УДК 531.36:534.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 2
MSC 34C55

УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

Т. Е. Звягинцева, В. А. Плисс

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье рассматривается двумерная система автоматического управления, которая содержит один гистерезисный элемент общего вида. Системы такого типа являются математическими моделями реальных систем управления и рассматривались во многих публикациях по данной тематике. В работе построено фазовое пространство системы, представляющее собой многообразие с краем. Сформулированы условия, при выполнении которых система является глобально устойчивой в определенном смысле. При этом использовано понятие «скользящего режима». Библиогр. 16 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: система с гистерезисом, глобальная устойчивость, скользящий режим.

Введение. Системы дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями играют важную роль при исследовании целого ряда прикладных задач. Они используются для описания динамики в инженерных задачах, в задачах теории управления техническими устройствами, в робототехнике и во многих разделах физики, механики, химии. Изучению различных свойств решений таких систем посвящено большое количество работ начиная с сороковых годов прошлого столетия (например, [1–11]). В настоящее время интерес к исследованию систем с различными типами гистерезиса не ослабевает, что объясняется появлением новых прикладных задач и проблем в теории автоматического управления (например, [12–14]).

Для изучения устойчивости стационарного множества таких систем широко применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, частотные методы и второй метод Ляпунова. Новые результаты и обширную библиографию по данной тематике можно найти, например, в монографии Г. А. Леонова, М. М. Шумафова, В. А. Тешева [14], в которой даны частотные критерии устойчивости и стабилизации систем с гистерезисными нелинейностями, а также исследована устойчивость некоторых конкретных динамических систем с нелинейностями такого типа.

В данной статье мы рассматриваем двумерную систему автоматического управления, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент общего вида. Подобные системы являются математическими моделями реальных систем управления и рассматривались во многих публикациях, например, в работах [3–10, 12–14]. В этой работе мы сформулируем условия, при выполнении которых рассматриваемая система является глобально устойчивой в определенном смысле. При этом мы будем использовать понятие «скользящего режима», теория которого разработана в книге А. Ф. Филиппова [15].

1. Постановка задачи, определение фазового пространства. Глобально притягивающее множество системы. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi(\sigma), \end{cases} \tag{1}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

где $\sigma = ay + bx$, $\varphi(\sigma)$ — гистерезисная нелинейность с характеристикой, представленной на рис. 1.

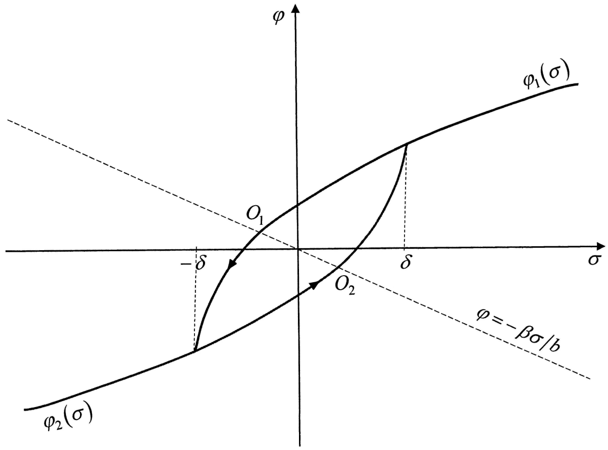

Рис. 1.

Строгое общее определение гистерезисных нелинейностей дано в работах [5, 6, 11]. В нашем случае гистерезисная функция $\varphi(\sigma)$ состоит из двух ветвей однозначных функций:

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\delta > 0$, $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ — непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции, $\varphi_1(\sigma) = -\varphi_2(-\sigma)$ для всех $\sigma \geq -\delta$, $\varphi_1(\pm\delta) = \varphi_2(\pm\delta)$.

Направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: точка $(\sigma, \varphi(\sigma))$ движется по кривой $\{(\sigma, \varphi_1(\sigma)),\ \sigma \in [-\delta, \delta]\}$, если σ убывает с ростом t, и по кривой $\{(\sigma, \varphi_2(\sigma)),\ \sigma \in [-\delta, \delta]\}$, если σ возрастает с ростом t.

В этой работе будем предполагать, что $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, $b > 0$, $\varphi_1'(\sigma) \geq -\alpha/a$, и существует единственное значение $\xi_1 \in (-\delta, \delta)$, такое что $\beta\xi_1 + b\varphi_1(\xi_1) = 0$, $\beta\sigma + b\varphi_1(\sigma) > 0$ при $\sigma > \xi_1$, и $\beta\sigma + b\varphi_1(\sigma) < 0$ при $-\delta < \sigma < \xi_1$ (рис. 1).

Сначала опишем фазовое пространство P системы (1), которое представляет собой многообразие с краем и состоит из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

На листе $P_1 = \left\{(x, y) : \sigma \geq -\delta,\ \dot\sigma \big|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \leq 0\right\}$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot x = y, \\ \dot y = -\alpha y - \beta x - \varphi_1(\sigma), \end{cases} \tag{3}$$

$\dot\sigma = \dot\sigma_1 = a(-\alpha y - \beta x - \varphi_1(\sigma)) + by$ — производная $\sigma = ay + bx$ в силу системы (3).

На листе $P_2 = \left\{(x, y) : \sigma \leq \delta,\ \dot\sigma \big|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \geq 0\right\}$ система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot x = y, \\ \dot y = -\alpha y - \beta x - \varphi_2(\sigma), \end{cases} \tag{4}$$

где $\dot\sigma = \dot\sigma_2 = a(-\alpha y - \beta x - \varphi_2(\sigma)) + by$ — производная σ в силу системы (4).

Фазовая точка с листа P_1 на лист P_2 переходит по лучу

$$L_1 = \{(x, y) : \sigma = -\delta,\ \dot\sigma = \dot\sigma_1 \leq 0\},$$

с листа P_2 на P_1 — по лучу

$$L_2 = \{(x, y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 \geq 0\}.$$

Множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — край многообразия P,

$$\Gamma_j = \{(x, y) :\ \sigma \in (-\delta, \delta),\ \dot{\sigma}_j = 0\} \subset P_j, \quad j = 1, 2.$$

Согласно нашим предположениям система (1) имеет по одному положению равновесия на каждом из листов P_1 и P_2. Пусть O_1 и O_2 — положения равновесия систем (3) и (4) соответственно. Точка O_j имеет координаты $(\zeta_j,\, 0)$, где ζ_j — решение уравнения $\varphi_j\,(b\zeta_j) = -\beta\zeta_j$, $j = 1, 2$.

Решением системы (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\, y_0) \in P_1$ является решение системы (3) с этими же начальными данными. Траектория этого решения при $t > \tau_0$ либо стремится при $t \to +\infty$ к положению равновесия O_1 системы (3), либо достигает в конечный момент времени множества Γ_1, либо при некотором $t = \tau_1 > \tau_0$ выходит на луч L_1 в точке $(x_1,\, y_1)$. В последнем случае решение (1) продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (4) с начальными данными $(\tau_1,\ x_1,\, y_1)$.

Аналогично определяется решение системы (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\, y_0) \in P_2$.

Перейдем в системе (1) к новым переменным.

Сначала перейдем к переменным $(x,\ \sigma)$ и заменим t на at:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma - bx, \\ \dot{\sigma} = (-\alpha a + b)\,\sigma - \left(a^2\beta - \alpha ab + b^2\right) x - a^2\varphi\,(\sigma)\,. \end{array} \right. \tag{5}$$

Тогда будем иметь

$$\ddot{\sigma} = (-\alpha a + b)\,\dot{\sigma} - \left(a^2\beta - \alpha ab + b^2\right)\dot{x} - a^2\varphi'\,(\sigma)\,\dot{\sigma} \tag{6}$$

и

$$x = \frac{1}{a^2\beta - \alpha ab + b^2}\left((-\alpha a + b)\,\sigma - a^2\varphi\,(\sigma) - \dot{\sigma}\right).$$

Подставим последнее равенство в первое уравнение системы (5):

$$\dot{x} = \sigma - \frac{b}{a^2\beta - \alpha ab + b^2}\left((-\alpha a + b)\,\sigma - a^2\varphi\,(\sigma) - \dot{\sigma}\right). \tag{7}$$

Из (6), (7) следует равенство

$$\ddot{\sigma} = -a\,(\alpha + a\varphi'\,(\sigma))\,\dot{\sigma} - a^2\,(\beta\sigma + b\varphi\,(\sigma))\,,$$

и система (5) эквивалентна уравнению

$$\ddot{\sigma} + f\,(\sigma)\,\dot{\sigma} + G\,(\sigma) = 0, \tag{8}$$

где

$$f\,(\sigma) = a\,(\alpha + a\varphi'\,(\sigma)) = \left\{ \begin{array}{ll} f_1\,(\sigma)\,, & \text{если}\ \ \sigma \geq -\delta, \\ f_2\,(\sigma)\,, & \text{если}\ \ \sigma \leq \delta, \end{array} \right.$$

$$G(\sigma) = a^2(\beta\sigma + b\varphi(\sigma)) = \begin{cases} G_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ G_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta. \end{cases}$$

Сделаем в уравнении (8) замену переменных, предложенную Льенаром [16]. Понизим порядок уравнения, считая σ новой независимой переменной, а $v(\sigma) = \dot{\sigma}$ — новой неизвестной функцией. Тогда уравнение принимает вид

$$v\frac{dv}{d\sigma} + f(\sigma)v + G(\sigma) = 0. \tag{9}$$

Замена $u = v + F(\sigma)$, где $F(\sigma) = a(\alpha\sigma + a\varphi(\sigma)) = \begin{cases} F_1(\sigma), & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ F_2(\sigma), & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$ ($F_j(\sigma)$ — первообразная $f_j(\sigma)$, $j = 1, 2$) приводит (9) к виду

$$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{G(\sigma)}{u - F(\sigma)}. \tag{10}$$

Далее будем рассматривать эквивалентную уравнению (10) систему

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - F(\sigma), \\ \dot{u} = -G(\sigma). \end{cases} \tag{11}$$

Из сделанных выше предположений следуют равенства $F_1(\sigma) = -F_2(-\sigma)$ и $G_1(\sigma) = -G_2(-\sigma)$ для всех $\sigma \geq -\delta$, $F_1(\pm\delta) = F_2(\pm\delta)$, $G_1(\pm\delta) = G_2(\pm\delta)$, $F_1'(\sigma) \geq 0$ при $\sigma \geq -\delta$. Фазовая поверхность системы (11) тоже является многообразием с краем, которое состоит из двух листов $P = P_1 \cup P_2$ и аналитически задается аналогично тому, как это было сделано для системы (1). Переход фазовой точки с одного листа на другой осуществляется по лучам перехода L_1, L_2.

Система (11) имеет по одному положению равновесия на каждом из листов: положение равновесия O_j на листе P_j имеет координаты (ξ_j, η_j), где $\xi_j = b\zeta_j \in (-\delta, \delta)$, $G_j(\xi_j) = 0$, $\eta_j = F(\xi_j)$. Кроме того, выполняются неравенства $G_1(\sigma) > 0$ при $\sigma > \xi_1$ и $G_1(\sigma) < 0$ при $-\delta < \sigma < \xi_1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_1^+ = \Gamma_1 \cap \{(\sigma, u) : -\delta < \sigma \leq \xi_1\}, \quad \Gamma_2^+ = \Gamma_2 \cap \{(\sigma, u) : \xi_2 \leq \sigma < \delta\}.$$

Пусть $S = 2\int_{-\delta}^{\delta} G_1(\sigma)\,d\sigma$. Заметим, что $S = 2a^2b\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_1(\sigma)\,d\sigma$ — площадь петли гистерезиса, умноженная на коэффициент a^2b.

Теорема 1. *Если выполнено неравенство*

$$S < (F_1(\xi_1) + F_1(\delta))^2, \tag{12}$$

то любая траектория системы (11) при увеличении времени попадает на одну из дуг Γ_1^+, Γ_2^+.

Доказательство. Рассмотрим на множестве $\Omega_1 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma \geq \xi_1\}$ линии уровня функции Ляпунова

$$V_1(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\sigma))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(\sigma)\,d\sigma. \tag{13}$$

Производная функции (13) в силу системы (11) $\dot{V}_1(\sigma, u) = -F_1'(\sigma)(u - F_1(\sigma))^2$ отрицательна на Ω_1. Также рассмотрим на множестве $\Omega_2 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma \leq \xi_1\}$ линии уровня функции

$$V_2(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\xi_1))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(\sigma)\, d\sigma. \tag{14}$$

Производная функции (14) в силу системы (11) $\dot{V}_2(\sigma, u) = -G_1(\sigma)(F_1(\sigma) - F_1(\xi_1))$ отрицательна на Ω_2.

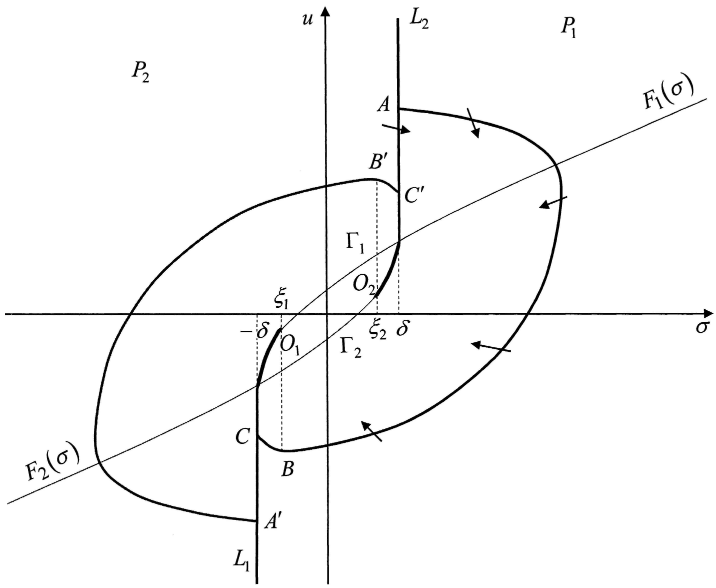

Рис. 2.

Построим на фазовой поверхности семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых. Траектории системы (11) пересекают эти кривые «снаружи внутрь».

Линия уровня функции V_1, проходящая через произвольную точку $A(\delta, u_1)$ на луче L_2 $(u_1 \geq F_1(\delta))$, пересекает луч $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1,\ u \leq \eta_1\}$ в некоторой точке $B(\xi_1, u_2)$. Линия уровня функции V_2, проходящая через $B(\xi_1, u_2)$, либо попадает на луч L_1 в некоторой точке $C(-\delta, u_3)$ (рис. 2), либо достигает края Γ_1 листа P_1 в некоторой точке $D(\sigma_3, F_1(\sigma_3))$, где $\sigma_3 \in (-\delta, \xi_1)$ (рис. 3).

Если $u_1 \geq \bar{u}$, где $\bar{u} = F_1(\delta) + \sqrt{(F_1(\xi_1) + F_1(\delta))^2 - S}$, то линия уровня V_2, проходящая через точку B попадает на L_1 в точке C. При этом

$$u_3 = F_1(\xi_1) - \sqrt{(u_1 - F_1(\delta))^2 + S}.$$

Покажем, что $u_3 > -u_1$ для всех $u_1 \geq \bar{u}$. Для этого рассмотрим функцию

$$R(u_1) = u_1 + F_1(\xi_1) - \sqrt{(u_1 - F_1(\delta))^2 + S}. \tag{15}$$

Легко показать, что $R(u_1)$ возрастает $(dR/du_1 \geq 0)$ и $R(\bar{u}) = F_1(-\delta) = -F_1(\delta)$ при выполнении условия (12). Следовательно, $u_3 > -u_1$, и кривая ABC на листе P_1,

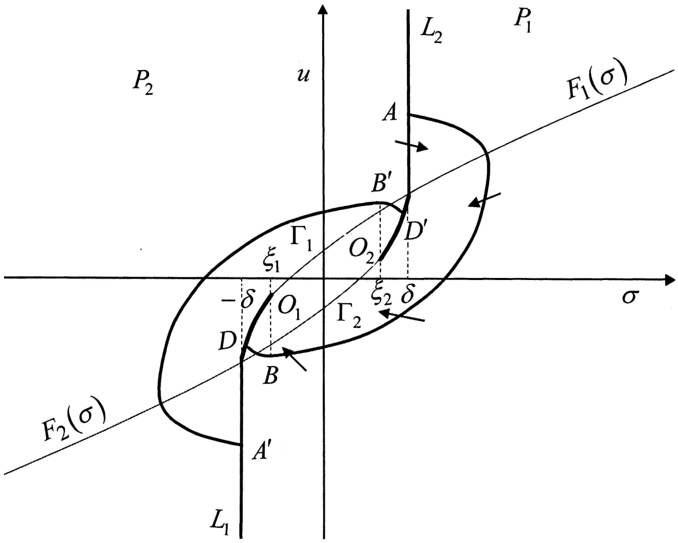

Рис. 3.

симметричная ей кривая $A'B'C'$ на листе P_2 и отрезки CA' и AC' (рис. 2) составляют замкнутый контур, который траектории системы (11) пересекают «снаружи внутрь».

Если $F_1(\delta) \le u_1 < \bar{u}$, то линия уровня функции V_2, проходящая через точку B, достигает Γ_1 в точке D, и описанную выше кривую $ABD \subset P_1$ траектории системы (11) тоже пересекают «снаружи внутрь».

В точках (σ, u) кривой Γ_1 имеем следующее направление поля: $\dot\sigma = 0$, $\dot u > 0$, если $-\delta < \sigma < \xi_1$, и $\dot u < 0$, если $\xi_1 < \sigma < \delta$. Следовательно, траектории системы (11) на листе P_1 с начальными данными, лежащими внутри множества T_1, ограниченного кривыми ABD и Γ_1 и отрезком $\{(\delta, u) : F_1(\delta) \le u \le u_1\}$ (рис. 3), достигают края многообразия P в точках множества $\Gamma_1 \cap \{(\sigma, u) :\ -\delta < \sigma \le \xi_1\}$.

В силу симметрии поля все траектории системы (11) на листе P_2 с начальными данными внутри множества T_2, симметричного T_1, достигают края многообразия P в точках множества $\Gamma_2 \cap \{(\sigma, u) :\ \xi_2 \le \sigma < \delta\}$.

Таким образом, траектории системы (11) с любыми начальными данными достигают края многообразия P в точках множества Γ^+.

Теорема доказана.

2. Поведение решений системы при достижении края фазового пространства. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда любое решение системы (11) попадает за конечное время на одну из дуг $\Gamma_1^+ \setminus \{O_1\}$, $\Gamma_2^+ \setminus \{O_2\}$ или, может быть, стремится при $t \to +\infty$ к одному из состояний равновесия O_1, O_2.

Рассмотрим поведение решений системы (11), попадающих за конечное время, например, на дугу $\Gamma_1^+ \setminus \{O_1\}$.

Пусть решение $(\sigma(t),\ u(t))$ с начальными условиями $t = t_0$, $(\sigma_0,\ u_0) \in P_1$ при $t = t_1 \ge t_0$ попадает на Γ_1^+ в некоторой точке $M_1(\sigma_1,\ F_1(\sigma_1))$, $-\delta < \sigma_1 < \xi_1$. Обозначим через γ_{M1} вектор поля системы (11) в точке M_1, координаты этого вектора: $(0,\ -G_1(\sigma_1))$, где $-G_1(\sigma_1) > 0$ при $-\delta < \sigma_1 < \xi_1$.

Согласно теории скользящих режимов, развитой в книге А.Ф. Филиппова [15], траектория этого решения $(\sigma(t),\ u(t))$ не останавливается в точке M_1, а «по инерции» проходит по направлению вектора γ_{M1} на величину $\delta_1 |\gamma_{M1}|$, где δ_1 — достаточно малое положительное число, $|\gamma_{M1}|$ — длина вектора γ_{M1}, и попадает в точку M_2 с координатами $(\sigma_2,\ u_2) = (\sigma_1,\ F_1(\sigma_1) - \delta G_1(\sigma_1)) \in P_2$ (рис. 4), после чего вступает в силу система (11) на листе P_2.

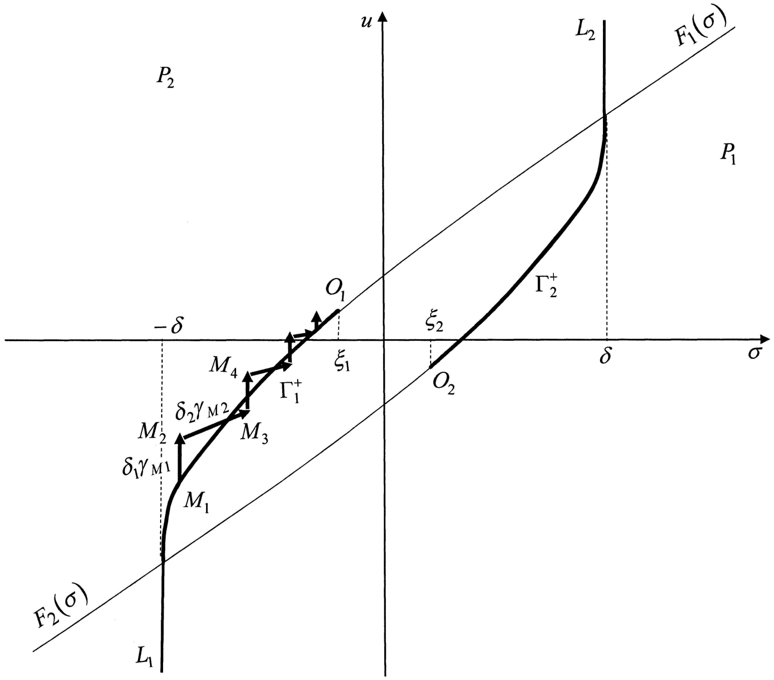

Рис. 4.

Пусть γ_{M2} — вектор поля системы (11) в точке $M_2 \in P_2$, координаты вектора γ_{M2}: $(u_2 - F_2(\sigma_2),\ -G_2(\sigma_2))$, где $u_2 - F_2(\sigma_2) > 0$, $-G_2(\sigma_2) > 0$ при $-\delta < \sigma_2 < \xi_1$ и малом δ_1. Если угол наклона вектора γ_{M2} в точке M_2 меньше угла наклона касательной к кривой Γ_1 в точке M_1, то есть при $\sigma = \sigma_1$ выполнено условие

$$F_1'(\sigma) > \frac{G_1(-\sigma)}{F_1(\sigma) + F_1(-\sigma)}, \tag{16}$$

то траектория системы (11), двигаясь «по инерции» в направлении вектора γ_{M2} на величину $\delta_2 |\gamma_{M2}|$, где δ_2 — достаточно малое положительное число, $\delta_2 < \delta_1$, пересечет дугу Γ_1 и попадет в некоторую точку $M_3(\sigma_3,\ u_3) \in P_1$ внутри петли гистерезиса. После этого снова вступает в силу система (11) на листе P_1, и процесс повторяется при выполнении условия (16) для $\sigma = \sigma_3$.

Таким образом, в системе (11) возникает скользящий режим. Условие его наличия в системе заключается в том, что в каждой точке $M(\sigma,\ F_1(\sigma)) \in \Gamma_1^+$ угол наклона векторного поля системы (11) на листе P_2 меньше угла наклона касательной к кривой $\Gamma_1^+ \subset P_1$, что и реализуется при выполнении условия (16) для каждого $\sigma \in (-\delta,\ \xi_1)$. При этом фазовая точка непрерывно переходит с траектории системы (11) на листе P_1 на траекторию этой системы на листе P_2 и обратно, как бы скользя вдоль линии переключения Γ_1^+. Число переключений стремится к бесконечности при $t \to +\infty$, и точка текущего состояния системы асимптотически приближается к состоянию равновесия O_1.

Поведение решений системы (11), попадающих за конечное время на дугу $\Gamma_2^+ \setminus \{O_2\}$, аналогично: при $t \to +\infty$ фазовая точка скользит вдоль линии переключения Γ_2^+ и стремится к состоянию равновесия O_2.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (12) и для каждого $\sigma \in (-\delta, \xi_1)$ верно неравенство (16), тогда любое решение системы (11) при $t \to +\infty$ стремится к одному из состояний равновесия O_1, O_2.*

Это и означает, что система (11) глобально устойчива.

Литература

1. *Андронов А. А., Баутин Н. Н.* Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования // Доклады АН СССР. 1945. Т. 46, № 7. С. 304–306.

2. *Фельдбаум А. А.* Простейшие релейные системы автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1949. № 10. С. 249–260.

3. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / под ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука, 1975. 447 с.

4. *Попов В. М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1961. № 8. С. 961–973.

5. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 288–291.

6. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // Автоматика и телемеханика. 1967. № 6. С. 5–30.

7. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. 1965. № 9. С. 753–768.

8. *Барабанов Н. Е., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // Автоматика и телемеханика. 1979. № 12. С. 5–11.

9. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

10. *Цыпкин Я. З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.

11. *Красносельский М. А. Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.

12. *Камачкин А. М., Шамберов В. Н.* Отыскание периодических решений в нелинейных динамических системах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2002. 86 с.

13. *Шумафов М. М.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. 4. 2012. № 3(106). С. 1–12.

14. *Леонов Г. А., Шумафов М. М., Тешев В. А.* Устойчивость систем с гистерезисом. Майкоп: Изд-во Адыгейского гос. ун-та, 2012. 178 с.

15. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

16. *Немыцкий В. В, Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 448 с.

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Звягинцева Татьяна Евгеньевна — кандидат физико-математических наук, доцент; zv_tatiana@mail.ru

Плисс Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, профессор; vapliss@yandex.ru

CONDITIONS FOR THE GLOBAL STABILITY OF A SINGLE SYSTEM WITH HYSTERESIS NONLINEARITY

Tatiana E. Zviagitceva, Viktor A. Pliss

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; zv_tatiana@mail.ru, vapliss@yandex.ru

In this paper, a two-dimensional automatic control system containing a single nonlinear hysteresis element of the general form is considered. Such systems represent mathematical models for real control systems, and have been considered in many papers on the subject. A system phase space, which is a manifold with boundary, is established. The conditions needed for the considered system to be globally stable, in a certain sense, are derived. A notion of "sliding mode" is used in this paper. Refs 16. Figs 4.

Keywords: system with hysteresis, global stability, sliding mode.

References

1. Andronov A. A., Bautin N. N., "A degenerate case of the general problem of direct regulation", *Doklady Akademii Nauk SSSR* **46**(7), 304–306 (1945) [in Russian].

2. Fel'dbaum A. A., "Simple relay automatic control system", *Avtomatika i telemekhanika* (10), 249–260 (1949) [in Russian].

3. "Methods for the study of nonlinear systems of automatic control" (ed. by R. A. Nelepin, Nauka Publ., Moscow, 1975, 447 p.) [in Russian].

4. Popov V. M., "Absolute stability of nonlinear systems of automatic control", *Avtomatika i telemekhanika* (8), 961–973 (1961) [in Russian].

5. Yakubovich V. A., "Frequency conditions for the absolute stability of controlled systems with hysteresis nonlinearities", *Doklady Akademii Nauk SSSR* **149**(2), 288–291 (1963) [in Russian].

6. Yakubovich V. A., "Frequency conditions for the absolute stability of control systems with multiple non-linear or linear non-stationary units", *Avtomatika i telemekhanika* (6), 5–30 (1967) [in Russian].

7. Yakubovich V. A., "The method of matrix inequalities in the theory of stability of nonlinear controlled systems. III. Absolute stability of systems with hysteresis nonlinearities", *Avtomatika i telemekhanika* (9), 753–768 (1965) [in Russian].

8. Barabanov N. E., Yakubovich V. A., "Absolute stability of control systems with one hysteresis nonlinearity", *Avtomatika i Telemehanika* (12), 5–11 (1979) [in Russian].

9. Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A., "Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state" (Nauka Publ., Moscow, 1978, 400 p.) [in Russian].

10. Tsypkin Ya. Z., "The relay automatic system" (Nauka Publ., Moscow, 1974, 575 p.) [in Russian].

11. Krasnosel'skiy M. A., Pokrovskiy A. V., "Systems with hysteresis" (Nauka Publ., Moscow, 1983, 271 p.) [in Russian].

12. Kamachkin A. M., Shamberov V. N., "The determination of periodic solutions of nonlinear dynamical systems" (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2002, 86 p.) [in Russian].

13. Shumafov M. M., "Stability of systems of differential equations with hysteresis nonlinearities", *Vestnik of Adyghe State University. Series 4* **3**(106), 1–12 (2012) [in Russian].

14. Leonov G. A., Shumafov M. M., Teshev V. A., "Stability of systems with a hysteresis" (Adyghe State University Publ., Maikop, 2012, 182 p.) [in Russian].

15. Filippov A. F., "Differential equations with discontinuous right-hand side" (Nauka Publ., Moscow, 1985, 224 p.) [in Russian].

16. Nemitskii V. V., Stepanov V. V., "Qualitative theory of differential equations" (GITTL Publ., Moscow, Leningrad, 1947, 448 p.) [in Russian].

Для цитирования: Звягинцева Т. Е., Плисс В. А. Условия глобальной устойчивости одной системы с гистерезисной нелинейностью // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 227–235. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.206

For citation: Zviagitceva T. E., Pliss V. A. Conditions for the global stability of a single system with hysteresis nonlinearity. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 227–235. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.206