

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИМ МАТЕРИАЛОМ ДЖОНА*

В. М. Мальков, Ю. В. Малькова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получено точное аналитическое решение нелинейной плоской задачи для пластины с эллиптическим включением. На бесконечности заданы постоянные номинальные (условные) напряжения. Механические свойства пластины и включения моделируются гармоническим материалом Джона. Напряжения и перемещения выражены через две аналитические функции комплексной переменной, которые определяются из нелинейных граничных задач. Принятие гипотезы о постоянстве тензора номинальных напряжений в области включения позволило сложную задачу сопряжения двух упругих тел свести к решению двух более простых задач для пластины с эллиптическим отверстием. Справедливость гипотезы доказана тем фактом, что полученное решение точно удовлетворяет всем уравнениям и граничным условиям задачи. Установлено существование критических нагрузок сжатия пластины, при которых происходит потеря устойчивости материала. Решены частные задачи о пластине со свободным отверстием и о пластине с жестким включением. Библиогр. 13 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: нелинейная плоская задача, эллиптическое включение, гармонический материал Джона, метод комплексных функций.

Введение. Рассматриваемая модель гармонического материала Джона предложена в работе [1]. Она позволяет исследовать большие деформации реальных материалов, в частности эластомеров. В случае малых деформаций модель приводит к закону Гука. Теоретические решения некоторых задач, например, о растяжении резиновых листов с круговыми или эллиптическими отверстиями получили экспериментальное подтверждение [2]. Значительное развитие и применение модель материала Джона получила в работах [2–6] и других. Комплексная формулировка нелинейных плоских задач дана в работе [2], где изучались плоская деформация и плоское напряженное состояние пластины с эллиптическим отверстием для специального класса материалов Джона. Дальнейшее развитие комплексного метода содержится в работе [3], где рассмотрена неоднородная пластина с межфазной трещиной. Однако решение доведено до конца только для случая однородной пластины с трещиной. Комплексные уравнения нелинейных плоских задач для материала Джона, отличающиеся от ранее известных, даны в нашей работе [4]. Там же предложен метод решения, основанный на введении функций скачков напряжений и перемещений на межфазной границе двух полуплоскостей. С помощью этого метода получены точные решения задач для трещины и сосредоточенной силы на межфазной границе. Исследования проблемы межфазной трещины были продолжены в работе [5] для случая равномерного давления на берегах трещины. Впервые показано, что существуют критические давления, превышение которых ведет к потере устойчивости материала и большим напряжениям и перемещениям в окрестности трещины. В работе [6] исследована нелинейная задача эллиптического включения для материала Джона. Определено, что тензор номинальных напряжений постоянен в области включения при постоянных напряже-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00065).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

ниях на бесконечности. Ранее этот факт был известен в линейной задаче (см., например, [7]). Применяемый нами метод решения задачи об эллиптическом включении принципиально отличается от метода работы [6], есть различия и в самих результатах. Напряженное состояние неэллиптического включения не будет однородным, но его можно сделать однородным, если ввести промежуточный слой между включением и пластиной и подобрать его параметры [8]. Более детальный обзор по эллиптическим и другим включениям в пластину содержится в наших статьях [9, 10]. Задачи о межфазных трещинах для некоторых гармонических материалов исследовались в [11]. В работах [12, 13] методом комплексных потенциалов получены точные решения ряда задач нелинейной теории упругости о дислокациях и дисклинациях для полуплоскостного материала.

1. Основные уравнения. Комплексная форма уравнений равновесия и совместности плоской деформации в декартовых координатах (x_1, x_2) имеет вид [4]

$$(s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \quad (1.1)$$

$$(g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0, \quad (1.2)$$

где s_{kj} — компоненты тензора номинальных напряжений, g_{kj} — компоненты градиента деформации, штрих обозначает частные производные по декартовым координатам.

Обозначим комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций через $z = x_1 + ix_2$ и $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$; комплексную функцию номинальных напряжений через $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

Уравнения (1.1), (1.2) тождественно удовлетворяются при подстановке выражений

$$s_{11} + is_{12} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad s_{22} - is_{21} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \quad (1.3)$$

$$g_{11} + ig_{21} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad g_{22} - ig_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (1.4)$$

Комплексные функции σ и ζ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Функция ζ есть текущая координата точки тела. Физический смысл функции σ виден из формулы

$$\sigma = f_1 + if_2 = i \int (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const},$$

f_1, f_2 — проекции на оси координат главного вектора сил на дуге s , \mathbf{n} — нормаль к дуге.

2. Гармонический материал Джона. Рассматриваемая модель гармонического материала Джона определяется плотностью энергии деформации [3, 4]

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \quad I = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|, \quad J = \lambda_1 \lambda_2, \quad (2.1)$$

где λ_1, λ_2 — главные кратности удлинений, $F(I)$ — некоторая функция. Модель (2.1) применима только к плоской деформации ($\lambda_3 = 1$); для трехмерных задач, в частности для плоского напряженного состояния, она не подходит.

Из выражения (2.1) получим закон упругости для номинальных напряжений:

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \\ s_{22} - is_{21} &= 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка напряжений (2.2) в (1.3) дает два уравнения для функций ζ и σ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 4\mu \frac{1}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.3)$$

В работах [2–5, 10] использовалась модель материала (2.1) с функцией

$$2\mu F'(I) = \frac{1}{4b} \left[I + \sqrt{I^2 - 16bc} \right] > 0. \quad (2.4)$$

Постоянные b , c единственным образом определяются из условий перехода закона упругости (2.2) в закон Гука при малых деформациях:

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad c = \mu \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right), \quad (2.5)$$

λ , μ — постоянные Ляме. В работах [3, 6] постоянные b , c находились из других условий и отличаются от (2.5).

С принятием функции (2.4) решение уравнений (2.3) имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \zeta &= b \varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)}, \\ \sigma &= (1 - 2\mu b) \varphi(z) - 2\mu \overline{\psi(z)} - 2\mu \frac{cz}{\varphi'(z)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции от z .

Напряжения и деформации (1.3), (1.4) запишем через функции $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$:

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \varphi'(z) - 2\mu (g_{22} - ig_{12}), \\ s_{22} - is_{21} &= \varphi'(z) - 2\mu (g_{11} + ig_{21}), \\ g_{11} + ig_{21} &= b \varphi'(z) + \frac{c}{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} - \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)}, \\ g_{22} - ig_{12} &= b \varphi'(z) + \frac{c}{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} + \frac{cz \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ далее определяются из нелинейных граничных задач.

3. Упругое эллиптическое включение в пластину. На бесконечности заданы постоянные номинальные напряжения

$$s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

На контуре включения L выполняются условия непрерывности сил и перемещений:

$$[\sigma]_1 = [\sigma]_2, \quad [\zeta]_1 = [\zeta]_2, \quad z \in L.$$

Подставим сюда выражения (2.6) и получим

$$(1 - 2\mu_1 b_1) \varphi_1(z) - 2\mu_1 \overline{\psi_1(z)} - 2\mu_1 \frac{c_1 z}{\varphi_1'(z)} = (1 - 2\mu_2 b_2) \varphi_2(z) - 2\mu_2 \overline{\psi_2(z)} - 2\mu_2 \frac{c_2 z}{\varphi_2'(z)}, \quad (3.2)$$

$$b_1 \varphi_1(z) + \overline{\psi_1(z)} + \frac{c_1 z}{\varphi_1'(z)} = b_2 \varphi_2(z) + \overline{\psi_2(z)} + \frac{c_2 z}{\varphi_2'(z)},$$

индексы 1 и 2 относятся к областям включения и пластины соответственно.

Предположим, что напряженное состояние включения однородно (тензор номинальных напряжений постоянен). Комплексные функции этой области имеют вид

$$\varphi_1(z) = A_1 z, \quad \psi_1(z) = B_1 z, \quad (3.3)$$

где A_1, B_1 — неизвестные комплексные постоянные.

Найдем функции (2.6) и напряжения (2.7) для потенциалов (3.3):

$$\zeta = [b_1 A_1 + c_1 (\overline{A_1})^{-1}] z + \overline{B_1} \bar{z}, \quad \sigma = A_1 z - 2\mu_1 \zeta, \quad (3.4)$$

$$s_{11} + i s_{12} = A_1 - 2\mu_1 \left[b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} - \overline{B_1} \right], \quad s_{22} - i s_{21} = A_1 - 2\mu_1 \left[b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} + \overline{B_1} \right]. \quad (3.5)$$

Из первой формулы (3.4) следует важный вывод о том, что контур включения остается эллиптическим после деформации, а градиент деформации $\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ постоянен. Формулы (3.5) показывают, что тензоры номинальных напряжений $\mathbf{S} = s_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ и истинных напряжений Коши $\mathbf{T} = t_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ также постоянны. Последнее очевидно ввиду равенства $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{J} \mathbf{T}$, где $J = \det \mathbf{G}$.

Функции (3.3) подставим в уравнения (3.2):

$$(1 - 2\mu_2 b_2) \varphi_2(z) - 2\mu_2 \overline{\psi_2(z)} - 2\mu_2 \frac{c_2 z}{\varphi_2'(z)} = (1 - 2\mu_1 b_1) A_1 z - 2\mu_1 \overline{B_1} \bar{z} - 2\mu_1 \frac{c_1 z}{A_1}, \quad (3.6)$$

$$b_2 \varphi_2(z) + \overline{\psi_2(z)} + \frac{c_2 z}{\varphi_2'(z)} = b_1 A_1 z + \overline{B_1} \bar{z} + \frac{c_1 z}{A_1}.$$

Уравнения (3.6) представляют две граничные задачи (первую и вторую основные задачи) для аналитических функций $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$. Совместность решений обеспечивается выбором комплексных постоянных A_1 и B_1 .

Комплексную плоскость z отобразим на комплексную плоскость ξ :

$$z = \omega(\xi) = R(\xi + m \xi^{-1}), \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1. \quad (3.7)$$

Функция (3.7) отображает эллиптическое включение с разрезом между фокусами эллипса на отрезке $[-c_0, c_0]$ оси x_1 , где $c_0 = 2R\sqrt{m}$, на кольцо $\sqrt{m} \leq r \leq 1$ плоскости ξ . Пластина отображается на внешность единичного круга [9]. Из условия конформности отображения (3.7) следует $|\xi| > \sqrt{m}$. Выбором параметров R и m можно получить эллипсы любой формы и размера.

Положим $\xi = re^{i\theta}$, переменные (r, θ) являются полярными координатами плоскости ξ и криволинейными координатами плоскости z , причем окружностям $r = \text{const}$ соответствуют софокусные эллипсы, а лучам $\theta = \text{const}$ — софокусные гиперболы.

Номинальные напряжения в базисе криволинейных координат (r, θ) таковы:

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}e^{-2i\gamma}, \quad s_{\theta\theta} - is_{r\theta} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}e^{-2i\gamma}, \quad e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\xi\omega'(\xi)}}{\xi\omega'(\xi)}. \quad (3.8)$$

Положим $\varphi(z) = \varphi(\xi) = \varphi(\omega(\xi))$, $\psi(z) = \psi(\xi) = \psi(\omega(\xi))$.

В функциях $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ отделим неголоморфные и голоморфные части:

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= Az + \varphi_0(z), & \psi_2(z) &= Bz + \psi_0(z), \\ \varphi_2(\xi) &= AR\xi + \varphi_0(\xi), & \psi_2(\xi) &= BR\xi + \psi_0(\xi), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\varphi_0(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ являются голоморфными функциями в бесконечной области. Комплексные постоянные A и B определяются из условий на бесконечности (3.1):

$$\begin{aligned} A - 4\mu_2^2(\bar{A})^{-1} &= 2(1 - \nu_2)[(s_{11} + is_{12})^\infty + (s_{22} - is_{21})^\infty], \\ 4\mu_2\bar{B} &= (s_{11} + is_{12})^\infty - (s_{22} - is_{21})^\infty. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Первое уравнение (3.10) имеет два решения. Если напряжения на бесконечности отсутствуют, тогда имеем равенство $A = 2\mu_2$, этому условию удовлетворяет решение

$$A = \left[(1 - \nu_2) + \sqrt{(1 - \nu_2)^2 + 4\mu_2^2/|s|^2} \right] s, \quad s = (s_{11} + is_{12})^\infty + (s_{22} - is_{21})^\infty.$$

Перейдем в граничных условиях (3.6) к переменной ξ :

$$\begin{aligned} (1 - 2\mu_2b_2)\varphi_2(\xi) - 2\mu_2\overline{\psi_2(\xi)} - 2\mu_2c_2\frac{\omega(\xi)\overline{\omega'(\xi)}}{\varphi_2'(\xi)} &= \\ &= \left[(1 - 2\mu_1b_1)A_1 - 2\mu_1\frac{c_1}{A_1} \right] \omega(\xi) - 2\mu_1\bar{B}_1\overline{\omega(\xi)}, \\ b_2\varphi_2(\xi) + \overline{\psi_2(\xi)} + c_2\frac{\omega(\xi)\overline{\omega'(\xi)}}{\varphi_2'(\xi)} &= \left[b_1A_1 + \frac{c_1}{A_1} \right] \omega(\xi) + \bar{B}_1\overline{\omega(\xi)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение уравнений (3.11) затруднено тем, что функция $\omega(\xi)\overline{\omega'(\xi)}/\varphi_2'(\xi)$, входящая в них, не является голоморфной ни в области $|\xi| < 1$, ни в области $|\xi| > 1$. Преобразуем эту функцию, выделив голоморфную часть в области $|\xi| < 1$, потом функции $\varphi_2(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ заменим выражениями (3.8), обозначив $\xi = t = e^{i\theta}$ на контуре отверстия. В итоге придем к граничным задачам для голоморфных функций $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$:

$$(1 - 2\mu_2b_2)\varphi_0(t) - 2\mu_2\overline{\psi_0(t)} - 2\mu_2c_2\overline{\phi(t)} = f_0(t), \quad (3.12)$$

$$b_2\varphi_0(t) + \overline{\psi_0(t)} + c_2\overline{\phi(t)} = g_0(t), \quad (3.13)$$

$$f_0(t) = C_1t + D_1t^{-1}, \quad g_0(t) = C_2t + D_2t^{-1},$$

$$C_1 = \left[(1 - 2\mu_1b_1)A_1 - 2\mu_1\frac{c_1}{A_1} - 2\mu_1m\bar{B}_1 - (1 - 2\mu_2b_2)A \right] R,$$

$$D_1 = \left[\left((1 - 2\mu_1 b_1) A_1 - 2\mu_1 \frac{c_1}{A_1} - 2\mu_1 \overline{B}_1 \right) m + 2\mu_2 \overline{B} + 2\mu_2 c_2 \frac{m}{A} \right] R, \quad (3.14)$$

$$C_2 = \left[b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} + m \overline{B}_1 - bA \right] R, \quad D_2 = \left[\left(b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} \right) m + \overline{B}_1 - \overline{B} - c_2 \frac{m}{A} \right] R.$$

Решение граничной задачи (3.12) таково:

$$(1 - 2\mu_2 b_2) \varphi_0(\xi) = D_1 \frac{1}{\xi}, \quad 2\mu_2 \psi_0(\xi) = \overline{C}_1 \frac{1}{\xi} - 2\mu_2 c_2 \phi(\xi). \quad (3.15)$$

Решение граничной задачи (3.13) следующее:

$$b_2 \varphi_0(\xi) = D_2 \frac{1}{\xi}, \quad \psi_0(\xi) = -\overline{C}_2 \frac{1}{\xi} - c_2 \phi(\xi). \quad (3.16)$$

Функция

$$\phi(\xi) = \frac{\overline{\omega}(1/\xi) \omega'(1/\xi)}{AR + \varphi_0'(1/\xi)} - \frac{m}{A} R \xi.$$

голоморфна при $|\xi| > 1$: $\phi(\xi) = O(\xi^{-2})$, $|\xi| \rightarrow \infty$.

Условия равенства функций $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$ в формулах (3.15), (3.16) дают два алгебраических уравнения для постоянных:

$$b_2 D_1 = (1 - 2\mu_2 b_2) D_2, \quad C_1 = -2\mu_2 C_2.$$

Заменим постоянные C_1 , C_2 , D_1 , D_2 выражениями (3.14):

$$b_2 m A_1 - m [1 - 2(\mu_2 - \mu_1) b_2] \left(b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} \right) = [1 - 2(\mu_2 - \mu_1) b_2] \overline{B}_1 - c_2 \frac{m}{A} - \overline{B}, \quad (3.17)$$

$$A_1 + 2(\mu_2 - \mu_1) \left(b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} + m \overline{B}_1 \right) = A.$$

Из первого уравнения (3.17) постоянную \overline{B}_1 выразим через другие постоянные:

$$\overline{B}_1 = \frac{1}{1 - 2(\mu_2 - \mu_1) b_2} \left(b_2 m A_1 + c_2 \frac{m}{A} + \overline{B} \right) - m \left(b_1 A_1 + \frac{c_1}{A_1} \right).$$

Подставим \overline{B}_1 во второе уравнение (3.17), в результате получим

$$\alpha A_1 + \beta \overline{A}_1^{-1} = \tau, \quad (3.18)$$

где

$$\alpha = 1 + 2(\mu_2 - \mu_1)(1 - m^2) b_1 + \frac{2(\mu_2 - \mu_1) b_2}{1 - 2(\mu_2 - \mu_1) b_2} m^2,$$

$$\beta = 2(\mu_2 - \mu_1)(1 - m^2) c_1, \quad \tau = A - \frac{2(\mu_2 - \mu_1) m}{1 - 2(\mu_2 - \mu_1) b_2} \left(\frac{c_2 m}{A} + \overline{B} \right).$$

Уравнение (3.18) имеет два решения

$$A_1 = \frac{1}{2\alpha} \left[\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \frac{4\alpha\beta\tau^2}{|\tau|^2}} \right]. \quad (3.19)$$

При отсутствии напряжений на бесконечности имеем $A = 2\mu_2$, $A_1 = 2\mu_1$, $B = B_1 = 0$. Этим условиям удовлетворяет решение (3.19) со знаком плюс.

В случае свободного отверстия или жесткого включения соответственно получаем

$$(1 - 2\mu_2 b_2)\varphi_0(\xi) = 2\mu_2 [\bar{B} + c_2 m(\bar{A})^{-1}] R \frac{1}{\xi}, \quad 2\mu_2 \psi_0(\xi) = -(1 - 2\mu_2 b_2) \bar{A} R \frac{1}{\xi} - 2\mu_2 c_2 \phi(\xi).$$

$$b_2 \varphi_0(\xi) = -(\bar{B} + c_2 \frac{m}{A}) R \frac{1}{\xi}, \quad \psi_0(\xi) = (1 - b_2 \bar{A}) R \frac{1}{\xi} - c_2 \phi(\xi).$$

4. Вычисление номинальных напряжений. Номинальные напряжения в криволинейных координатах (r, θ) находятся по формулам (3.8). Для включения получаем формулы

$$(s_{rr} + i s_{r\theta})_1 = \frac{1}{4(1 - \nu_1)} \left(A_1 - 4\mu_1^2 \frac{1}{A_1} \right) + 2\mu_1 \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}, \quad (4.1)$$

$$(s_{\theta\theta} - i s_{\theta r})_1 = \frac{1}{4(1 - \nu_1)} \left(A_1 - 4\mu_1^2 \frac{1}{A_1} \right) - 2\mu_1 \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}.$$

Важное практическое значение имеют напряжения на контуре включения, поскольку они определяют прочность соединения. Напряжения $(s_{rr} + i s_{r\theta})$ непрерывны на контуре: $(s_{rr} + i s_{r\theta})_1 = (s_{rr} + i s_{r\theta})_2$, а напряжения $(s_{\theta\theta} - i s_{\theta r})$ имеют разрыв. Возьмем сумму напряжений (3.8), чтобы получить простую формулу для окружных и касательных напряжений на контуре пластины,

$$(s_{\theta\theta} - i s_{\theta r})_2 = \frac{1}{2(1 - \nu_2)} \left(\frac{\varphi'_2(\xi)}{\omega'(\xi)} - 4\mu_2^2 \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{\varphi'_2(\xi)} \right) - (s_{rr} + i s_{r\theta})_1. \quad (4.2)$$

Выполнены расчеты номинальных окружных напряжений на контуре эллипса. Эти напряжения различны для включения и пластины. Параметры эллиптического включения: $a_0 = 3$ см, $b_0 = 1$ см, $R = 2$ см, $m = 0.5$. Рассмотрены два варианта параметров материалов: 1) $\mu_1 = 1$ МПа, $\mu_2 = 3$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,4902$; 2) $\mu_1 = 3$ МПа, $\mu_2 = 1$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,4902$. В качестве внешней нагрузки взято: одноосное растяжение или сжатие вдоль осей x_1 ($s_{11}^\infty = p$) и x_2 ($s_{22}^\infty = q$), всестороннее (двуосное) растяжение или сжатие ($s_{11}^\infty = s_{22}^\infty = p = q$).

Результаты расчетов представлены на рис. 1–3. Сплошными и пунктирными линиями показаны напряжения пластины для первого и второго вариантов параметров; линиями с квадратами и треугольниками — напряжения включения для тех же параметров. Размерность напряжений — кг/см². Графики, расположенные слева, относятся к растяжению пластины, справа — к сжатию, угол $\theta \in [0, \pi]$.

Заключение. В линейной задаче напряжения при растяжении и сжатии пластины отличаются только знаком. В нелинейной задаче эти напряжения отличаются не только знаком, но и величиной. Из сравнения напряжений на рис. 1 и 2 видно, что разница в некоторых случаях достигает 50%. Важный результат представлен на рис. 3 (правая часть). При сжатии пластины произошла потеря устойчивости материала для первого варианта параметров, где справедливо неравенство $\mu_1 < \mu_2$. Напряжения значительно увеличились по абсолютной величине и перестали быть симметричными относительно оси x_2 . Такой же результат получался и при одноосном сжатии

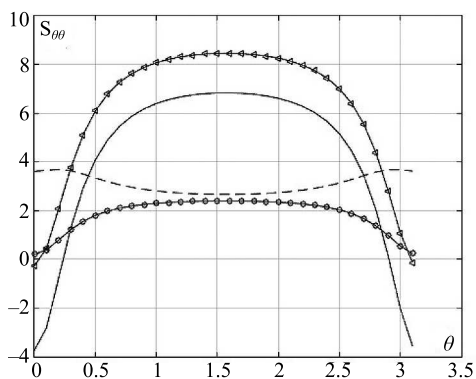


Рис. 1. Растяжение (сжатие) вдоль оси x_1 при $p = \pm 0.5$ МПа.

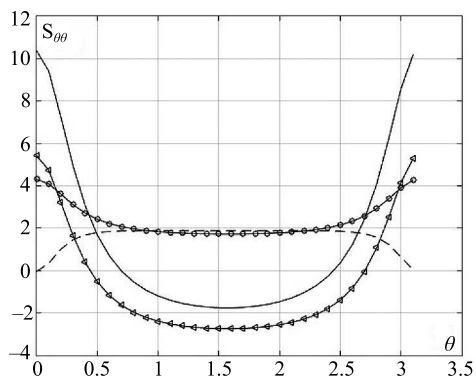
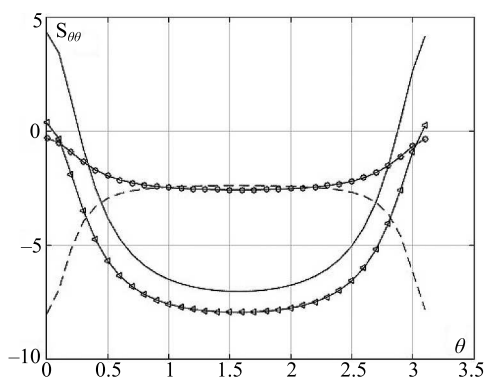


Рис. 2. Растяжение (сжатие) вдоль оси x_2 при $q = \pm 0.5$ МПа.

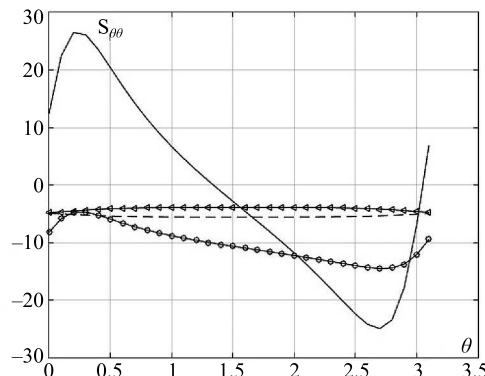
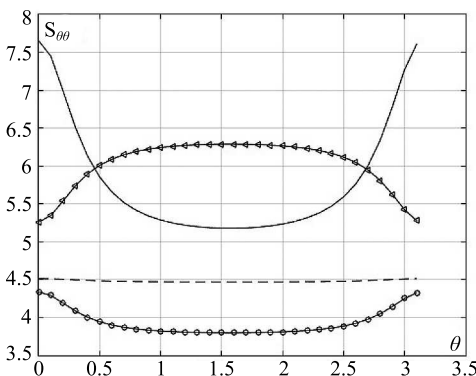
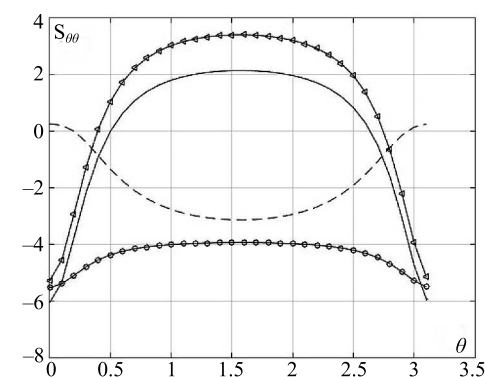


Рис. 3. Всестороннее растяжение (сжатие) при $p = q = \pm 0.5$ МПа.

пластины вдоль осей эллипса, причем при сжатии вдоль малой оси критическая нагрузка была меньше, чем при сжатии вдоль большой оси. Критические нагрузки при одноосном сжатии были больше, чем при двuosном, и на рис. 1, 2 не представлены. Потеря устойчивости возможна только в случае, если жесткость включения меньше жесткости пластины, т. е. при $\mu_1 < \mu_2$. Критические нагрузки находятся из уравнения $\tau^2 - 4\alpha\beta = 0$. Превышение критических нагрузок приводит к тому, что это выраже-

ние, стоящее под корнем в формуле (3.19), становится отрицательным, чего не должно быть по физическому смыслу. Потеря устойчивости возможна для низкомодульных материалов типа резины, для которых величина внешней нагрузки сравнима или превосходит модуль сдвига материала. Похожий факт потери устойчивости материала был обнаружен в задаче о межфазной трещине, нагруженной давлением [5].

Литература

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. Vol. XIII. P. 239–290.
2. Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // J. of Elasticity. 1980. Vol. 10, N 4. P. 341–405.
3. Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, N 3–4. P. 219–234.
4. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 3. С. 114–126.
5. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Степанова В. А. Двухкомпонентная плоскость из материала Джона с межфазной трещиной, нагруженной давлением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 3. С. 113–125.
6. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A. Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. J. of Non-linear mechanics. 2005. Vol. 38, N 2–3. P. 281–287.
7. Hardiman N. J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. 1954. Vol. 7, N 2. P. 226–230.
8. Wang Xu. Three-phase elliptical inclusion with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics // Acta Mechanica. 2011. Vol. 219, N 1–2. P. 93–97.
9. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2(60). Вып. 4. С. 617–632.
10. Malkova Y. V., Malkov V. M. Large deformation of a plate with an elastic elliptic inclusion for John's harmonic material // Proceedings of International Conference. Stability and Control Processes in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015. P. 410–413, IEEE DOI: 10.1109/SCP.2015.7342155.
11. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: СПбГУ, 2010. 276 с.
12. Зубов Л. М., Никитин Е. С. Точное решение задачи о краевой дислокации в нелинейно-упругой среде // ДАН. 1994. Т. 334, № 3. С. 296–299.
13. Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer, 1997.

Статья поступила в редакцию 18 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Мальков Вениамин Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор;
v.malkov@spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — кандидат физико-математических наук, доцент;
y.malkova@spbu.ru

MODELING OF NONLINEAR DEFORMATION OF A PLATE WITH ELLIPTIC INCLUSION BY JOHN'S HARMONIC MATERIAL

Venyamin M. Mal'kov, Yulia V. Mal'kova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
v.malkov@spbu.ru, y.malkova@spbu.ru

The exact analytical solution of nonlinear plane-strain problems for a plate with an elastic elliptic inclusion is obtained. The constant stresses are given at infinity. The mechanical properties of a plate and inclusion are described by model of a John's harmonic material. For this model the methods of complex functions are applicable to solution of nonlinear plane problems. It is supposed, that the state of stress inside inclusion is homogeneous (tensor of nominal stresses is constant). This assumption has allowed to reduce a difficult nonlinear problem of elliptic inclusion in plate to the solution of two more simple problems for a plate with an elliptic hole. A validity of adopted hypothesis is justified by that the received solution precisely satisfies to all equations and boundary conditions of a problem. It is established, that material can lose

stability at uniaxial or biaxial compression of a plate. The solutions of some partial nonlinear problems are received from the common solution: a plate with a free elliptic hole and a plate with rigid inclusion. Refs 13. Figs 3.

Keywords: nonlinear plane problem, elliptic hole or inclusion, John's harmonic material, complex-variable method.

References

1. John F., "Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type", *Comm. Pure and Appl. Math.* **XIII**, 239–290 (1960).
2. Varley E., Cumberbatch E., "Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes", *J. of Elasticity* **10**(4), 341–405 (1980).
3. Ru C. Q., "On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials", *Acta Mechanica* **156**(3–4), 219–234 (2002).
4. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Plane problem of non-linear elasticity for harmonic material", *Vestnik St. Petersburg University. Series 1* issue 3, 114–126 (2008) [in Russian].
5. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., Stepanova V. A., "Bi-material plate of John's material with an interface crack loaded by pressure", *Vestnik St. Petersburg University. Series 1* issue 3, 113–125 (2013) [in Russian].
6. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A., "Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics", *Intern. J. of Non-linear mechanics* **340**(2–3), 281–287 (2005).
7. Hardiman N. J., "Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate", *Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics* **7**(2), 226–230 (1954).
8. Wang Xu., "Three-phase elliptical inclusion with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics", *Acta Mechanica* **219**(1–2), 93–97 (2011).
9. Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V., "Deformation of a plate with elastic elliptic inclusion", *Vestnik St. Petersburg University. Series 1* **2(60)**, issue 4, 617–632 (2015) [in Russian].
10. Malkova Yu. V., Malkov V. M., "Large deformation of a plate with an elastic elliptic inclusion for John's harmonic material", *Stability and Control Processes in Memory of V. I. Zubov (SCP)*. International Conference. 410–413 (2015), IEEE DOI: 10.1109/SCP.2015.7342155.
11. Mal'kov V. M., *Introduction to non-linear elasticity* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2010) [in Russian].
12. Zubov L. M., Nikitin E. S. "Exact solution of a problem on edge dislocation in nonlinear media", *Dokl. AN* **334**(3), 296–299 (1994) [in Russian].
13. Zubov L. M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies* (Springer, Berlin, 1997).

Для цитирования: Мальков В. М., Малькова Ю. В. Моделирование нелинейной деформации пластины с эллиптическим включением гармоническим материалом Джона // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 1. С. 121–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114

For citation: Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V. Modeling of nonlinear deformation of a plate with elliptic inclusion by John's harmonic material. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 121–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.114