УДК 517.983 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 34D05, 34G20, 35B35, 47H08, 47H010

# ЗАТУХАЮЩИЕ СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

*Ву Тронг Люонг, Нгуен Тан Тунг*

Университет Тай Бак,
Вьетнам, Шонла, Чу Ван Ан, 01

В данной работе рассматривается класс упругих систем со структурным демпфирующим элементом при нелокальных условиях. Используя подходящую меру некомпактности пространства непрерывных функций на луче, удалось доказать существование слабого решения с точной скоростью затухания экспоненциального типа. Для иллюстрации результатов приведен пример. Библиогр. 15 назв.

*Ключевые слова*: затухающие решения, упругая система со структурным затуханием, нелокальные условия.

**1. Введение.** Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Рассмотрим следующую нелокальную задачу Коши для упругих систем со структурным демпфированием:

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f(t, u(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0) + g(u) = x_0, \quad u_t(0) + h(u) = y_0, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ — замкнутый линейный оператор, $\rho \geqslant 2$ — заданная константа, $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), y_0 \in X$ и $g, h, f$ — заданные функции, которые будут описаны в разделе 3 настоящей статьи.

Упругие системы со структурным демпфированием были изучены Ченом и Расселом [1] в 1981 году. Они рассматривали упругую систему

$$u_{tt}(t) + \mathcal{B}u_t(t) + \mathcal{A}u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$u(0) = x_0, \quad u_t(0) = y_0, \tag{1.4}$$

в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, где $\mathcal{A}$ (упругий оператор) и $\mathcal{B}$ (оператор демпфирования) — неограниченные положительно определенные самосопряженные операторы в $\mathbb{H}$. При удовлетворении некоторых дополнительных условий они доказали, что

$$L_B = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ -A^{1/2} & -B \end{pmatrix}$$

образует аналитическую полугруппу на $\mathbb{W} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Хуанг [2] рассматривал задачу, описанную выше, и в 1986 г. предположил, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Тогда из следующих условий следует, что $L_B$ образует аналитическую подгруппу на $\mathbb{W}$ :

(a) $\rho_1(\mathcal{A}^{1/2}x, x) \leqslant (\mathcal{B}x, x) \leqslant \rho_2(\mathcal{A}^{1/2}x, x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(A^{1/2})$;

(b) $\rho_1(\mathcal{A}x, x) \leqslant (\mathcal{B}^2x, x) \leqslant \rho_2(\mathcal{A}x, x)$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, для некоторых $\rho_1, \rho_2 > 0$ при $\rho_1 \leqslant \rho_2$.



DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.111

В 1988 г. Хуанг [3] исследовал задачу (1.3)–(1.4) для оператора демпфирования $\mathcal{B}$, а оператор упругости $\mathcal{A}$ был заменен оператором $\mathcal{A}^{\alpha}$ $(1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Фан, Ли и Чен [4] рассматривали существование слабого решения для упругих систем со структурным демпфированием в банаховых пространствах:

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f\big(t, u(t)\big), \quad 0 < t < a, \tag{1.5}$$

$$u(0) = x_0,\ u_t(0) = y_0, \tag{1.6}$$

где коэффициент затухания удовлетворяет неравенству $\rho \geqslant 2$ и нелинейность $f$ — условию Липшица по второй переменной. Аналитичность и экспоненциальная устойчивость полугруппы, образованной упругой системой

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

$$u(0) = x_0, u_t(0) = y_0, \tag{1.8}$$

где $\rho > 2\cos\alpha$, были получены в [5] для фиксированного значения $\alpha \in \Big(0, \pi/2\Big)$. В [6] описано асимптотическое поведение решений линейных упругих систем со структурным демпфированием

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = h(t), \quad t > 0, \tag{1.9}$$

$$u(0) = x_0,\ u_t(0) = y_0, \tag{1.10}$$

и полулинейной упругой системы со структурным демпфированием

$$u_{tt}(t) + \rho\mathcal{A}u_t(t) + \mathcal{A}^2u(t) = f\big(t, u(t)\big), \quad 0 < t < a, \tag{1.11}$$

$$u(0) = x_0,\ u_t(0) = y_0, \tag{1.12}$$

в банаховых пространствах, где $\rho > 2\cos\alpha$ для фиксированного значения $\alpha \in \Big(0, \pi/2\Big)$, $\mathcal{A}$ — секториальный оператор, $-\mathcal{A}$ образует аналитическую и экспоненциально устойчивую полугруппу на $X$, $h:\ [0, +\infty) \longrightarrow X$ непрерывна, и $f$ непрерывная и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. И хотя задача (1.1)–(1.2) довольно интересная, не было предпринято попыток найти ее затухающие решения с точной скоростью затухания. Это явилось предпосылкой для нашего исследования.

Следуя работе [6], рассмотрим упругую систему со структурным демпфированием в нелокальных условиях. Впервые идея нелокальных условий была использована в [7]. Это условие более подходящее, чем классическое, для описания естественных процессов, так как оно позволяет рассматривать также дополнительную информацию (см. [8, 9]). Целью данной работы является использование принципа неподвижной точки для сжимающих отображений в качестве меры некомпактности [10], чтобы доказать существование затухающих слабых решений $u$ с $\|u(t)\| = O(e^{-\gamma t})$ при $t \to \infty$.

Дальнейшая часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 напоминаются некоторые понятия и сведения относительно мер некомпактности и сжимающего отображения, которые будут использованы для доказательства существования слабых решений на $[0, T], T > 0$, в разделе 3 и существования слабых решений на $\mathbb{R}^+$ в разделе 4. В последнем разделе представлен пример для иллюстрации полученных результатов.

**2. Предварительные сведения.** Пусть $E$ — банахово пространство. Положим, что $\mathcal{P}_b(E)$ — набор всех непустых ограниченных подмножеств $E$.

**Определение 2.1.** Функция $\Phi: \mathcal{P}_b(E) \longrightarrow [0, +\infty)$ называется *мерой некомпактности* (МНК) в $E$, если выполняется равенство

$$\Phi(\overline{co}\Omega) = \Phi(\Omega), \ \forall \Omega \in \mathcal{P}_b(E),$$

где $\overline{co}\Omega$ — замыкание выпуклой оболочки $\Omega$. МНК $\Phi$ в $E$ называется

(i) *монотонной*, если из того, что $\forall \, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E), \Omega_1 \subset \Omega_2$, следует $\Phi(\Omega_1) \leqslant \Phi(\Omega_2)$,

(ii) *невырожденной*, если $\Phi\big(\{a\} \cup \Omega\big) = \Phi(\Omega)$ для $\forall \, a \in E, \forall \, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iii) *инвариантной* относительно объединения с компактным множеством, если $\Phi(K \cup \Omega) = \Phi(\Omega)$ для каждого относительно компактного $K \subset E$ и $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iv) *алгебраически полуаддитивной*, если $\Phi(\Omega_1 + \Omega_2) \leqslant \Phi(\Omega_1) + \Phi(\Omega_2)$ для любых $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{P}_b(E)$;

(v) *регулярной*, если $\Phi(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности $\Omega$.

Важным примером МНК является МНК Хаусдорфа $\chi(\cdot)$, которая определяется следующим образом:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\} \tag{2.1}$$

для $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$.

**Утверждение 2.2.** Пусть $\chi$ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве $E, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ такая, что выполняется неравенство

$$\chi(\Omega) \leqslant 2\chi\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\big) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Пусть $C([0,T];X)$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на интервале $[0,T]$ со значениями в $X$ — банаховом пространстве с нормой $\|u\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$. Известно, что если $X = \mathbb{R}^n$, то МНК Хаусдорфа на $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ задается в виде (см. [11, пример 2.11])

$$\chi_T(D) = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup_{u\in D} \max_{t,s\in[0,T], |t-s|<\delta} \|u(t) - u(s)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad D \subset C([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Последнюю меру можно рассматривать как свойство равностепенной непрерывности подмножества в $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. В $C([0,T];X)$, где $X$ бесконечномерно, определение (2.2) не выполняется. Но если $D \subset C([0,T];X)$ — равностепенно непрерывное множество, тогда имеет место равенство

$$\chi_T(D) = \sup_{t\in[0,T]} \chi(D(t)). \tag{2.4}$$

Здесь $\chi$ — МНК Хаусдорфа на $X$ и $D(t) := \{x(t) : x \in D\}$.

Рассмотрим пространство $BC(\mathbb{R}^+;X)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$, принимающих значения в $X$. Обозначим за $\pi_T$ оператор сужения на данное пространство, так что $\pi_T(u)$ — сужение $u$ на $[0,T]$. Тогда будем иметь МНК в виде

$$\chi_\infty(D) = \sup_{T>0} \chi_T\big(\pi_T(D)\big), \quad D \subset BC(\mathbb{R}^+;X). \tag{2.5}$$

Рассмотрим другие МНК на этом пространстве:

$$d_T(D) = \sup_{u\in D}\sup_{t\geqslant T}\|u(t)\|_X, \tag{2.6}$$

$$d_\infty(D) = \lim_{T\to\infty} d_T(D), \tag{2.7}$$

$$\chi^*(D) = \chi_\infty(D) + d_\infty(D). \tag{2.8}$$

Регулярность МНК $\chi^*$ доказана в [2, лемма 2.6].

Имеем следующую оценку, доказательство которой содержится в [10].

**Утверждение 2.3** [10]. Пусть $\chi$ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве $X$, последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(0,T;X)$ такая, что $\|u_n(t)\|_X \leqslant v(t)$ для каждого $n \in \mathbb{N}^*$ и почти для всех $t\in[0,T]$, где $v \in L_1(0,T)$ — неотрицательная функция. Тогда справедливо неравенство

$$\chi\left(\left\{\int\limits_0^t u_n(s)ds\right\}\right) \leqslant 2\int\limits_0^t \chi\big(\{u_n(s)\}\big)ds \quad \text{при} \quad t\in[0,T]. \tag{2.9}$$

Из утверждений 2.2 и 2.3 получаем следующее утверждение.

**Утверждение 2.4** [12]. Пусть $\chi$ — МНК Хаусдорфа на банаховом пространстве $X$ и $D \subset L_1(0,T;X)$. Пусть существуют функции $v, q \in L_1(0,T)$, которые удовлетворяют условиям:

(i) $\|\theta(t)\|_{L_1(0,T;X)} \leqslant v(t)$ для $\forall\theta\in D$ и почти всех $t\in[0,T]$,

(ii) $\chi(D(t)) \leqslant q(t)$ для почти всех $t\in[0,T], D(t) = \{x(t): x\in D\}$.

Тогда справедливо неравенство

$$\chi\left(\int\limits_0^t D(s)ds\right) \leqslant 4\int\limits_0^t q(s)ds, \tag{2.10}$$

где $\int\limits_0^t D(s)ds = \left\{\int\limits_0^t \theta(s)ds:\ \theta\in D\right\}$.

Обозначим за $\big(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}\big)$ пространство линейных ограниченных операторов из $X$ в себя, $\chi$ — МНК Хаусдорфа на $X$. Для любого $T\in\mathcal{L}(X)$ введем его $\chi$-норму (см. [11]) следующим образом:

$$\|T\|_\chi = \inf\{k>0:\ \chi\big(T(\Omega)\big) \leqslant k\chi(\Omega),\ \Omega\in B_X\}. \tag{2.11}$$

Справедлива оценка (см. [13])

$$\|T\|_\chi \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{2.12}$$

Это определение имеется в [14, определение 6.1.1].

**Определение 2.5.** $C_0$-полугруппа $\{T(t); t\geq 0\}$ называется *равностепенно непрерывной*, если функция $t\longmapsto T(t)$ непрерывна из $(0,+\infty)$ в $\mathcal{L}(X)$ в соответствии с равномерной операторной нормой $\|.\|_{\mathcal{L}(X)}$.

В заключение этого раздела напомним принцип фиксированной точки для рассмотрения отображений, которые будут использованы в дальнейшем.

**Определение 2.6** [13]. Пусть $\beta$ — МНК на банаховом пространстве $E$ и $\emptyset \neq D \subset E$. Непрерывное отображение $F : D \longrightarrow E$ называют *плотным относительно* $\beta$ (*$\beta$-плотным*), если для $\forall\,\Omega \in \mathcal{P}_b(D)$ из неравенства $\beta(\Omega) \leqslant \beta\big(F(\Omega)\big)$ следует относительная компактность $\Omega$.

**Теорема 2.7** [10]. Пусть $D$ — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства $E$ и $F : D \longrightarrow D$ — $\beta$-плотное отображение, где $\beta$ — монотонная и невырожденная МНК на $E$. Тогда $Fix(F) = \{x \in D : x = F(x)\}$ является непустым компактным множеством.

**3. О существовании решений.** При формулировании задачи (1.1), (1.2) рассмотрим следующие предположения.

**(A)** Оператор $-\mathcal{A}$ образует равностепенно непрерывную $C_0$-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ на банаховом пространстве $X$.
В таком предположении $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ с нормой графика $\|z\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \|z\| + \|\mathcal{A}z\|$ становится банаховым пространством.

**(G)** Функция $g:\ C\big([0,T];X\big) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям:

(i) $g$ непрерывна и справедливо неравенство

$$\|g(u)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leqslant \theta_g(\|u\|_C) \tag{3.1}$$

для всех $u \in C([0,T];X)$, где $\theta_g:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция;

(ii) существуют неотрицательные константы $\eta_g, \xi_g$ такие, что выполняются неравенства

$$\chi\big(g(\Omega)\big) \leqslant \eta_g \chi_T(\Omega), \tag{3.2}$$

$$\chi(\mathcal{A}g(\Omega)) \leqslant \xi_g \chi_T(\Omega) \tag{3.3}$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0,T];X)$.

**(H)** Функция $h:\ C([0,T];X) \longrightarrow X$ удовлетворяет условиям:

(i) имеется непрерывная неубывающая функция $\theta_h:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что справедливо неравенство

$$\|h(u)\|_X \leqslant \theta_h(\|u\|_C) \tag{3.4}$$

для всех $u \in C([0,T];X)$;

(ii) имеется неотрицательная константа $\eta_h$ такая, что выполняется неравенство

$$\chi\big(h(\Omega)\big) \leqslant \eta_h \chi_T(\Omega) \tag{3.5}$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0,T];X)$.

**(F)** Нелинейная функция $f:\ \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ удовлетворяет условиям:

(i) $f\big(\cdot, v\big)$ измерима для любого $v \in X$, $f(t, \cdot)$ непрерывна почти для всех $t \in [0, T]$ и справедливо неравенство

$$\|f\big(t, v\big)\|_X \leqslant m(t)\theta_f(\|v\|_X) \tag{3.6}$$

для всех $v \in X$, где $m \in L_1(0, T)$, $\theta_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ непрерывная и неубывающая;

(ii) если полугруппа $T(\cdot)$ некомпактна, существует $\eta_f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что $\eta_f \in L_1(0, T)$ и выполняется неравенство

$$\chi\big(f(t, \Omega)\big) \leqslant \eta_f(t)\chi(\Omega) \tag{3.7}$$

для любого ограниченного множества $\Omega \subset X$.

**Замечание 3.1.** 1) Если $f(t, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. имеет место неравенство

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\|_X \leqslant k_f(t)\|v_1 - v_2\|_X$$

для некоторого $k_f \in L_1(0, T)$, соотношения (3.6) и (3.7) выполняются.
2) Если $g$ — компакт, условие (3.2) выполняется.
Положим

$$S_1(t) = T(\sigma_1 t), \quad S_2(t) = T(\sigma_2 t), \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \rho, \quad \sigma_1\sigma_2 = 1, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2.$$

Дадим определение слабого решения задачи (1.1), (1.2).

**Определение 3.2.** Функция $u \in C\big([0, T]; X\big)$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (1.2) на $[0, T]$, если для любого $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$u(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(u)\big) + \int_0^t S_2(t - s)S_1(s)v_0 ds + \int_0^t \int_0^s S_2(t - s)S_1(s - \tau)f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau ds, \tag{3.8}$$

где $v_0 = y_0 - h(u) + \sigma_2\mathcal{A}\big(x_0 - g(u)\big)$.

Введем обозначение за $B_R = \{u \in C([0, T]; X) : \ \|u\|_C \leqslant R\}$, где $R > 0$ задана. Определим оператор решения $F : B_R \to C([0, T]; X)$ как

$$F(u)(t) = S_2(t)(x_0 - g(u)) + \int_0^t S_2(t - s)S_1(s)\big(y_0 - h(u) + \sigma_2\mathcal{A}(x_0 - g(u))\big)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s S_2(t - s)S_1(s - \tau)f\big(\tau, u(\tau)\big)d\tau ds \quad \text{для} \quad \forall\, u \in B_R, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.9}$$

Из предположений, наложенных на $g, h, f$, очевидно, что $F$ — непрерывное отображение на $B_R$. Положим

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \Lambda_T = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S_2(t - s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Upsilon_T = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds,$$

$$\Theta_T = \begin{cases} 0, \text{ если полугруппа } T(\cdot) \text{ компактна}, \\ \sup\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds \text{ в иных случаях}. \end{cases}$$

**Лемма 3.3.** Пусть условия **(A), (G), (H), (F)** выполняются. Если справедливо неравенство

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big] < 1, \tag{3.10}$$

существует $R > 0$ такая, что $F(B_R) \subset B_R$.

Доказательство. Предположим обратное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_R$ с $\|u_n\|_C \leqslant n$, но $\|F(u_n)\|_C > n$. Из формулировки $F$ имеем

$$F(u_n)(t) = F_1(u_n)(t) + F_2(u_n)(t) + F_3(u_n)(t),$$

где

$$F_1(v)(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(v)\big),$$

$$F_2(v)(t) = \int\limits_0^t S_2(t-s)S_1(s)\big(y_0 - h(v) + \sigma_2\mathcal{A}(x_0 - g(v))\big)ds,$$

$$F_3(v)(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau, v(\tau)\big)d\tau ds.$$

Тогда можем записать

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leqslant \|F_1(u_n)(t)\|_X + \|F_2(u_n)(t)\|_X + \|F_3(u_n)(t)\|_X, \tag{3.11}$$

$$\|F_1(u_n)(t)\|_X \leqslant \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big) \leqslant M\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(n)\big), \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &\|F_2(u_n)(t)\|_X \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_X\big)ds \leqslant \\ &\qquad \leqslant \big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big)\Lambda_T \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \big(\|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(n)\big)\Lambda_T. \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \|F_3(u_n)(t)\|_X &\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\|_X d\tau ds \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\, m(\tau)\, \theta_f(\|u_n(t)\|_X)\, d\tau ds \leqslant \theta_f(n)\Upsilon_T. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Из (3.11)–(3.14) получаем

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leqslant \big(M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big) + \\ + \big(M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big),$$

из чего следует

$$\|F(u_n)\|_C \leqslant \big(M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big) + \\ + \big(M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big).$$

Тогда будем иметь

$$1 < \frac{1}{n}\|F(u_n)\|_C \leqslant \frac{1}{n}\big[M\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X\big] + \\ + \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big]. \qquad (3.15)$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем противоречие. Лемма 3.3 доказана. □

**Лемма 3.4.** Пусть выполнены условия леммы 3.3. Тогда справедливо неравенство

$$\chi_T\big(F(D)\big) \leqslant \Big[M\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T + 8\Theta_T\Big]\chi_T(D) \qquad (3.16)$$

для всех ограниченных множеств $D \subset B_R$.

Доказательство. По свойству алгебраической полуаддитивности $\chi_T$ имеем

$$\chi_T\big(F(D)\big) \leqslant \chi_T\big(F_1(D)\big) + \chi_T\big(F_2(D)\big) + \chi_T\big(F_3(D)\big). \qquad (3.17)$$

Для любых $z_1, z_2 \in F_1(D)$ существуют $u_1, u_2 \in D$ такие, что для $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$z_i(t) = F_1(u_i)(t) = S_2(t)\big(x_0 - g(u_i)\big) \quad (i = 1,2).$$

Имеем равенство

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_X = \|S_2(t)\big(g(u_2) - g(u_1)\big)\|_X.$$

Тогда получаем

$$\|z_1 - z_2\|_C \leqslant M\|g(u_2) - g(u_1)\|_X$$

и

$$\chi_T\big(F_1(D)\big) \leqslant M\chi\big(g(D)\big) \leqslant M\eta_g\,\chi_T(D). \qquad (3.18)$$

Применяя утверждение 2.2, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такая, что выполняются неравенства

$$\chi_T\big(F_2(D)\big) \leqslant 2\chi_T\big(\{F_2(u_n)\}_{n=1}^{\infty}\big) + \varepsilon, \qquad (3.19)$$

$$\chi\big(\{F_2(u_n)(t)\}\big) \leqslant 2\int\limits_0^t \chi\Big(S_2(t-s)S_1(s)\big(y_0 - h(\{u_n\}) + \sigma_2\mathcal{A}\big(x_0 - g(\{u_n\})\big)\big)\Big)ds =$$

$$= 2\int\limits_0^t \chi\Big[S_2(t-s)S_1(s)\big(h(\{u_n\}) + \sigma_2\mathcal{A}g(\{u_n\})\big)\Big]ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\Big(\chi\big(h(\{u_n\})\big) + \sigma_2\chi\big(\mathcal{A}g(\{u_n\})\big)\Big)ds.$$

Легко видеть, что $\{F_2(u_n)\}$ — равностепенно непрерывное множество. Тогда в силу предположений (G) и (H) имеем

$$\chi_T\big(\{F_2(u_n)\}\big) \leqslant 2\big(\eta_h\,\chi_T(\{u_n\}) + \sigma_2\xi_g\,\chi_T(\{u_n\})\big)\Lambda_T \leqslant 2\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T\,\chi_T(D). \quad (3.20)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, из (3.19) и (3.20) получаем

$$\chi_T\big(F_2(D)\big) \leqslant 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T\,\chi_T(D). \quad (3.21)$$

Снова применяя утверждение 2.2, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такая, что выполняются неравенства

$$\chi_T\big(F_3(D)\big) \leqslant 2\chi_T\big(\{F_3(u_n)\}_{n=1}^{\infty}\big) + \varepsilon, \quad (3.22)$$

$$\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) \leqslant 4\int\limits_0^t\int\limits_0^s \chi\big(S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau,\{u_n(\tau)\}\big)\big)d\tau ds.$$

Если $T(\cdot)$ — компактная полугруппа, такова и $S_2(\cdot)$. Тогда получаем

$$\chi\big(S_2(t-s)S_1(s-\tau)f\big(\tau,\{u_n(\tau)\}\big)\big) = 0 \text{ для почти всех } \tau \in [0,T].$$

В таком случае будем иметь равенство $\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) = 0$. В противном случае справедливо неравенство

$$\chi\big(\{F_3(u_n)(t)\}\big) \leqslant 4\int\limits_0^t\int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\chi\big(f\big(\tau,\{u_n(\tau)\}\big)\big)d\tau ds \leqslant$$

$$\leqslant 4\int\limits_0^t\int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\eta_f(\tau)\chi(\{u_n(\tau)\})d\tau ds.$$

Очевидно, что $\{F_3(u_n)\}$ — равностепенно непрерывное множество, следовательно, выполняется

$$\chi_T\big(\{F_3(u_n)\}\big) \leqslant 4\Theta_T\chi_T(D). \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) имеем

$$\chi_T\big(F_3(D)\big) \leqslant 8\Theta_T\chi_T(D). \quad (3.24)$$

Объединение (3.17), (3.18), (3.21) и (3.24) дает

$$\chi_T\big(F(D)\big) \leqslant \Big[M\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T + 8\Theta_T\Big]\chi_T(D). \tag{3.25}$$

Лемма 3.4 доказана. □

**Теорема 3.5.** Пусть выполняются условия леммы 3.4. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет как минимум одно слабое решение на $[0, T]$, причем справедливы неравенства

$$l := M\eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2\xi_g\big)\Lambda_T + 8\Theta_T < 1, \tag{3.26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[M\theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2\theta_g(n))\Lambda_T + \theta_f(n)\Upsilon_T\big] < 1. \tag{3.27}$$

Доказательство. По неравенству (3.26) отображение $F$ $\chi_T$-плотно. Действительно, пусть $D \subset B_R$ — ограниченное множество такое, что $\chi_T(D) \leqslant \chi_T\big(F(D)\big)$. Применяя лемму 3.4, получим неравенство

$$\chi_T(D) \leqslant \chi_T\big(F(D)\big) \leqslant l\chi_T(D).$$

Поэтому $\chi_T(D) = 0$, и тогда $D$ относительно компактно.

Применяя лемму 3.3 и используя свойство (3.27), получаем $F(B_R) \subset B_R$. Далее применяем теорему 2.7, $\chi_T$-плотное отображение $F$, определенное в (3.9), образует $Fix(F) \subset B_R$ — компактное непустое множество. Это доказывает существование по меньшей мере одного слабого решения $u(t)$, $t \in [0, T]$, задачи (1.1), (1.2), заданного в (3.8). □

**4. Существование затухающих слабых решений.** Рассмотрим в этом разделе оператор решения $F$, заданный на множестве

$$BC_R^\gamma(\beta) = B_R \cap \{v \in BC(\mathbb{R}^+; X) : \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|v(t)\|_X \leqslant \beta\},$$

где $B_R$ — замкнутый шар в $BC(\mathbb{R}^+; X)$ с центром в начале координат и радиусом $R$; $\beta$ и $\gamma$ — некоторые положительные числа, которые будут заданы далее. Это множество является выпуклым ограниченным и замкнутым подмножеством $BC(\mathbb{R}^+; X)$.

Возьмем МНК $\chi^*$ на $BC_R^\gamma(\beta)$, определенную в (2.8). Докажем, что отображение $F$ переводит $BC_R^\gamma(\beta)$ в себя, т. е. $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$, и $F$ — $\chi^*$-плотно на $BC_R^\gamma(\beta)$. Для этого необходимо заменить **(A), (G), (H)** и **(F)** на более строгие предположения.

($\mathbf{A}^*$) Оператор $-\mathcal{A}$ — инфинитезимальный порождающий оператор равностепенно непрерывной $C_0$-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ такой, что справедливо неравенство

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0,$$

где $C, \delta > 0$ — положительные константы.

($\mathbf{G}^*$) Предположение (**G**) выполняется при любом $T > 0$.

($\mathbf{H}^*$) Предположение (**H**) справедливо при любом $T > 0$.

($\mathbf{F}^*$) Предположение ($\mathbf{F}$) выполняется при $\theta_f(r) = r$, $\eta_f \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, и $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ такая, что выполняется неравенство

$$K = \sup_{s \geqslant 0} \int_0^s e^{-(\delta\sigma_1 - \gamma)(s-\tau)} m(\tau) d\tau < +\infty.$$

Положим

$$M_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \Lambda_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)} ds,$$

$$\Upsilon_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \int_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} m(\tau) d\tau ds,$$

$$\Theta_\infty = \begin{cases} 0, \text{ если полугруппа } T(\cdot) \text{ компактна}, \\ \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \int\limits_0^t \int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \eta_f(\tau) d\tau ds, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Затем зафиксируем $\gamma \in (0, \delta\sigma_1]$.

**Лемма 4.1.** Пусть выполнены $(\mathbf{A}^*), (\mathbf{G}^*), (\mathbf{H}^*)$ и $(\mathbf{F}^*)$. Если справедливы неравенства

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \big[ M_\infty \theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty \big] + \Upsilon_\infty < 1 \tag{4.1}$$

$$\frac{KC^2}{\delta\sigma_2 - \gamma} < 1, \tag{4.2}$$

существуют положительные $R, \beta$ такие, что $F(BC^\gamma_R(\beta)) \subset BC^\gamma_R(\beta)$.

Доказательство. Сначала докажем существование независимого от оператора решения $F$ множества $B_R$. Докажем от противного: пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $u_n \in B_n$, удовлетворяющая $\|u_n\|_\infty \leqslant n$, но $\|F(u_n)\|_\infty > n$. При равных с леммой 3.3 условиях имеем

$$\|F_1(u_n)(t)\|_X \leqslant M_\infty \big( \|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(n) \big), \tag{4.3}$$

$$\|F_2(u_n)(t)\|_X \leqslant \big( \|y_0\|_X + \theta_h(n) + \sigma_2 \|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2 \theta_g(n) \big) \Lambda_\infty, \tag{4.4}$$

$$\|F_3(u_n)(t)\|_X \leqslant n \Upsilon_\infty. \tag{4.5}$$

Из (4.3)–(4.5) очевидно неравенство

$$\|F(u_n)(t)\|_X \leqslant \big( M_\infty \|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|\mathcal{A}x_0\|_X \big) + \\ + \big( M_\infty \theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty + n \Upsilon_\infty \big)$$

для любого $t \geqslant 0$. Отсюда имеем

$$1 < \frac{1}{n} \|F(u_n)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \big[ M_\infty \|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y_0\|_X + \sigma_2 \|\mathcal{A}x_0\|_X \big] + \\ + \frac{1}{n} \big[ M_\infty \theta_g(n) + (\theta_h(n) + \sigma_2 \theta_g(n)) \Lambda_\infty + n \Upsilon_\infty \big]. \tag{4.6}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем соотношении, получаем противоречие с условием (4.1).

Теперь докажем существование положительного $\beta$ такого, что $F\big(BC_R^\gamma(\beta)\big) \subset BC_R^\gamma(\beta)$. Предположим противное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $u_n \in BC_R^\gamma(n)$ (т. е. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|u_n(t)\|_X \leqslant n$) такая, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X > n$. Тогда будем иметь

$$e^{\gamma t}\|F_1(u_n)(t)\|_X \leqslant e^{\gamma t}\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|g(u_n)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\big) \leqslant \\ \leqslant e^{\gamma t}\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(\|u_n\|_\infty)\big) \leqslant \frac{C}{e^{(\delta\sigma_2-\gamma)t}}\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(R)\big] \leqslant \\ \leqslant C\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \theta_g(R)\big], \quad (4.7)$$

$$e^{\gamma t}\|F_2(u_n)(t)\|_X \leqslant \\ \leqslant e^{\gamma t}\int\limits_0^t \|S_2(t-s)S_1(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\big(\|y_0\|_X + \|h(u_n)\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\|\mathcal{A}g(u_n)\|_X\big)ds \leqslant \\ \leqslant C\big[\|y_0\|_X + \theta_h(\|u_n\|_\infty) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(\|u_n\|_\infty)\big]e^{(\gamma-\delta\sigma_2)t}\int\limits_0^t e^{\delta(\sigma_2-\sigma_1)s}ds \leqslant \\ \leqslant C_1\big[\|y_0\|_X + \theta_h(R) + \sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X + \sigma_2\theta_g(R)\big] \quad (4.8)$$

для любого $t \geqslant 0$, так как $u_n \in BC_R^\gamma(n)$. Здесь $C_1$ — это положительная константа, независимая от $u_n$. Имеем

$$e^{\gamma t}\|F_3(u_n)(t)\|_X \leqslant e^{\gamma t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s \|S_2(t-s)S_1(s-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|f(\tau,u_n(\tau))\|_X d\tau ds \leqslant \\ \leqslant C^2 e^{\gamma t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_2(t-s)}e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)}m(\tau)\|u_n(\tau)\|_X d\tau ds = \\ = C^2 e^{\gamma t}\int\limits_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)}\Big(\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)-\gamma\tau}m(\tau)e^{\gamma\tau}\|u_n(\tau)\|_X d\tau\Big)ds \leqslant \\ \leqslant nC^2 e^{\gamma t}\int\limits_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)}\Big(\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)-\gamma\tau}m(\tau)d\tau\Big)ds.$$

Убеждаемся, что вследствие $\gamma \leqslant \delta\sigma_1$ справедливо соотношение

$$\int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)-\gamma\tau}m(\tau)d\tau = \int\limits_0^s e^{-\delta\sigma_1(s-\tau)+\gamma(s-\tau)}e^{-\gamma s}m(\tau)d\tau = \\ = e^{-\gamma s}\int\limits_0^s e^{-(\delta\sigma_1-\gamma)(s-\tau)}m(\tau)d\tau \leqslant Ke^{-\gamma s}.$$

Отсюда получаем

$$e^{\gamma t}\|F_3(u_n)(t)\|_X \leqslant nC^2Ke^{\gamma t}\int\limits_0^t e^{-\delta\sigma_2(t-s)-\gamma s}ds \leqslant \frac{nKC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}. \tag{4.9}$$

По (4.7)–(4.9) имеем

$$e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X \leqslant C_2\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}+\|y_0\|_X+\sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X+(1+\sigma_2)\theta_g(R)+\theta_h(R)\big]+\frac{nKC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}$$

для $\forall u_n \in BC_R^\gamma(n)$ и $\forall t \geqslant 0$, где $C_2 = \max\{C, C_1\}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$1 < \frac{1}{n}\sup_{t\geqslant 0} e^{\gamma t}\|F(u_n)(t)\|_X \leqslant \frac{C_2}{n}\big[\|x_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}+\|y_0\|_X+\sigma_2\|\mathcal{A}x_0\|_X+$$

$$+(1+\sigma_2)\theta_g(R)+\theta_h(R)\big]+\frac{KC^2}{\delta\sigma_2-\gamma}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в последнем соотношении, получаем противоречие с условием (4.2). □

**Лемма 4.2.** Пусть выполняются ($\mathbf{A}^*$), ($\mathbf{G}^*$), ($\mathbf{H}^*$) и ($\mathbf{F}^*$). Тогда справедливо неравенство

$$\chi^*\big(F(D)\big) \leqslant \Big[M_\infty\eta_g + 4\big(\eta_h+\sigma_2\xi_g\big)\Lambda_\infty + 8\Theta_\infty\Big]\chi^*(D) \tag{4.10}$$

для любого ограниченного множества $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$.

Доказательство. Пусть $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ — ограниченное множество. Тогда имеем равенство

$$\chi^*\big(F(D)\big) = \chi_\infty\big(F(D)\big) + d_\infty\big(F(D)\big). \tag{4.11}$$

Из леммы 3.4 получаем следующие оценки:

$$\chi_\infty(F(D)) \leqslant \chi_\infty(F_1(D)) + \chi_\infty(F_2(D)) + \chi_\infty(F_3(D)) \tag{4.12}$$

и

$$\chi_\infty(F_1(D)) \leqslant M_\infty\eta_g\chi_\infty(D), \tag{4.13}$$

$$\chi_\infty(F_2(D)) \leqslant 4(\eta_h+\sigma_2\xi_g)\Lambda_\infty\chi_\infty(D), \tag{4.14}$$

$$\chi_\infty(F_3(D)) \leqslant 8\Theta_\infty\chi_\infty(D). \tag{4.15}$$

Из (4.12)–(4.15) имеем

$$\chi_\infty\big(F(D)\big) \leqslant \Big[M_\infty\eta_g + 4\big(\eta_h+\sigma_2\xi_g\big)\Lambda_\infty + 8\Theta_\infty\Big]\chi_\infty(D). \tag{4.16}$$

Пусть теперь $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ — ограниченное множество. Тогда для каждой $u \in D$ имеем

$$e^{\gamma t}\|F(u)(t)\|_X \leqslant \beta \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Значит, $\|F(u)(t)\|_X \leqslant \beta e^{-\gamma t}$, $\forall u \in D$, для любого достаточно большого $t$. Соответственно для достаточно большого $T$ выполняется неравенство $d_T(F(D)) \leqslant \beta e^{-\gamma T}$. Отсюда получаем

$$d_\infty\big(F(D)\big) = \lim_{T\to\infty} d_T(F(D)) = 0. \tag{4.17}$$

Учитывая (4.11), (4.16) и (4.17), получаем утверждение леммы. □

Объединение лемм (4.1) и (4.2) дает следующую теорему.

**Теорема 4.3.** Если выполняются условия леммы 4.1 и справедливо неравенство

$$l_\infty := M_\infty \eta_g + 4\big(\eta_h + \sigma_2 \xi_g)\Lambda_\infty\big) + 8\Theta_\infty < 1, \tag{4.18}$$

задача (1.1), (1.2) имеет хотя бы одно слабое решение на $\mathbb{R}^+$ такое, что $e^{\gamma t}\|u(t)\| = O(1)$ при $t \to +\infty$.

Доказательство. Как видно из неравенства (4.18), оператор решения $F$ является $\chi^*$-плотным вследствие леммы 4.2. Это верно, если ограниченное $D \subset BC_R^\gamma(\beta)$ такое, что $\chi^*(D) \leqslant \chi^*\big(F(D)\big)$. Применив лемму 4.2, получаем

$$\chi^*(D) \leqslant \chi^*\big(F(D)\big) \leqslant l_\infty \chi^*(D).$$

Отсюда имеем $\chi^*(D) = 0$, и, таким образом, $D$ — относительный компакт.

Учитывая предположения (4.1), (4.2) и лемму 4.1, получаем $F(BC_R^\gamma(\beta)) \subset BC_R^\gamma(\beta)$. Применив в связи с этим теорему 2.7, определяем, что оператор решения $F$, заданный в (3.9), имеет компактное непустое множество неподвижных точек из $BC_R^\gamma(\beta)$, которое содержит затухающие решения задачи (1.1), (1.2). $\square$

**5. Пример.** Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt}(t,x) - \rho\Delta_x u_t(t,x) + \Delta_x^2 u(t,x) = f\big(t,x,u(t,x)\big), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$u(0,x) + \int\limits_\Omega k(x,y)u(0,y)dy = \varphi(x), \quad u_t(0,x) + \sum_{i=1}^N C_i u(t_i,x) = \psi(x), \tag{5.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.3}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$ и $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ такой, что $\Delta_x k \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Пусть имеем $X = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{A} = -\Delta_x$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Известно, что (см., например, [15]) $-\mathcal{A}$ образует компактную (и, следовательно, равностепенно непрерывную) полугруппу $T(\cdot)$, экспоненциально устойчивую, т. е. $\|T(t)\| \leqslant e^{-\lambda_1 t}$, где $\lambda_1 > 0$ — первое собственное значение $\mathcal{A}$. Записывая

$$u(t) = u(t,\cdot), \quad f(t,v) = f(\cdot, v(\cdot)),$$
$$g(u) = \int\limits_\Omega k(\cdot,y)u(0,y)dy, \quad h(u) = \sum_{i=1}^n C_i u(t_i,\cdot),$$

можно преобразовать задачу (5.1), (5.3) в абстрактный вид (1.1), (1.2). Рассматривая нелинейную функцию $f$, предположим, что существует функция $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ такая, что справедливо неравенство

$$|f(t,x,z)| \leqslant m(t)|z|, \quad \forall (t,x,z) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}.$$

Тогда будем иметь

$$\|f(t,v)\|_X \leqslant m(t)\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

Заметим, что

$$G(v) = \int\limits_{\Omega} k(\cdot, y)v(y)dy$$

является оператором Гильберта—Шмидта на $L^2(\Omega)$, следовательно, он компактен. Поэтому отображение $g$, задаваемое как $g(u) = G(u(0,\cdot)$, тоже компактно. Аналогично $\mathcal{A}g$ — компактное множество. Таким образом, условие **(G*)**(ii) удовлетворяется при $\eta_g = \xi_g = 0$. При этом выполняется неравенство

$$\|g(u)\|_X \leqslant \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega}\|u(0,\cdot)\|_X \leqslant \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|u\|_C.$$

Итак, **(G*)**(i) верно.

Относительно функции $h$ имеем

$$\|h(u_1) - h(u_2)\|_X \leqslant \sum_{i=1}^N |C_i|\|u_1(t_i,\cdot) - u_2(t_i,\cdot)\|_X \leqslant \big(\sum_{i=1}^N |C_i|\big)\|u_1 - u_2\|_C.$$

Тогда получаем

$$\chi(h(\Omega)) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N |C_i|\right)\chi_\infty(\Omega).$$

Условие **(H*)**(ii) выполняется при $\eta_h = \sum_{i=1}^N |C_i|$. С другой стороны, очевидно неравенство

$$\|h(u)\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^N |C_i|\right)\|u\|_\infty,$$

из чего следует **(H*)**(i).

Учитывая сказанное выше, простые вычисления дают

$$M_\infty = 1, \quad \Theta_\infty = 0, \quad \Lambda_\infty \leqslant [\lambda_1(\sigma_2 - \sigma_1)]^{-1},$$
$$K = \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t e^{-(\lambda_1\sigma_1-\gamma)(t-\tau)}m(\tau)d\tau,$$
$$\theta_g(r) = \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot r, \quad \theta_h(r) = \left(\sum_{i=1}^N |C_i|\right)\cdot r.$$

Используя теорему 4.3, определяем, что задача (5.1)–(5.3) имеет как минимум одно решение $u \in BC(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, удовлетворяющее равенству $e^{\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = O(1)$ при $t \to +\infty$, причем выполняются неравенства

$$K < \lambda_1\sigma_2 - \gamma, \tag{5.4}$$

$$\|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^N |C_i| + \sigma_2\|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\right)[\lambda_1(\sigma_2 - \sigma_1)]^{-1} + \Upsilon_\infty < 1. \tag{5.5}$$

Авторы с удовольствием выражают свою благодарность аспирантке СПбГУ Веронике Шелковиной за перевод текста статьи на русский язык и профессору СПбГУ В. М. Рябову за научное редактирование статьи.

**Литература**


1. *Chen G., Russell D. L.* A Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Structural Damping // Quart. Appl. Math. 1981/1982. Vol. 39. P. 433–454.

2. *Huang F.* A Problem for Linear Elastic Systems with Structural Damping // Acta Math. Sci Sinic. 1986. Vol. 6. P. 107–113.

3. *Huang F.* On the Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Analytic Damping // SIAM, J. Cont, Opt. 1988. Vol. 26. P. 714–724.

4. *Fan H., Li Y., Chen P.* Existence of Mild Solutions for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013. Artical ID 746893. P. 1–6.

5. *Fan H., Li Y.* Analyticity and Exponential Stability of Semigroups for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 410. P. 316–322.

6. *Fan H., Gao F.* Asymptotic Stability of Solutions to Elastic Systems with Structural Damping // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. Vol. 2014, N 245. P. 1–9.

7. *Byszewski L.* Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semi-linear evolution nonlocal Cauchy problem // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 162. P. 494–505.

8. *Deng K.* Exponetial decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 179. P. 630–637.

9. *Byszewski L., Lakshmikantham V.* Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space // Appl. Anal. 1991. Vol. 40. P. 11–19.

10. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001.

11. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1986. 265 с.

12. *Anh N. T., Ke T. D.* Decay Integral Solutions for Neutral Fractional Differential Equations with Infinite Delays // Math. Meth. Appl. Sci. 2015. Vol. 38, N 8. P. 1601–1622.

13. *Apell J.* Mearures of Noncompactness Condensing Operators and Fixed Points an Application-Oriented Survey // Fixed Point Theory. 2005. Vol. 6, N 2. P. 157–229.

14. *Vrabie I. I.* $C_0$-semigroups and applications. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 2003.

15. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolutio Equations. New York: Springer-Verlag Inc., 2000.


Статья поступила в редакцию 16 марта 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.


Сведения об авторах

*Ву Тронг Люонг* — vutrongluong@gmail.com

*Нгуен Тан Тунг* — thanhtungcva2013@gmail.com


## DECAY MILD SOLUTIONS FOR ELASTIC SYSTEMS WITH STRUCTURAL DAMPING INVOLVING NONLOCAL CONDITIONS


*Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung*

Tay Bac University, 01, Chu Van An, Quyet Tam, Son La, Vietnam;
vutrongluong@gmail.com, thanhtungcva2013@gmail.com



This paper deals with a class of elastic systems with structural damping subject to nonlocal conditions. By using a suitable measure of noncompactness on the space of continuous functions on the half-line, we establish the existence of mild solutions with explicit decay rate of exponential type. An example is given to illustrate the abstract results. Refs 15.


*Keywords*: decay solutions, elastic system with structural damping, nonlocal conditions.

**References**


1. Chen G., Russell D. L., “A Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Structural Damping”, *Quart. Appl. Math.* **39**, 433–454 (1981–1982).

2. Huang F., “A Problem for Linear Elastic Systems with Structural Damping”, *Acta Math. Sci Sinic.* **6**, 107–113 (1986).

3. Huang F., "On the Mathematical Model for Linear Elastic Systems with Analytic Damping", *SIAM, J. Cont, Opt.* **26**, 714–724 (1988).

4. Fan H., Li Y., Chen P., "Existence of Mild Solutions for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces" *Abstract and Applied Analysis* **2013**, Artical ID 746893, 1–6 (2013).

5. Fan H., Li Y., "Analyticity and Exponential Stability of Semigroups for the Elastic Systems with Structural Damping in Banach Spaces" *J. Math. Anal. Appl.* **410**, 316–322 (2014).

6. Fan H., Gao F., "Asymptotic Stability of Solutions to Elastic Systems with Structural Damping" *Electronic Journal of Differential Equations* **2014**(245), 1–9 (2014).

7. Byszewski L., "Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semi-linear evolution nonlocal Cauchy problem" *J. Math. Anal. Appl.* **162**, 494–505 (1991).

8. Deng K., "Exponetial decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions" *J. Math. Anal. Appl.* **179**, 630–637 (1993).

9. Byszewski L., Lakshmikantham V., "Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space" *Appl. Anal.* **40**, 11–19 (1991).

10. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P., *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces* (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001).

11. Akhmerov R. R., Kamenskii M. I., Potapov A. S., Rodkina A. E., Sadovskii B. N., *Measures of Noncompsctness and Condensing Operator* (Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1992).

12. Anh N. T., Ke T. D., "Decay Integral Solutions for Neutral Fractional Differential Equations with Infinite Delays" *Math. Meth. Appl. Sci.* **38**(8), 1601–1622 (2015).

13. Apell J., "Mearures of Noncompactness Condensing Operators and Fixed Points an Application-Oriented Survey", *Fixed Point Theory* **6**(2), 157–229 (2005).

14. Vrabie I. I., $C_0$-*semigroups and applications* (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003).

15. Engel K. J., Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolutio Equations* (Springer-Verlag, New York, Inc, 2000).

**Для цитирования:** Ву Тронг Люонг, Нгуен Тан Тунг. Затухающие слабые решения упругих систем со структурным демпфированием при нелокальных условиях // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 87–103. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.111

**For citation:** Vu Trong Luong, Nguyen Thanh Tung. Decay mild solutions for Elastic Systems with Structural Damping involving Nonlocal Conditions. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 87–103. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.111