УДК 519.6 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2017. Т. 13. Вып. 2

В. М. Буре, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова, И. В. Ягольник

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАКАЗА ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО СПРОСА С НАСЫЩЕНИЕМ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В работе описывается модель поведения торговой фирмы, когда предполагаемый спрос на товар носит кусочно-линейный характер, характеризуемый некоторым заранее определенным уровнем насыщения. В результате проведения специальных маркетинговых исследований определена функция спроса. Предполагается, что используется следующая схема продажи товара. Заказанный товар делится на две части. Первая партия поступает сразу и продается в течение некоторого периода времени, в момент времени T_1 вся первая партия полностью поступает потребителям. После этого продается вторая партия товара, но ее поставка покупателям происходит в момент времени T. Необходимость рассмотрения такой схемы продажи связана с тем, что, во-первых, склады торговой фирмы имеют ограниченный объем и не могут вместить весь заказанный объем товара, во-вторых, производитель не может предложить сразу всю партию, так как не весь товар может быть произведен в начальный (нулевой) момент времени, когда осуществляется заказ. Важной особенностью предлагаемой задачи является выбор параметров, по которым впоследствии проводится оптимизация. Для торговой фирмы первостепенное значение имеют моменты времени T_1 и T. В момент времени T_1 торговая фирма полностью продаст первую партию товара и получит средства, часть которых она выплатит фирме-производителю, что позволит последней продолжить свою деятельность. Этот момент времени имеет основное значение для торговой фирмы, поскольку позволит ей выполнить различные финансовые обязательства, связанные с выплатой кредитов и других расходов. Момент времени T также играет исключительно важную роль для торговой фирмы, так как будет означать успешное завершение полной реализации всего закупленного товара. Выбор моментов времени T_1 и T дает возможность определить объем первой партии заказанного товара q_0 и общий объем всего заказанного у производителя товара Q. В работе осуществляется выбор оптимальной стратегии заказа торговой фирмы. Библиогр. 16 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: уровень запаса и дефицит товара, кусочно-линейный спрос, скидка.

V. M. Bure, V. V. Karelin, L. N. Polyakova, I. V. Yagolnik

MODELING OF THE ORDERING PROCESS FOR PIECEWISE-LINEAR DEMAND WITH SATURATION

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

Буре Владимир Мансурович — доктор технических наук, профессор; vlb310154@gmail.com

Карелин Владимир Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; vlb310154@gmail.com

Полякова Людмила Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор; lnpol07@mail.ru

Ягольник Ирина Васильевна — студент; yagolnik@mail.ru

Bure Vladimir Mansurovich — doctor of technical sciences, professor; vlb310154@gmail.com

Karelin Vladimir Vitalievich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; vlkarelin@mail.ru

Polyakova Ludmila Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor; lnpol07@mail.ru

Yagolnik Irina Vasilevna — student; irisha.yagolnik@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.38.205.2014).

 DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.202

This article discusses the behavior of trading companies when the demand function for a product is a piecewise linear function with some pre-defined level of saturation. As a result of special marketing research the demand function is determined. It is assumed that the following scheme is used. The ordered product is divided into two parts. The first batch will arrive immediately and will be sold within a certain period of time up to T_1. The second batch of goods will be delivered only at time T and this batch will be sold with reduction in price as follows from deficit of the goods. The consideration of a such a scheme for the sale stems from the fact that, first, commercial enterprises have limited capacity and can not accommodate the entire volume of products ordered, and secondly, the manufacturer may not offer the entire ordered quantity at the initial time. An important feature of this problem is selection of parameters which are subsequently optimized. For trading firms the moment time T_1 has very high importance because trading companies have sold the first batch and received money. After this moment the trading firms will pay to the manufacturers, and manufacturers can to continue the activities. The time moment T_1 is important for trading firms, as it will allow them to fulfill various financial obligations associated with the payment of loans and other expenses. Time T is also important, so this will mean the successful completion in full of selling all these goods. Refs 16. Fig. 1.

Keywords: the level of product inventory, piecewise linear demand, the goods deficit, reduction.

Введение. В работе формулируется и изучается модель поведения торговой фирмы, осуществляющей продажу некоторого заказанного у производителя объема товара, когда предполагаемый спрос на товар носит кусочно-линейный характер, характеризуемый некоторым заранее определенным уровнем насыщения. В результате проведения специальных маркетинговых исследований была точно определена функция спроса на реализуемый товар, закупленный у конкретного производителя с учетом популярности товара у покупателей. Торговая фирма делает заказ производителю товара и реализует его через магазины, расположенные на некоторой территории. При этом предполагается, что используется следующая схема продажи товара. Вся заказанная партия товара делится на две части, причем первая партия поступает сразу и продается в течение некоторого периода времени, будем считать, что в момент времени T_1 она вся полностью реализована потребителям. Через некоторый промежуток времени длины $T - T_1$ поступает вторая партия товара, причем в течение указанного промежутка она также реализуется, но поставка товара покупателям происходит в момент времени T. Необходимость рассмотрения такой схемы продажи обусловлена разнообразными причинами и часто встречается на практике. Так, во-первых, склады торговой фирмы имеют ограниченный объем и не могут вместить весь заказанный товар у производителя сразу, во-вторых, производитель, как часто бывает, не может предложить целиком всю заказанную партию, так как не весь товар может быть произведен в начальный (нулевой) момент времени, когда осуществляется заказ. Более того, для производства части заказанного товара могут потребоваться средства, которые поступят производителю от торговой фирмы после реализации этой части товара.

Особенностью рассматриваемой задачи является выбор параметров, по которым впоследствии производится оптимизация. Для торговой фирмы важное значение имеют моменты времени T_1 и T. В момент времени T_1 торговая фирма полностью продаст первую партию товара и получит средства, часть которых она выплатит фирме-производителю, которая сможет продолжить свою деятельность. Этот момент времени важен для торговой фирмы, поскольку позволит ей выполнить различные финансовые обязательства, связанные с выплатой кредитов и других расходов. Момент времени T также играет исключительно значительную роль торговой фирмы, так как будет означать успешное завершение полной реализации всего закупленного товара.

Будем предполагать, что в результате проведенных маркетинговых исследований удалось точно определить функцию спроса на товар, это означает, что выбор моментов времени T_1 и T дает возможность в принципе вычислить объем первой партии заказанного товара q_0 и общий объем всего заказанного у производителя товара Q. Разумеется, все рассчитанные величины представляют собой некоторые оценки, причем их точность в значительной степени зависит от качества проведенного маркетингового исследования, но выбор коммерческих решений может осуществляться только на основе сделанных оценок и безусловно содержит элементы коммерческого риска. Именно поэтому для торговой фирмы, доходы которой полностью зависят от качества коммерческих решений, решающим является выбор ключевых моментов времени T_1 и T. Далее в работе выбирается оптимальная стратегия заказа торговой фирмы.

Близкие по постановке задачи рассматривались ранее в работах [1–13].

Приведем список основных обозначений: c — закупочная цена единицы товара у производителя; p $(p > c)$ — цена единицы товара для покупателя в магазине торговой фирмы; s — скидка, предоставляемая покупателю при покупке единицы товара, при дефиците товара (товар поставляется покупателю позже); T_1 — момент времени, когда первая партия товара реализована; T — момент времени, когда реализована вся заказанная партия товара; Q — общий объем всего заказанного у производителя товара; $I(t)$ — текущий уровень запаса товара (дефицита товара); $D(t)$ — мгновенный спрос на товар; V — потери, связанные с дефицитом товара в торговой фирме; $TP(T_1, T)$ — усредненный доход торговой фирмы.

Основные результаты. Предположим, что величина $D(t)$ линейно возрастает до момента насыщения t_n:

$$D(t) = \begin{cases} a + bt, & t < t_n, \\ a + bt_n, & t \geqslant t_n, \end{cases}$$

где a и b — неотрицательные константы. Возможны следующие варианты выбора моментов времени T и T_1:

1) $t_n > T$;

2) $T > t_n \geqslant T_1$;

3) $T > T_1 \geqslant t_n$.

Первый вариант рассматривался в работе [1], в которой исследовался линейный рост без насыщения, что, конечно, представляется не вполне адекватным с экономической точки зрения. Подробно изучен линейный спрос с насыщением для второго варианта, поскольку из общих соображений ясно, что этот вариант лучше описывает экономическую реальность, чем третий вариант.

Из сформулированной выше модели следует, что, если $T > t_n \geqslant T_1$, то текущий уровень запаса $I(t)$ для $t \in [0, T_1]$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(t) = -(a + bt), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1,$$

с граничным условием $I(T_1) = 0$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int\limits_t^{T_1} dI(t) = -\int\limits_t^{T_1} D(t)dt = -\int\limits_t^{T_1} (a + bt)dt$$

и, следовательно, текущий уровень запаса $I(t)$ при $t \in [0, T_1]$ равен

$$I(t) = a(T_1 - t) + \frac{b}{2}(T_1^2 - t^2), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1.$$

Следуя [1], определим текущий уровень дефицита (недопоставок) при $T_1 \leqslant t \leqslant t_n$:

$$I(t) = a(T_1 - t) + \frac{b}{2}(T_1^2 - t^2), \quad T_1 \leqslant t \leqslant t_n.$$

На промежутке $[t_n, T]$ спрос достиг уровня насыщения, поэтому уровень дефицита (недопоставок) определяется выражением

$$I(t) = I(t_n) - (a + bt_n)(t - t_n), \quad t_n \leqslant t \leqslant T.$$

Поведение системы инвентаризации в любой момент времени $t \in [0, T]$ показано на рисунке.

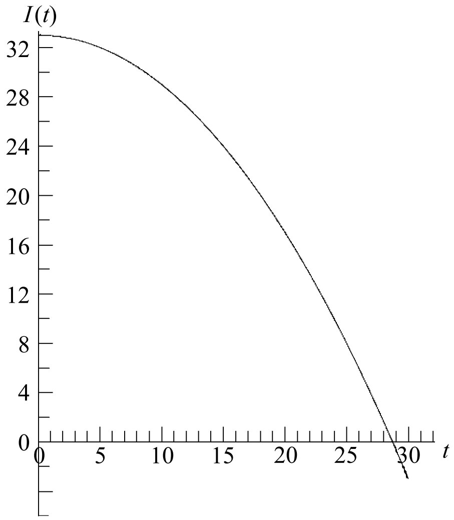

График функции $I(t)$

Таким образом, объем первой партии товара (поставленного в начальный момент времени) равен

$$q_0 = I(0) = aT_1 + \frac{b}{2}T_1^2,$$

максимальный уровень дефицита (недопоставок) —

$$B = -I(T) = a(T - T_1) - \frac{b}{2}(t_n^2 + T_1^2) + bt_nT.$$

Отсюда получаем, что общий объем заказа определяется следующим выражением:

$$Q = q_0 + B = aT + \frac{b}{2}t_n(2T - t_n),$$

потери, связанные с дефицитом (недопоставкой) продукции, — по формуле [1]

$$V = -s\int_{T_1}^{T} I(t)dt.$$

В рассматриваемом варианте

$$V=-s\left[\int\limits_{T_1}^{t_n}I(t)dt+\int\limits_{t_n}^{T}I(t)dt\right],$$

при этом

$$\int\limits_{T_1}^{t_n}I(t)dt=-\frac{(T_1-t_n)^2}{6}[3a+b(t_n+2T_1)]$$

и

$$\int\limits_{t_n}^{T}I(t)dt=I(t_n)(T-t_n)-(a+bt_n)\frac{(T_1-t_n)^2}{2}.$$

Таким образом,

$$V=-s\left[-\frac{(T_1-t_n)^2}{6}[3a+b(t_n+2T_1)]+I(t_n)(T-t_n)-(a+bt_n)\frac{(T_1-t_n)^2}{2}\right]=$$

$$=-s\left[-\frac{(T_1-t_n)^2}{3}(2a+b(t_n+T_1))+I(t_n)(T-t_n)\right]=$$

$$=-s\left[-\frac{(T_1-t_n)^2}{3}(2a+b(t_n+T_1))+[a(T_1-t_n)+\frac{b}{2}(T_1^2-t_n^2)](T-t_n)\right].$$

Окончательно получаем

$$V=\frac{s}{3}\left[bT_1^3+\left(2a+\frac{1}{2}bt_n\right)T_1^2-\frac{3}{2}bT_1^2T-(at_n+bt_n^2)T_1-\right.$$

$$\left.-3aT_1T+3\left(at_n+\frac{b}{2}t_n^2\right)T-at_n^2-\frac{1}{2}bt_n^3\right].$$

Общая прибыль продавца $TP(T_1,T)$ равна

$$TP(T_1,T)=\frac{1}{T}(p-c)Q-V=$$

$$=\frac{1}{T}\left\{\frac{sb}{3}T_1^3+s\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}bt_n\right)T_1^2-\frac{sb}{2}T_1^2T-s\frac{1}{3}(at_n+bt_n^2)T_1-\right.$$

$$\left.-saT_1T+\left\{(p-c)(a+bt_n)+s\left(at_n+\frac{b}{2}t_n^2\right)\right\}T-(p-c)\frac{b}{2}t_n^2-\frac{s}{3}\left(at_n^2+\frac{1}{2}bt_n^3\right)\right\}.$$

Математическая оптимизационная модель. Будем решать задачу поиска максимального значения функции $f(T_1,T)$ по аргументам T_1,T на множестве, задаваемом неравенствами $T_1\leqslant t_n<T$.

Определим функции

$$f(T_1,T)=-TP(T_1,T),\quad h_1(T_1)=T_1-t_n,\quad h_2(T)=t_n-T,\quad h_0(T_1,T)=0.$$

Для удобства изложения дальнейшего материала обозначим через x двумерный вектор $x=(x_1,x_2)\in\mathrm{Re}^2$, где $x_1=T_1,x_2=T$. Тогда

$$f(x)=-TP(T_1,T),\quad h_1(x)=T_1-t_n,\quad h_2(x)=t_n-T,\quad h_0(x)=0,$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial h_0}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = -1.$$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$

в которой

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Re}^2 \mid \; h_i(x) \leqslant 0, \; i = 1, 2\}.$$

Множество X можно представить в следующем виде:

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Re}^2 \mid \varphi(x) = 0\}, \tag{1}$$

где

$$\varphi(x) = \max_{i \in I} h_i(x), \quad I = \{0, 1, 2\}.$$

Нетрудно заметить, что $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in X$.

Для решения задачи условной оптимизации будем применять методы, используемые в теории негладкой оптимизации [14–16]. Из свойств функции максимума известно, что $\varphi(x)$ дифференцируема по любому направлению $g \in \mathrm{Re}^2$, причем

$$\varphi'(x, g) = \max_{v \in \partial\varphi(x)} \langle v, g \rangle,$$

$$\partial\varphi(x) = \mathrm{co}\{h_i'(x) | i \in R(x)\}, \quad R(x) = \{i \in I | h_i(x) = \varphi(x)\}.$$

Здесь через $\langle *, * \rangle$ обозначено скалярное произведение, через $\partial\varphi(x)$ — субдифференциал функции максимума в точке x, через $\mathrm{co}\{A\}$ — выпуклая оболочка множества A; $R(x)$ является множеством индексов активных ограничений в точке x. Если $x \notin X$ (т. е. если $\varphi(x) > 0$), то $0 \notin R(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Введем множество

$$X_\epsilon = \{x \in \mathrm{Re}^2 \mid \varphi(x) \leqslant \epsilon\}. \tag{2}$$

В дальнейшем предположим следующее: найдутся такие числа $\epsilon > 0$ и $a > 0$, что

$$\min_{v \in \partial\varphi(x)} \|v(x)\| \geqslant a \quad \forall x \in X_\epsilon \backslash X.$$

Положим

$$\varphi^{\downarrow}(x) = \liminf_{\alpha \downarrow 0, g' \to g} \frac{\varphi(x + \alpha g') - \varphi(x)}{\alpha}.$$

В этом случае можно показать, что

$$\varphi^{\downarrow}(x) \leqslant -a \quad \forall x \in X_\epsilon \backslash X.$$

Рассмотрим функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\varphi(x), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Следуя работам [14, 15], можно доказать теорему.

Теорема. *Пусть*

$$\min_{x \in \Omega} f(x) > -\infty$$

и $\exists \lambda_0 < \infty$ *такое, что для* $\forall \lambda \geqslant \lambda_0$ *найдется* $x_\lambda \in \Omega$, *для которого*

$$F_\lambda(x_\lambda) = \min_{x \in \Omega} F_\lambda(x).$$

Тогда $\exists \lambda^* \geqslant \lambda_0$ *такие, что при* $\forall \lambda \geqslant \lambda^*$

$$\varphi(x_\lambda) = 0, \quad f(x_\lambda) = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

Из теоремы следует, что, если $x^* \in X$ — точка минимума функции f на X, то эта точка является и точкой минимума функции $F_\lambda(x)$ на Re^2.

З а м е ч а н и е 1. Функция $F_\lambda(x)$ субдифференцируема при $\lambda \geqslant 0$, причем

$$\partial F_\lambda(x) = f'(x) + \lambda \partial \varphi(x),$$

где $f'(x)$ — градиент функции f в точке x

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) = \left(-\frac{\partial TP(T_1, T)}{\partial T_1}, -\frac{\partial TP(T_1, T)}{\partial T} \right).$$

Имеем

$$-\frac{\partial TP(T_1, T)}{\partial T_1} = \frac{s}{3T} \Big(-3bT_1^2 - 4aT_1 bt_n T_1 + 3bT_1 T + at_n + bt_n^2 + 3aT \Big),$$

$$-\frac{\partial TP(T_1, T)}{\partial T} = \frac{1}{6T^2} \Big(2sbT_1^3 + 4saT_1^2 + sbt_n T_1^2 - 2sat_n T_1 - 2sbt_n^2 T_1 +$$

$$+ 6pa + 6pbt_n - 6ca - 6cbt_n - 3bpt_n^2 + 3bct_n^2 - 2sat_n^2 - sbt_n^3 \Big).$$

По необходимому условию минимума

$$0_2 \in \partial F_\lambda(x).$$

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим функцию

$$\partial |h_i(x)| = \begin{cases} \{h_i^{'}(x)\}, & h_i(x) > 0, \\ \{-h_i^{'}(x)\}, & h_i(x) < 0, \\ co\{h_i^{'}(x), -h_i^{'}(x)\}, & h_i(x) = 0. \end{cases}$$

Тогда, если $\varphi(x) > 0$, то $\partial \varphi(x) = \mathrm{co}\{h_i'(x) \text{ sign } h_i'(x) |\ i \in R(x)\}$. Учитывая (1) и (2), можно найти коэффициенты α_i такие, что

$$\alpha_i \geqslant 0, \sum_{i \in R(x^*)} \alpha_i = 0, \quad 0_n = f^{'}(x^*) + \lambda \sum_{i \in R(x^*)} \alpha_i h_i^{'}(x^*).$$

Таким образом, точка x^* является стационарной точкой гладкой функции

$$L(x, \mathscr{L}^*) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i^* h_i(x),$$

где множители Лагранжа λ_i^* имеют вид

$$\lambda_i^* = \begin{cases} \lambda \alpha_i, & i \in R(x^*), \\ 0, & i \notin R(x^*). \end{cases}$$

Заключение. В работе сформулирована и изучена модель определения объема заказа торговой фирмы для кусочно-линейного спроса на продаваемый товар при наличии уровня насыщения. Разработана оптимизационная задача, для решения которой привлекается подход на основе применения методов и понятий негладкой оптимизации. Приведена теорема, дающая необходимые условия экстремума.

Литература

1. *Giri B. C., Sharma S.* Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and alowable shortages under two levels trade credit financing // Oper. Res. Intern. J. 2016. Vol. 16. P. 25–50.
2. *Aggarwal S. P., Jaggi C. K.* Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments// J. Oper. Res. Soc. 1995. Vol. 46(5). P. 658–662.
3. *Dave U.* Letters and viewpoints on "economic order quantity under conditions of permissible delay in payments" // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 46(5). P. 1069–1070.
4. *Chen S. C., Teng J. T., Skouri K.* Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit // Intern. J. Prod. Econ. 2013. Vol. 155. P. 302–309.
5. *Giri B. C., Sharma S.* An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price // Optim. Lett. 2015. Vol. 37. P. 624–637. DOI:10.1007/s11590-014-0810-2.
6. *Goyal S. K.* Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 36(4). P. 335–338.
7. *Huang Y. F.* Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing // J. Oper. Res. Soc. 2003. Vol. 54(9). P. 1011–1015.
8. *Huang Y. F., Hsu K. H.* An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain // Intern. J. Prod. Econ. 2008. Vol. 112(2). P. 655–664.
9. *Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S.* An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment // J. Oper. Res. Soc. 1997. Vol. 48(8). P. 826–833.
10. *Khanra S., Ghosh S. K., Chaudhuri K. S.* An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 218(1). P. 1–9.
11. *Khanra S., Mandal B., Sarkar B.* An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy // Econ. Model. 2013. Vol. 35. P. 349–355.
12. *Maihami R., Abadi I. N. K.* Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging // Math. Comp. Model. 2012. Vol. 55(5–6). P. 1722–1733.
13. *Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Probabilistic model of terminal services // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10(39). P. 1945–1952.
14. *Polyakova L. N., Karelin V. V.* On a continuous method for minimizing of nonsmooth functions // Intern. conference stability and control processes in memory of V. I. Zubov (SCP): Proceedings. Eds: L. A. Petrosyan, A. P. Zhabko. Saint Petersburg: Saint Petersburg University, 2015. P. 338–341.
15. *Polyakova L., Karelin V.* Exact penalty functions method for solving problems of nondifferentiable optimization // Cybernetics and physics. 2014. Vol. 3, N 3. P. 124–129.
16. *Полякова Л. Н.* О методе точных штрафных квазидифференцируемых функций // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2001. Т. 41, № 2. С. 225–238.

Для цитирования: *Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Ягольник И. В.* Моделирование процесса заказа для кусочно-линейного спроса с насыщением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 138–146. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.202

References

1. Giri B. C., Sharma S. Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and alowable shortages under two levels trade credit financing. *Oper. Res. Intern. J.*, 2016, vol. 16, pp. 25–50.
2. Aggarwal S. P., Jaggi C. K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1995, vol. 46(5), pp. 658–662.
3. Dave U. Letters and viewpoints on "economic order quantity under conditions of permissible delay in payments". *J. Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 46(5), pp. 1069–1070.

4. Chen S. C., Teng J. T., Skouri K. Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit. *Intern. J. Prod. Econ.*, 2013, vol. 155, pp. 302–309.

5. Giri B. C., Sharma S. An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price. *Optim. Lett.*, 2015, vol. 37, pp. 624–637. DOI: 10.1007/s11590-014-0810-2.

6. Goyal S. K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 36(4), pp. 335–338.

7. Huang Y. F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing. *J. Oper. Res. Soc.*, 2003, vol. 54(9), pp. 1011–1015.

8. Huang Y. F., Hsu K. H. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain. *Intern. J. Prod. Econ.*, 2008, vol. 112(2), pp. 655–664.

9. Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment. *J. Oper. Res. Soc.*, 1997, vol. 48(8), pp. 826–833.

10. Khanra S., Ghosh S. K., Chaudhuri K. S. An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment. *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 218(1), pp. 1–9.

11. Khanra S., Mandal B., Sarkar B. An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy. *Econ. Model.*, 2013, vol. 35, pp. 349–355.

12. Maihami R., Abadi I. N. K. Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging. *Math. Comp. Model.*, 2012, vol. 55(5–6), pp. 1722–1733.

13. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10(39), pp. 1945–1952.

14. Polyakova L. N., Karelin V. V. On a continuous method for minimizing of nonsmooth functions. *Intern. Conference stability and control processes in memory of V. I. Zubov (SCP). Proceedings*. Eds L. A. Petrosyan, A. P. Zhabko. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2015, pp. 338–341.

15. Polyakova L., Karelin V. Exact penalty functions method for solving problems of nondifferentiable optimization. *Cybernetics and physics*, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 124–129.

16. Polyakova L. N. O metode tochnyh shtrafnyh kvazidifferenciruemyh funkcij [On the method of exact penalty quasidifferential functions]. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2001, vol. 41, no. 2, pp. 225–238. (In Russian)

For citation: Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N., Yagolnik I. V. Modeling of the ordering process for piecewise-linear demand with saturation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 138–146. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.202

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2016 г.

Статья принята к печати 11 апреля 2017 г.