория излучения заряда, проходящего через электрически неоднородную среду // УФН. 1965. Т. 86. № 2. С. 189 – 230.
- [59] Гарибян Г. М. К теории переходного излучения // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 6(12). С. 1403 – 1410.
- [60] Канер Е. А., Яковенко В. М. К теории переходного излучения // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. № 2. С. 471 – 478.
- [61] Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
- [62] Аверков Ю. О. Переходное излучение электронного сгустка, пересекающего границу раздела вакуум – левая среда // Радиофизика и электроника (Харьков). 2005. Т. 10. № 2. С. 248 – 255.
- [63] Галямин С. Н. Некоторые задачи теории излучения Вавилова–Черенкова в активных и пассивных средах с резонансной дисперсией // X Всероссийская научная конференция студентов-радиофизиков. СПб, 2006. С. 15 – 17.
- [64] Тюхтин А. В., Галямин С. Н., Иванов Н. В. Излучение Вавилова–Черенкова в пассивных и активных средах с двумя резонансными частотами // Региональная XI конференция по распространению радиоволн. СПб, 2005. С. 98 – 100.
- [65] Галямин С. Н., Тюхтин А. В., Доильница Э. Г. Излучение заряда, влетающего из вакуума в левую среду // Региональная XIV конференция по распространению радиоволн. СПб, 2008. С. 63.
- [66] Галямин С. Н., Тюхтин А. В. Об электромагнитном поле заряда, влетающего из вакуума в анизотропную среду // Региональная XVI конференция по распространению радиоволн. СПб, 2010. С. 137 – 140.
- [67] Tyukhtin A. V., Galyamin S. N., Alekhina T. Yu., Doil'nitsina E. G. Radiation of a charge crossing a left-handed medium boundary and prospects for its application to beam diagnostics // Proceedings of PAC09. Vancouver, Canada, 2009. P. 4030 – 4032.
- [68] Tyukhtin A. V., Galyamin S. N., Belonogaya E. S. Reversed Cherenkov-transition Radiation and Prospect of its Application to Beam Diagnostics // Proceedings of IPAC10. Kyoto, Japan, 2010. P. 1068 – 1070.
- [69] Galyamin S. N., Alekhina T. Yu., Doil'nitsina E. G., Tyukhtin A. V. Radiation of a charge passing from vacuum into the left-handed medium // Proceedings of Days on Diffraction – 2009. Saint Petersburg, 2009. P. 69 – 75.
- [70] Galyamin S. N., Tyukhtin A. V. New approach to the theory of a moving charge's radiation in dispersive medium and its application to the case of left-handed materials // J. Phys.: Conf. Ser. 2010. V. 236. P. 012003(1–8).
- [71] Галямин С. Н., Тюхтин А. В. Взаимодействие точечных зарядов, движущихся в резонансно диспергирующем диэлектрике // Вестник СПбГУ, 2006. Сер. 4. В. 1. С. 21 – 30.
- [72] Tyukhtin A. V., Galyamin S. N. Vavilov-Cherenkov Radiation in Passive and Active Media with Complex Resonant Dispersion // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. P. 066606(1–8).
- [73] Galyamin S. N., Tyukhtin A. V., Kanareykin A., Schoessow P. Reversed Cherenkov-

- Transition Radiation by a Charge Crossing a Left-Handed Medium Boundary // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 194802(1–4).
- [74] Galyamin S. N., Tyukhtin A. V. Electromagnetic field of a moving charge in the presence of a left-handed medium // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 81. P. 235134(1–14).
- [75] Галямин С.Н., Тюхтин А.В. Обратное черенковско-переходное излучение заряда, влетающего в анизотропную среду // *Письма в ЖТФ.* 2011. Т. 37. № 7. С. 54 – 63. Принято к печати.
- [76] Тюхтин А. В. Электромагнитное излучение заряженной частицы, движущейся в изотропной среде. Учебное пособие. СПб.: Изд. СПбГУ, 2004. 48 с.
- [77] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. С. 65 – 70.
- [78] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндо М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1970. Т. 7. С. 48 – 58.
- [79] Болотовский Б. М., Столяров С. Н. О принципах излучения в среде с дисперсией // *Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И. Е. Тамма.* М.: Наука, 1972. С. 267 – 280.
- [80] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. С. 183.
- [81] Сидорович А. М. Программа для расчета и моделирования спектральных свойств вещества в широком диапазоне частот. <http://spectra.at.tut.by>
- [82] Pimenov A., Loidl A., Gehrke K., Moshnyaga V., Samwer K. Negative Refraction Observed in a Metallic Ferromagnet in the Gigahertz Frequency Range // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 197401.
- [83] Maslovski S. I., Tretyakov S. A., Belov P. A. Wire Media with Negative Effective Permittivity: a Quasi-Static Model // *Microwave and Optical Technology Letters.* 2002. V. 35. No. 1. P. 47 – 51.
- [84] Belov P. A., Tretyakov S. A., Viitanen A. J. Dispersion and Reflection Properties of Artificial Media Formed by Regular Lattices of Ideally Conducting Wires // *J. Electromagn. Waves and Appl.* 2002. V. 16. No. 8. P. 1153 – 1170.
- [85] Sarychev A. K., Shalaev V. M. Comment on paper “Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures” [J. B. Pendry, et al., *Phys. Rev. Lett.* 76, 4773 (1996)] // *cond-mat/0103145v1.*
- [86] Sarychev A. K., McPhedran R. C., Shalaev V. M. Electrodynamics of metal-dielectric composites and electromagnetic crystals // *Phys. Rev. B.* V. 62. No. 12. P. 8531 – 8539.
- [87] Belov P. A., Marques R., Maslovski S. I., Nefedov I. S., Silverina M., Simovski C. R., Tretyakov S. A. Strong spatial dispersion in wire media in the very large wavelength limit // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 67. P. 113103.
- [88] Demetriadou A., Pendry J. B. Taming spatial dispersion in wire metamaterial // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2008. V. 20. P. 295222.
- [89] Fang A., Koschny T., Soukoulis C. Optical anisotropic metamaterials: Negative refraction and focusing // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 79. P. 245127.
- [90] Silveirinha M. Broadband negative refraction with a crossed wire mesh // *Phys. Rev. B.*

2009. V. 79. P. 153109.

[91] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.

[92] Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1977.

[93] Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991. 196 с.

[94] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям, М.: Наука, 1979. 832 с.

[95] Markoř P., Rousochatzakis I., Soukoulis C. M. Transmission losses in left-handed materials // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 045601(R).

[96] Wang J.-F., Qu S.-B., Xu Z., Zhang J.-Q., Ma H., Yang Y.-M., Gu C. A Method of Analyzing Transmission Losses in Left-Handed Metamaterials // Chin. Phys. Lett. 2009. V. 26. No. 8. P. 084103.