УДК 519.2
MSC 60G05, 60G20

ПСЕВДО-ПУАССОНОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ И КЛАСС ПРОЦЕССОВ, ОБОБЩАЮЩИХ ПРОЦЕСС ОРНШТЕЙНА—УЛЕНБЕКА

О. В. Русаков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Определение псевдо-пуассоновских процессов дано в знаменитой монографии У. Феллера (1971, том II, глава X). Современное развитие теории информационных потоков вызвало новый интерес к детальному анализу поведения и характеристик псевдо-пуассоновских процессов. Формально, псевдо-пуассоновский процесс представляет собой пуассоновский субординатор математического времени независимой от управляющего пуассоновского процесса случайной последовательности или, говоря другими словами, пуассоновскую рандомизацию времени случайной последовательности. Мы рассматриваем последовательность, состоящую из независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом. Несмотря на то, что в этом случае псевдо-пуассоновский процесс не имеет независимых приращений, удается вычислить автоковариационную функцию, которая оказывается экспоненциально убывающей. Подходящим образом нормированные суммы такого вида псевдо-пуассоновских процессов сходятся к процессу Орнштейна—Уленбека. Мы рассматриваем обобщение управляющего пуассоновского процесса на случай случайной интенсивности. Мы показываем, что в данном случае автоковариационная функция соответствующего псевдо-пуассоновского процесса является преобразованием Лапласа для распределения данной интенсивности. Мы вкратце обсуждаем стохастические принципы выбора распределения для случайной интенсивности и иллюстрируем их на двух детализированных примерах. Библиогр. 20 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: псевдо-пуассоновские процессы, случайная интенсивность, преобразование Лапласа для распределений, процессы типа Орнштейна—Уленбека.

Введение. Рост потребностей в описании информационных и финансовых потоков, построении их стохастических моделей стимулировали развитие теории псевдопуассоновских процессов, детальное изучение их свойств. Само определение псевдопуассоновских процессов можно найти в известной монографии Феллера [1, т. II, гл. X]. По сути псевдо-пуассоновский процесс представляет собой числовой поток, значения которого случайны и меняются в моменты скачков некоторого «ведущего» независимого пуассоновского процесса. Формально мы имеем пуассоновскую рандомизацию времени некоторой последовательности случайных чисел (или случайных элементов), пуассоновскую субординацию математического считающего времени случайной последовательности. Случай, когда такая «подчиненная» последовательность состоит из накопленных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, хорошо изучен в литературе и называется *сложным* (*compound*) *пуассоновским процессом.* Сложный пуассоновский процесс обладает рядом хороших свойств, главное из которых — независимость приращений. Однако это свойство теряется, когда последовательность, время которой рандомизируется, состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин. К счастью, в таком случае при условии существования моментов второго порядка у членов последовательности удается вычислить ковариацию, которая экспоненциально убывает [2, 3]. Знание ковариации

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.208

позволят применить центральную предельную теорему для векторов, составленных из конечномерных сечений соответствующим образом нормированных сумм независимых копий псевдо-пуассоновских процессов. Слабый предел в смысле сходимости конечномерных распределений оказывается процессом Орнштейна—Уленбека — стационарным гауссовским марковским процессом. Здесь также имеет место и более сильная сходимость [4] — функциональная предельная теорема в пространстве Скорохода (см. [5]). В настоящей работе рассматривается обобщение «ведущего» пуассоновского процесса, когда интенсивность предполагается случайной. А именно, рассматривается такой тип «дважды стохастического пуассоновского процесса», в котором накопленная по времени t интенсивность имеет вид $t\lambda(\omega)$, где $\lambda(\omega)$ — некоторая положительная случайная величина. Оказывается, что в таком случае ковариация соответствующего псевдо-пуассоновского процесса (при условии, что «подчиненная» последовательность состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией, и при определенном условии независимости, налагаемом на $\lambda(\omega)$) описывается преобразованием Лапласа распределения данной случайной интенсивности. Этот факт позволяет строить стохастические модели стационарных информационных и/или финансовых потоков (см., напр., [6–11]) с ковариациями, выраженными вполне монотонными функциями.

Ряд обобщений процесса Орнштейна—Уленбека приведен в [12]. Наши обобщения имеют соответствия с «верхним» (upstairs) представлением процессов Орнштейна—Уленбека из [12], однако мы приводим явную конструкцию ковариации на основе пуассоновских процессов со случайной интенсивностью.

Ковариация псевдо-пуассоновского процесса со случайной интенсивностью. Предположим, что все рассматриваемые случайные объекты заданы на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$. Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин. Рассмотрим $\Pi_\lambda(s) = \Pi_\lambda$ — пуассоновский случайный процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ и временным параметром $s \in \mathbb{R}_+$. Пуассоновский процесс Π_1 с единичной интенсивностью назовем *стандартизованным.* Процесс Π_λ и последовательность (ξ) в дальнейшем предполагаются независимыми.

Определение 1. *Пуассоновским субординатором* для последовательности (ξ) назовем следующий процесс ψ, полученный случайной заменой дискретного времени у последовательности (ξ) на непрерывное время, когда элементы последовательности (ξ) реализуются последовательно в моменты скачков пуассоновского процесса,

$$\psi(s) = \psi(s;\, \lambda) = \psi_\lambda(s) \stackrel{\triangle}{=} \xi_{\Pi_\lambda(s)}, \qquad s \in \mathbb{R}_+\,. \tag{1}$$

Последовательность (ξ) мы называем *формирующей*, *подчиненной*, а независимый от нее пуассоновский процесс Π_λ — *управляющим* или *ведущим*; полученный в результате субординации процесс ψ назовем *процессом пуассоновского случайного индекса* (*процессом ПСИ* или *ПСИ-процессом*).

Рассмотрим следующее обобщение ПСИ-процесса на случай, когда ведущий пуассоновский процесс имеет случайную интенсивность. Пуассоновский процесс со случайной интенсивностью (положительной с вероятностью единица) обозначим через $\Pi_{\lambda(\omega)}(s) = \Pi_{\lambda(\omega)}$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$. Переменная ω у $\lambda(\omega)$ говорит о том, что рассматривается модель со случайной интенсивностью с некоторой функцией распределения F_λ. В случае же, когда интенсивность неслучайна, используется обозначение λ, в котором переменная ω отсутствует. Очевидно, что распределение $\lambda(\omega)$ задается ее преобразованием Лапласа $L_{\lambda(\omega)}(s) = \mathbb{E}\{\exp(-s\lambda(\omega))\}$, $s \in \mathbb{R}_+$. Пуассоновский процесс со случайной интенсивностью мы понимаем как (в свою очередь) следующую замену времени стандартизованного пуассоновского процесса $\Pi_{\lambda(\omega)}(s)=\Pi_1(s\lambda(\omega)),\ s\in\mathbb{R}_+$.

Аналогично определению 1 зададим процесс ПСИ со случайной интенсивностью, который подразумевает, что значение случайной интенсивности пуассоновского потока разыгрывается в начальный момент времени. Предполагаем при этом, что (ξ), Π_1 и $\lambda(\omega)$ независимы совокупно.

Определение 2. *Пуассоновским субординатором со случайной интенсивностью* для последовательности (ξ), *процессом ПСИ со случайной интенсивностью* $\lambda(\omega)$ назовем

$$\psi_{\lambda(\omega)} = \psi_{\lambda(\omega)}(s) = \psi(s;\,\lambda(\omega)) \overset{\triangle}{=} \xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)}, \qquad s \in \mathbb{R}_+\,. \tag{2}$$

Лемма 1 ниже утверждает, что если формирующая последовательность (ξ) состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, то процесс $\psi_{\lambda(\omega)}$ является стационарным в широком смысле, а его ковариация есть преобразование Лапласа $L_{\lambda(\omega)}(s)$, $s\in\mathbb{R}_+$, соответствующей случайной интенсивности.

Лемма 1. (Автоковариация для процесса случайного индекса, когда ведущий пуассоновский процесс имеет случайную интенсивность.) *Пусть элементы* (ξ) *— суть независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, $\mathbb{D}\xi_0 = 1$. *Тогда для всяких неотрицательных* s, v *ковариация процесса* $\psi_{\lambda(\omega)}$ *есть преобразование Лапласа для случайной интенсивности* $\lambda(\omega)$,

$$\operatorname{cov}\left(\psi_{\lambda(\omega)}(v), \psi_{\lambda(\omega)}(v+s)\right) = \mathbb{E}\exp\{-\lambda(\omega)s\}\,. \tag{3}$$

Доказательство леммы 1. Для процесса случайного индекса очевидно следующее представление в форме бесконечной суммы случайных величин, которые взвешиваются индикаторами

$$\psi_{\lambda(\omega)}(s) = \xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)} = \sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\mathbb{1}\{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)=j\}\,, \qquad s\in\mathbb{R}_+\,. \tag{4}$$

Основываясь на данном представлении (4), пользуясь независимостью Π_1, $\lambda(\omega)$ и (ξ), независимостью членов последовательности (ξ), равенствами $\mathbb{E}\xi_0=0$, $\mathbb{D}\xi_0=1$, формулой полной вероятности, независимостью и однородностью приращений пуассоновских процессов (с неслучайной интенсивностью), получаем цепочку равенств

$$\operatorname{cov}\left(\psi_{\lambda(\omega)}(v), \psi_{\lambda(\omega)}(s+v)\right) = \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\mathbb{1}\{\Pi_{\lambda(\omega)}(v)=j\}\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\mathbb{1}\{\Pi_{\lambda(\omega)}(v+s)=i\}\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j^2\mathbb{1}\{\Pi_{\lambda(\omega)}(v)=\Pi_{\lambda(\omega)}(v+s)=j\}\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}\{\xi_j^2\}\,\mathbb{P}\{\Pi_{\lambda(\omega)}(v)=\Pi_{\lambda(\omega)}(v+s)=j\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\mathbb{P}\{\Pi_y(v)=\Pi_y(v+s)=j\}\mathrm{d}F_\lambda(y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_y(v) = j, \Pi_y(v+s) - \Pi_y(v) = 0\} \mathrm{d}F_\lambda(y) =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_y(v+s) - \Pi_y(v) = 0\} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_y(v) = j\} \mathrm{d}F_\lambda(y) =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_y(s) = 0\} \mathrm{d}F_\lambda(y) = \int_0^{\infty} \exp\{-ys\} \mathrm{d}F_\lambda(y) \,.$$

Очевидно, что дисперсия $\xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)}$ всегда равна 1, то есть равномерно ограничена, и поэтому проведенные изменения порядка интегрирования и суммирования законны. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Так как дважды стохастические пуассоновские процессы имеют стационарные приращения при случайной интенсивности, которая рассматривается в настоящей работе, то при условии строгой стационарности последовательности (ξ) следует строгая стационарность процесса $\psi_{\lambda(\omega)}$. Очевидно, свойство строгой стационарности выполнено для (ξ), состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин.

Вместе с тем, в случае, когда (ξ) состоит из некоррелированных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, равенство (3) остается в силе, процесс $\psi_{\lambda(\omega)}$ стационарен в широком смысле, но стационарности в узком смысле у него может и не быть.

Замечание 2. Теорема Бернштейна (см., напр., [1]) утверждает, что функция, заданная на правой полуоси, равная единице в нуле, является преобразованием Лапласа некоторого вероятностного распределения неотрицательной случайной величины тогда и только тогда, когда эта функция вполне монотонна. Нам остается только исключить атом в нуле у распределения $\lambda(\omega)$, чтобы сделать следующий вывод. Любая вполне монотонная функция, заданная на правой полуоси, стремящаяся к нулю при стремлении аргумента к бесконечности, может являться ковариационной функцией некоторого процесса ПСИ со случайной интенсивностью $\lambda(\omega)$. При этом такая вполне монотонная функция есть преобразование Лапласа интенсивности $\lambda(\omega)$. Множество примеров преобразований Лапласа можно найти в [13].

Рассмотрим $(\psi_j(s;\, \lambda(\omega)))$, $j \in \mathbb{N}$, — независимые копии процесса $\psi_{\lambda(\omega)}(s)$, полученного в соответствии с (2), $s \in \mathbb{R}_+$. Для $(\psi_j(s;\, \lambda(\omega)))$ по всем натуральным j предполагается взаимная независимость формирующих последовательностей; ведущих стандартизованных пуассоновских процессов (у которых происходит замена времени случайными интенсивностями), а также случайных интенсивностей. Все случайные интенсивности одинаково распределены.

Рассмотрим суммы данных копий процессов ПСИ со случайной интенсивностью, с независимыми совокупно одинаково распределенными с нулевым средним и единичной дисперсией членами формирующих последовательностей. Нормируем эти суммы на корень из количества слагаемых $\sqrt{N}$:

$$Z_N(s) = Z_N(s;\, \lambda(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(s;\, \lambda(\omega)), \qquad s \in \mathbb{R}_+ \,. \tag{5}$$

Лемма 2. *Конечномерные распределения процесса $Z_N(s;\,\lambda(\omega))$, $s\in\mathbb{R}_+$, определенного равенством (5), сходятся слабо при $N\to\infty$ к конечномерным распределениям гауссовского процесса с ковариационной функцией $R(s)=L_{\lambda(\omega)}(s)$.*

В частности, когда $\lambda(\omega)=\lambda>0$ — вырожденная случайная величина, то есть ведущий пуассоновский процесс является обычным пуассоновским процессом, предел $Z_N(s)$ в смысле слабой сходимости конечномерных распределений при $N\to\infty$ является стандартным процессом Орнштейна—Уленбека $U(s)=U(s;\,\lambda)$ — центрированной и нормированной гауссовской функцией на $[0,\infty)\ni s$ с ковариацией

$$\operatorname{cov}\left(U(s_1;\,\lambda),\,U(s_2;\,\lambda)\right)=\exp\{-\lambda|s_1-s_2|\}\,,\qquad s_1,s_2\in\mathbb{R}_+\,,$$

где λ — параметр вязкости.

Доказательство леммы 2. В силу того, что все процессы $(\psi_j(s;\,\lambda(\omega))\,)$, $j\in\mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены, имеют одинаковые (конечные) ковариации вида (3), определенного в лемме 1, то утверждение леммы 2 непосредственно следует из центральной предельной теоремы (ЦПТ) для векторов. Лемма 2 доказана.

Замечание 3. В условиях данной леммы для случая неслучайной интенсивности $\lambda>0$, как доказано в [4], имеет место и более сильная сходимость — в пространстве Скорохода $[0,\infty)$.

Стоит заметить, что доказательство аналогичной функциональной предельной теоремы для случая случайной интенсивности на текущий момент представляет трудности для автора в силу необходимости наложений моментных условий на $\lambda(\omega)$. Вместе с тем одними из самых интересных случаев (для автора) являются случаи «тяжелых хвостов» распределений случайной интенсивности, — это значит, что замещения членов формирующей последовательности (ξ) происходят часто с большой вероятностью. При этом в таком важном случае, когда положительная $\lambda(\omega)$ имеет строго α-устойчивый закон распределения (в этом случае $0<\alpha<1$), хорошо известна простая формула для преобразования Лапласа (см., напр., [1, 14]) $\exp(-|t|^{\alpha})$, $t\geq 0$, однако явный вид плотности известен только для $\alpha=1/2$ (см. напр., [1, 7]).

Замечание 4. На основе замечания 2 к лемме 1 и факта сходимости $(Z_N(s))$ к процессу Орнштейна—Уленбека в случае неслучайной интенсивности мы можем говорить об обобщении процесса Орнштейна—Уленбека на случай стационарного гауссовского процесса, ковариация которого является вполне монотонной функцией, убывающей к нулю в бесконечности.

Замечание 5. (О продолжении стационарного процесса ПСИ на всю ось времени.) Вследствие известных фактов (см., напр., [15]) для любого стохастически непрерывного стационарного процесса, заданного на $[0,1]$, существует стохастически непрерывный стационарный процесс, заданный на всей вещественной оси, ограничение которого на $[0,1]$ есть исходный процесс. Стохастическая непрерывность построенного процесса $\psi_\lambda(s)$, $s\in\mathbb{R}_+$, нетрудно проверяется на основе стохастической непрерывности Π_λ (относительно равномерного расстояния) и совокупной независимости Π_λ и (ξ). Поэтому процесс ПСИ можно рассматривать на $\mathbb{R}$.

Процесс Орнштейна—Уленбека можно получить сразу на всей оси, используя следующую примерную схему. Изначально следует взять вместо классического пуассоновского процесса на $\mathbb{R}_+$ пуассоновский точечный процесс на $\mathbb{R}$. Пуассоновский точечный процесс порождает случайное разбиение $\mathbb{R}$ на попарно непересекающиеся полуоткрытые интервалы — «спейсинги» $\{I_j\}$, $j\in\mathbb{Z}$, причем длины этих интервалов — независимые одинаково распределенные случайные величины с показательным законом распределения. Далее возьмем двустороннюю последовательность (ξ_j), $j \in \mathbb{Z}$, состоящую из независимых одинаково распределенных случайных величин, и припишем «спейсингу» I_j случайную величину ξ_j, $j \in \mathbb{Z}$. Процесс ПСИ зададим равенством $\psi(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi_j \mathbb{1}\{I_j \ni t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\psi(t)$ и $\psi(s)$ при $s \neq t$ условно независимы относительно σ-алгебры, порожденной пуассоновским точечным процессом, заданным на $\mathbb{R}$, если t и s накрываются разными «спейсингами». Остается предположить $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, $\mathbb{D}\xi_0 = 1$ и применить лемму 2 для неслучайной интенсивности при расширении временного промежутка до $\mathbb{R}$.

Стохастические модели и распределения, связанные с ними, относятся к классике теории вероятностей. В свете классической работы Якоба Бернулли [16] под «стохастическими моделями» мы понимаем прошедшие определенную проверку временем модели, основанные на сделанных с искусством («Ars conjectandi sive stochastice», см. [17, с. 27, 86] или [18]) предположениях о вероятностях.

Значительная часть знаменитой монографии Феллера [1] посвящена таким моделям. Практически все распределения, так или иначе связанные со стохастическими моделями, выражены у Феллера в терминах их производящих функций или преобразований Лапласа (когда речь идет о распределениях величин, принимающих значения на правой полуоси). При этом, если дана производящая функция от аргумента $s \in (0, 1]$, то соответствующее преобразование Лапласа выписывается элементарной заменой $s = \exp\{-t\}$, $t \in [0, \infty)$. Таким образом, применяя те или иные стохастические принципы и подходы (изложенные в монографии Феллера [1] в обоих томах) для построения модели случайной интенсивности ведущего пуассоновского процесса при субординировании времени последовательностей, мы получаем стохастические модели ковариаций стационарных процессов, в том числе и гауссовских. При этом, безусловно, случайные интенсивности должны иметь «хорошие» свойства, например: иметь безгранично делимое распределение и/или соответствовать процессам восстановления и т. п. Остановимся на следующих примерах.

Пример 1. Распределение случайной интенсивности подчиняется рекуррентному событию. Стохастическая модель рекуррентных событий описана в монографии Феллера [1, том II, гл. XIII]. Рассматривается схема испытаний Бернулли с вероятностью успеха $0 < p < 1$ и неудачи $q = 1 - p$. Рекуррентное событие — появление серии из $r \in \mathbb{N}$ успехов. Интересующее нас распределение — распределение времени $\tau = \tau(\omega) \in \mathbb{Z}_+$ ожидания данного рекуррентного события. Распределение τ приводится в терминах производящей функции, которая имеет следующее выражение:

$$g(s) = \frac{p^r s^r (1 - ps)}{1 - s + qp^r s^{r+1}}, \qquad s \in (0, 1]\,.$$

Подставим в правой части этого равенства вместо s экспоненту $\exp\{-t\}$, $t \in [0, \infty)$, и получим преобразование Лапласа для τ

$$F(t) = \frac{p^r\, e^{-rt}\, (1 - p\, e^{-t})}{1 - e^{-t} + (1 - p)p^r e^{-(r+1)t}}\,. \tag{6}$$

Теперь допустим, что наши испытания Бернулли реализуются в последовательные моменты времени, заданные на решетке с некоторым шагом $a > 0$. Соответствующее время ожидания запишется как $a\tau$, а преобразование Лапласа — как

$$F_a(t) = \frac{p^r\, e^{-rat}\, (1 - p\, e^{-at})}{1 - e^{-at} + (1 - p)p^r e^{-(r+1)at}}\,. \tag{7}$$

Чтобы естественным образом исключить атом в нуле распределения $a\tau$ рассмотрим время ожидания «с учетом времени реализации рекуррентного события», то есть строго положительную величину $a\tau + ar$. Очевидно, что преобразование Лапласа величины $a\tau+ar$ есть $\exp\{-art\}F_a(t)$, $t \in [0, \infty)$. Теперь, если распределение случайной интенсивности совпадает с распределением $a\tau+ar$, то соответствующий процесс ПСИ со случайной интенсивностью будет иметь ковариацию $\exp\{-art\}F_a(t)$.

Легко получить асимптотику для такой ковариации при больших t:

$$e^{-art}F_a(t) \sim p^r e^{-2(ar)t}\,, \qquad t \to \infty\,. \tag{8}$$

Отметим, что асимптотика (8) по порядку совпадает с асимптотикой в бесконечности для ковариации процесса Орнштейна—Уленбека с дисперсией p^r.

Применив известную эквивалентность $e^z - 1 \sim z$, $z \to 0$, также нетрудно получить поведение ковариации $\exp\{-art\}F_a(t)$ при малых t:

$$e^{-art}F_a(t) \sim e^{-2(ar)t}\,, \qquad t \to 0\,. \tag{9}$$

Асимптотика (9) по порядку также совпадает с асимптотикой в нуле для ковариации процесса Орнштейна—Уленбека, но уже с единичной дисперсией.

Здесь, сравнивая асимптотики (8) и (9), мы наблюдаем такой любопытный эффект: начиная с ковариации процесса Орнштейна—Уленбека, имеющего единичную дисперсию, при дальнейшем росте t мы постепенно приходим к ковариации процесса Орнштейна—Уленбека с меньшей дисперсией p^r.

График функции $F(t)\exp(-rt)$ при $p = 0.9$ и различных r, представлен на рис. 1.

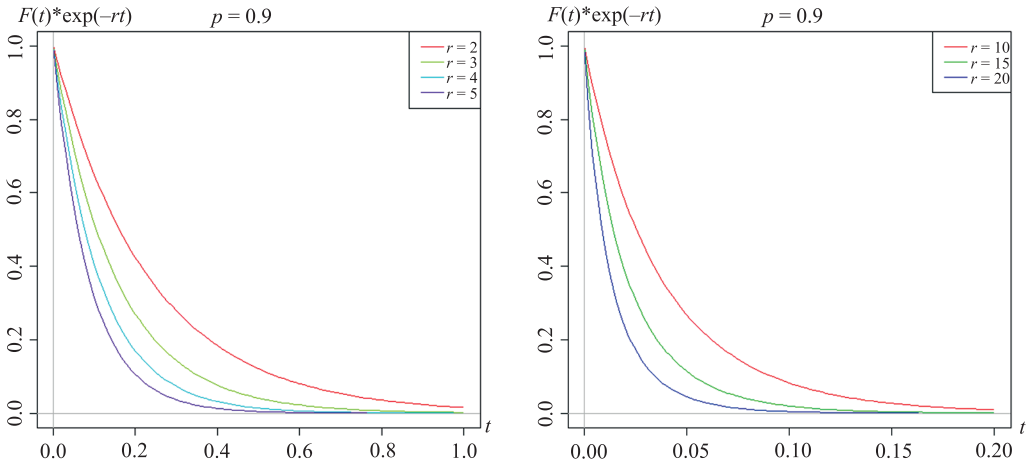

Рис. 1. Функция $F(t)\exp(-rt)$ в окрестности нуля.

Замечание 6. (О числах Фибоначчи, рекуррентных событиях и процессе Орнштейна—Уленбека.) Распределение времени ожидания двух подряд успехов ($r = 2$) в схеме испытаний Бернулли может быть описано с помощью чисел Фибоначчи [19]. Числа Фибоначчи «считают» количество вариантов «разместить» успехи-неудачи в серии испытаний Бернулли, пока не выпадет 2 успеха подряд. Используя известную формулу для производящей функции последовательности чисел Фибоначчи, мы перейдем к преобразованию Лапласа и получим формулы типа (6)–(9). При этом возникает вопрос: «Можно ли здесь, в терминах наблюдаемой ковариации, модель которой выражается соответствующим преобразованием Лапласа, «вскрыть роль» золотого сечения?».

Пример 2. Стохастическая модель бесселевой плотности распределения случайной интенсивности. Стохастическая модель безгранично делимой бесселевой плотности описана в монографии Феллера [1, том I, гл. XI; том II, гл. II, XIII]. Известен общий вид преобразования Лапласа для безгранично делимых распределений: $\exp(-\phi)$, где ϕ — функция, равная нулю в нуле и имеющая вполне монотонную производную (см., напр., [1, 20]). Однако функцию ϕ часто бывает затруднительно предъявить конструктивно. Опишем распределение Бесселя в терминах преобразования Лапласа.

Рассмотрим модифицированную функцию Бесселя

$$B_b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+b+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+b}, \tag{10}$$

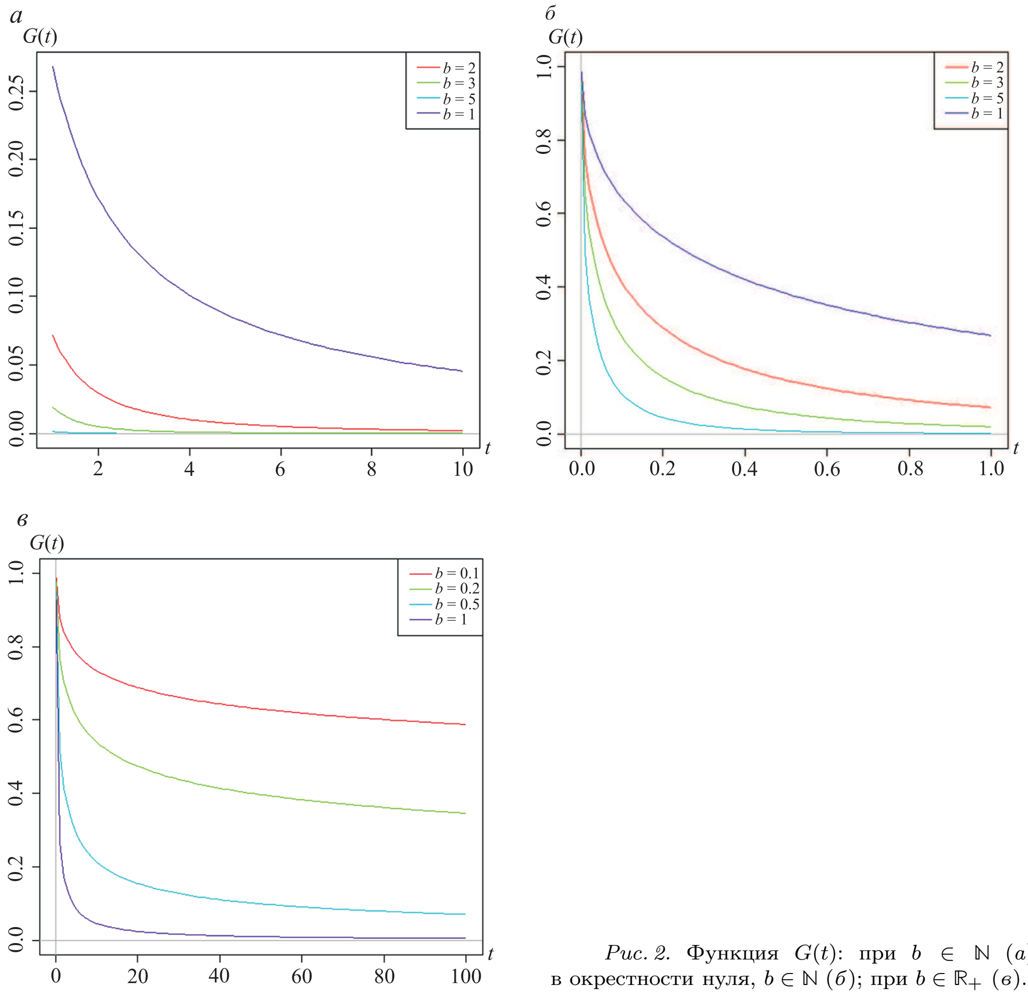

Рис. 2. Функция $G(t)$: при $b \in \mathbb{N}$ (*а*); в окрестности нуля, $b \in \mathbb{N}$ (*б*); при $b \in \mathbb{R}_+$ (*в*).

которая нас будет интересовать при аргументе $x > 0$ и параметре $b > 0$. При этих значениях аргумента и параметра с помощью данной функции задается (так называемая) бесселева плотность распределения положительной случайной величины η:

$$g_\eta(x) = e^{-x}\frac{b}{x}B_b(x), \qquad x > 0\,, \quad b > 0\,. \tag{11}$$

Опишем стохастическую модель плотности g_η и уточним роль параметра b. Рассмотрим рандомизированное симметричное случайное блуждание, когда переходы происходят в моменты скачков некоторого стандартизованного пуассоновского потока (вида Π_1), который задается «спейсингами» — независимыми одинаково распределенными показательными случайными величинами с единичной интенсивностью (с преобразованием Лапласа $1/(1+t)$, $\ t \in \mathbb{R}_+$). Исходное случайное блуждание и пуассоновский поток независимы.

Отметим, что рандомизированное случайное блуждание, в свою очередь, относится к классу процессов ПСИ: подчиненная последовательность представляет из себя накопленные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$.

Случайная величина η с плотностью (11) сначала задается для натуральных b (см. [1, том II, гл. II]). Она есть момент первого достижения уровня b, $b \in \mathbb{N}$, рандомизированного случайного блуждания. Преобразование Лапласа плотности g_η имеет вид

$$G(t) = \left(t + 1 - \sqrt{(t+1)^2 - 1}\right)^b\,, \qquad t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{12}$$

Из вида функции G следует, что это преобразование Лапласа безгранично делимого закона, поэтому плотность (11) естественно обобщается на все положительные b.

Отметим, что ковариация вида (12) при $t \to \infty$ эквивалентна $(1/2t)^b$, $b > 0$.

График функции $G(t)$ при различных значениях параметра b представлен на рис. 2.

Автор выражает благодарность уважаемым рецензентам за внимательное прочтение работы и ценные замечания.

Литература

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I, II. М.: Мир, 1984.

2. *Русаков О. В.* Суммы независимых пуассоновских субординаторов и их связь со строго α-устойчивыми процессами типа Орнштейна—Уленбека // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 361. С. 123–137.

3. *Русаков О. В.* Пуассоновские субординаторы, поле Винера—Орнштейна—Уленбека и связь броуновских мостов с переходными характеристиками процессов Орнштейна—Уленбека // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2010. Т. 384. С. 225–237.

4. *Русаков О. В.* Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 442. С. 122–132.

5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

6. *Русаков О. В., Аплеев Д. Б.* Обобщение модели Васичека на случай многих факторов: пример спот-ставки с двумя факторами // Прикладная Информатика. 2014. № 6(54). С. 90–101.

7. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

8. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes. London, UK: Chapman & Hall, 2004.

9. *Kaj I., Taqqu M. S.* Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach // In and Out of Equilibrium. II. Ser.: Progress in Probability. 2008. Vol. 60. Burkhäuser, Basel. P. 383–427.

10. *Vasićek O.* An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188.

11. *Vasicek and Beyond.* Approaches to Building and Applying Interest Rate Models. Published by Risk Publications. London, 1996.

12. *Wolpert R. L., Taqqu M. S.* Fractional Ornstein—Uhlenbeck Levýy Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs // Signal Processing. Vol. 85(8). P. 1523–1545. Aug 2005.

13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. М.: Наука, 1969.

14. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance, Stochastic Modeling Series. Vol. 1. New York: Chapman & Hall, 1994.

15. *Parthasarathy K. R., Varadhan S. R. S.* Extension of Stationary Stochastic Processes // Теория вероятн. и ее примен. 1964. T. IX, вып. 1. С. 72–78. URL: http://www.mathnet.ru/links /1c13c6849a971099e6b06a12a0321b4c/tvp342.pdf (дата обращения: 03.03.2017).

16. *Bernoulli J.* Ars Conjectandi. Basileae, Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713.

17. *Бернулли Я.* О законе больших чисел / пер. с лат. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

18. *Bernoulli J.* On the Law of Large Numbers, Part Four of Ars Conjectandi. (English translation, translated by Oscar Sheynin.) Berlin: NG Verlag, 1713/2005.

19. *Иванов О. А.* Схема Бернулли и обобщения чисел Фибоначчи. Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2014. Сер. 1, вып. 4. С. 1–3.

20. *Sato K.-I.* Levýy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge studies in advanced mathematics. Vol. 68. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

Статья поступила в редакцию 3 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторе

Русаков Олег Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; o.rusakov@spbu.ru

PSEUDO-POISSONIAN PROCESSES WITH STOCHASTIC INTENSITY AND A CLASS OF PROCESSES WHICH GENERALIZE THE ORNSTEIN—UHLENBECK PROCESS

Oleg V. Rusakov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; o.rusakov@spbu.ru

The definition of pseudo-poissonian processes is given in the famous monograph of William Feller, vol. II, chapter X. The modern development of the theory of information flows stipulates a new interest to detailed analysis of behavior and characteristics of the pseudo-poissonian processes. Formally, pseudo-poissonian process is a poissonian subordination of the mathematical time of an independent random sequence, the time randomization of a random sequence. We consider the given sequence as independent identically distributed random values with second moments. Although in this case the pseudo-poissonian processes do not have independent increments it is possible to calculate the autocovariance function with the property of the exponentially decreasing. Normalized sums of independent copies of such Pseudo-Poissonian processes tend to the Ornstein—Uhlenbeck process. We consider a generalization of the driving poissonian process to the case of a random intensity. We show that under this generalization the autocovariance function of the corresponding Pseudo-Poissonian process is the Laplace transform of the distribution of this random intensity. We shortly discuss stochastic principles to choice of the distribution of the random intensity and illustrate them in two detailed examples. Refs 20. Figs 2.

Keywords: pseudo-poissonian processes, random intensity, Laplace transform for distributions, Ornstein—Uhlenbeck type processes.

References

1. Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* **I, II** (John Willey & Sons, 1971).

2. Rusakov O. V., “Sums of Independent Poisson Subordinators and their Connection with Strictly α-stable Processes of Ornstein—Uhlebeck Type”, *J. Math. Sci.* **3**, 350–357 (2009).

3. Rusakov O. V., “Poisson Subordinators, the Wiener—Ornstein—Uhlenbeck Field, and a Relation Between the Ornstein—Uhlenbeck processes and Brownian Bridges”, *J. Math. Sci.* **2**, 232–238 (2011).

4. Rusakov O. V., “Tightness of the sums of independent identically distributed pseudo-poissonian processes in the Skorokhod space”, *Zap. Nauch. Sem. POMI* **442**, 122–132 (2015) [in Russian].

5. Billingsley P., *Convergence of Probability Measures* (John Willey & Sons, 1968).

6. Rusakov O. V., Apleev D. B., “A multifactorial generalization of the Vasicek model: example of spot-rates with two factors”, *Journal of Applied Informatics* **6(54)**, 90–101 (2014) [in Russian].

7. Shiryaev A. N., “Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory”, *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability* **3**, (1999).

8. Cont R., Tankov P., *Financial modelling with jump processes* (Chapman & Hall, London, UK, 2004).

9. Kaj I., Taqqu M.S., “Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach”, *In and Out of Equilibrium. II.* Ser.: *Progress in Probability* **60** (Burkhäuser, Basel, 383–427, 2008).

10. Vasićek O., “An equilibrium characterization of the term structure”, *Journal of Financial Economics* **5**, 177–188 (1977).

11. Vasicek and Beyond, *Approaches to Building and Applying Interest Rate Models* (Published by Risk Publications, London, 1996).

12. Wolpert R. L., Taqqu M. S., “Fractional Ornstein-Uhlenbeck Levý Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs”, *Signal Processing* **85(8)**, 1523–1545 (Aug 2005).

13. Bateman H., Erdelyi A., *Tables of integral transforms* **1, 2** (McGraw-Hill Book Company, inc., New York, Toronto, London, 1954).

14. Samorodnitsky G., Taqqu M. S., *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance, Stochastic Modeling Series* **1** (Chapman & Hall, New York, 1994).

15. Parthasarathy K. R., Varadhan S. R. S., “Extension of Stationary Stochastic Processes”, *Theory of Probability and its Applications* **IX**(1), 72–78 (1964). Available at: http://www.mathnet.ru/links /1c13c6849a971099e6b06a12a0321b4c/tvp342.pdf (accessed 03.03.2017).

16. Bernoulli J., *Ars Conjectandi* (Basileae, Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713).

17. *On the Law of Large Numbers.* Includes reprint of J. Bernoulli (1913) with comments (O. B. Sheynin, A. V. Prokhorov, N. G. Gamkrelidze), three commentaries (Sheynin, *Bernoulli and the beginnings of the theory of probability*; Yu. V. Prokhorov, *The law of large numbers and estimation of the probabilities of large deviations*; A. P. Youshkevich, *Biography of Bernoulli*), all this preceded by A. N. Kolmogorov’s Foreword and Markov’s speech of 1913 at the session of the Petersburg Academy of Sciences observing the bicentenary of the law of large numbers. Ed. by Yu. V. Prokhorov. Moscow, 1986.

18. Bernoulli J., *On the Law of Large Numbers, Part Four of Ars Conjectandi* (Berlin, NG Verlag, 1713/2005).

19. Ivanov O. A., “The Bernoulli Scheme and Generalizations of the Fibonacci Numbers”, *Vestnik SPbSU., Series 1*, issue 4, 1–3 (2014) [in Russian].

20. Sato K.-I., *Levý Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge studies in advanced mathematics* **68** (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999).

Для цитирования: Русаков О. В. Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна—Уленбека // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 247–257. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.208

For citation: Rusakov O. V. Pseudo-poissonian processes with stochastic intensity and a class of processes which generalize the Ornstein—Uhlenbeck process. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 247–257. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.208