УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 1
MSC 30E10

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА СЧЕТНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ОТРЕЗКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В настоящей работе рассматривается приближение целых функций из классов Гёльдера на счетном объединении отрезков целыми функциями экспоненциального типа. Принципиальным моментом является то, что скорость приближения в окрестности концов отрезков оказывается выше в той шкале, которая впервые появилась в теории приближения полиномами функций из классов Гёльдера на отрезке и позволила согласовать так называемые прямые и обратные теоремы для этого случая, т. е. восстанавливать гёльдеровскую гладкость по скорости приближения полиномами в этой шкале. Приближения целыми функциями на счетном объединении отрезков ранее не рассматривались. В первой части статьи были приведены несколько лемм и сформулирована основная теорема. В настоящей работе мы докажем эту теорему, опираясь на приведенные ранее леммы. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: класс Гёльдера, целые функции экспоненциального типа, приближения на подмножествах вещественной оси.

1. Начнем построение приближающих на множестве E функций f целыми функциями из классов T_σ. Будем предполагать вплоть до нижеследующего соотношения (44), что функция $f \in \Lambda_M^{r+\omega}(E)$, где модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \le c \cdot \omega(x).$$

Модуль непрерывности $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ этому условию удовлетворяет. Использовать класс $H_M^\alpha(E)$ вместо более общего класса $\Lambda_M^{r+\omega}$ будем начиная с соотношения (44), которое выполняется как раз для класса $H_M^\alpha(E)$. Теорема справедлива и для общего класса, но доказательство требует дополнительных существенных соображений, которые мы планируем привести в следующей статье. Выберем параметры k и m так:

$$k + 1 = 4(r + 1), \quad m = 8(k + 1) + 2,$$

в частности для $H_M^\alpha(E)$, $r = 0$, поэтому $k = 3$, $m = 34$. Постоянную c_m определим равенством

$$c_m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt = 1.$$

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.108

Далее, определив функции $z^{\pm}_{\xi,s}(z)$ в соотношениях (27) и (28) из [1], при $w \in E$ положим

$$R_k(z,w,\xi,s) = \begin{cases} \frac{1}{z^{+}_{\xi,s}(z)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\frac{z^{+}_{\xi,s}(z)-z}{z^{+}_{\xi,s}(z)-w}\right)^{\nu}\right), & z \in D_+, \\ \frac{1}{z^{-}_{\xi,s}(z)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\frac{z^{-}_{\xi,s}(z)-z}{z^{-}_{\xi,s}(z)-w}\right)^{\nu}\right), & z \in D_-. \end{cases}$$

Затем, определив эллипсы $E_{\rho_0}(I_n)$ и функцию $f'_{1\bar z}(z)$ в формуле (26) из [1], положим

$$F_\sigma(w) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar z}(z) \left(\frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \cdot R_k\left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t\right)\right) dm_2(z). \tag{1}$$

В формулах, определяющих R_k, F_σ, $\sigma_1 = \sigma/m$ в обозначениях функций F_σ, $z^{\pm}_{\xi,s}(z)$, $R_k(z,w,\xi,s)$ и области $D_\pm$, не указана зависимость этих функций от последовательностей $X' = \{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $X'' = \{x''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ для краткости записи.

Учтем теперь, что области D_+ и D_- зависят от последовательностей X' и X'', т. е. $D_\pm = D_\pm(X', X'')$, поэтому и функции $z^\pm$ и R_k зависят от этих последовательностей:

$$z^{\pm}_{\xi,s}(z) = z^{\pm}_{\xi,s}(z, X', X''),$$

$$R_k\left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t\right) = R_k\left(z, w, \frac{1}{\sigma_1}, t, X', X''\right), \quad F_\sigma(w) = F_\sigma(w, X', X'').$$

Пусть имеем

$$a^0_n = a'_n - \frac{1}{8}|I_n|, \quad a^1_n = a'_n + \frac{1}{8}|I_n|, \quad b^0_n = b'_n - \frac{1}{8}|I_n|, \quad b^1_n = b'_n + \frac{1}{8}|I_n|,$$

$$d\nu'_n(x) = \frac{4}{|I_n|}dx, \quad x \in [a^0_n, a^1_n] \overset{\text{def}}{=} I'_n, \quad d\nu''_n(x) = \frac{4}{|I_n|}dx, \quad x \in [b^0_n, b^1_n] \overset{\text{def}}{=} I''_n.$$

Отметим, что справедливо равенство

$$\nu'_n(I'_n) = \nu''_n(I''_n) = 1. \tag{2}$$

2. Нам понадобятся последовательности целых функций экспоненциального типа, которые начнем определять в этом пункте. Пусть имеем

$$Y'_N = X' \setminus \bigcup_{l=-N}^{N} \{x'_n\}, \quad Y''_N = X'' \setminus \bigcup_{l=-N}^{N} \{x''_n\}, \quad \bigcup_{l=-N}^{N} \{x'_n\} = X'_N, \quad \bigcup_{l=-N}^{N} \{x''_n\} = X''_N.$$

Теперь положим при $w \in E$

$$F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) = \int\limits_{\prod\limits_{l=-N}^{N} I'_l} \int\limits_{\prod\limits_{l=-N}^{N} I''_l} F_\sigma(w, X'_N \cup Y'_N, X''_N \cup Y''_N) d\nu'_{-N}(x'_{-N}) \dots d\nu''_N(x''_N). \tag{3}$$

Соотношение (2) дает равенство

$$\int\limits_{\prod\limits_{l=-N}^{N} I'_l} \int\limits_{\prod\limits_{l=-N}^{N} I''_l} d\nu'_{-N}(x'_{-N})\dots d\nu'_N(x'_N) d\nu''_{-N}(x''_{-N})\dots d\nu''_N(x''_N) = 1. \tag{4}$$

Положим

$$Q'_N = \prod_{l=-N}^{N} I'_l, \quad Q''_N = \prod_{l=-N}^{N} I''_l, \quad d\mu'_N = d\nu'_{-N}\dots d\nu'_N, \quad d\mu''_N = d\nu''_{-N}\dots d\nu''_N.$$

Теперь из (26), (29) из [1] и (4) при $w \in E$ получаем соотношение

$$f(w) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar z}(z) \left(c_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m \cdot \frac{1}{z-w} dt \int\limits_{Q'_n} d\mu'_N \int\limits_{Q''_n} d\mu''_N \right). \tag{5}$$

Если $\zeta = z^{\pm}_{\xi,s}(z)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\zeta-w} + \frac{\zeta-z}{(\zeta-w)^2} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} - \frac{1}{z-w} = \\
&\qquad = \frac{z-\zeta}{(\zeta-w)(z-w)} + \frac{\zeta-z}{(\zeta-w)^2} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \\
&\qquad = \frac{\zeta-z}{\zeta-w}\left(\frac{1}{\zeta-w} - \frac{1}{z-w}\right) + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \\
&\qquad = -\frac{(\zeta-z)^2}{(\zeta-w)^2(z-w)} + \frac{(\zeta-z)^2}{(\zeta-w)^3} + \dots + \frac{(\zeta-z)^k}{(\zeta-w)^{k+1}} = \dots = \\
&\qquad = -\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-w}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому (1), (3), (5) и (6) при $w \in E$ влекут равенство

$$\begin{aligned}
&F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w) = \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar z}(z) dm_2(z) \right)\right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \cdot \left(-\left(\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z) - z}{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z) - w} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w} \right)\right) = \\
&\quad = \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar z}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \times \\
&\quad \times \left(\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z) - z}{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z) - w} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{z-w} dm_2(z).
\end{aligned} \tag{7}$$

Применяя соотношения (29) и (30) из [1, лемма 1], получаем оценку

$$\left|\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z)-z}{z^{\pm}_{1/\sigma,t}(z)-w}\right|^{k+1} \le c_{abs}^{2(k+1)}\cdot\left|\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-z}{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-w}\right|^{k+1}\cdot(\sigma|t|+1)^{8(k+1)} \le$$
$$\le c_{k,m}\left|\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-z}{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-w}\right|^{k+1}\cdot(\sigma_1 t+1)^{8(k+1)}. \quad (8)$$

Отсюда в силу выбора $m = 8(k+1)+2$ следует равенство

$$\frac{1}{\sigma_1^{m-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m(\sigma_1 t+1)^{8(k+1)}\,dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t\sigma_1}{t\sigma_1}\right)^m(\sigma_1 t+1)^{8(k+1)}\,d\sigma_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s}{s}\right)^m(s+1)^{8(k+1)}\,ds < \infty. \quad (9)$$

В таком случае из (7)–(9) заключаем, что справедливо неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \le$$
$$\le \tilde{c}''_m \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar z}(z)|\left|\frac{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-z}{z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z)-w}\right|^{k+1}\frac{1}{|z-w|}dm_2(z). \quad (10)$$

В последующих оценках будем использовать полные обозначения $z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z, X'_N,\ Y'_N,\ X''_N,\ Y''_N)$. Пусть $w \in I_{n_0} \subset E$, $\eta = 1/\sigma$. Тогда по лемме 2 из [1] имеем

$$|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - z| \le$$
$$\le c|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - \omega|^{1/2}\cdot\Big(|z-w| + |z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N)|\Big)^{1/2}, \quad (11)$$

где $c = A_4$ или $c = A_5$, $z \in D_+$ или $z \in D_-$ соответственно.

Для оценки выражения $|z^{\pm}_{\eta,0}(z) - w|$ с помощью той же леммы 2 из [1] находим

$$|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(z, X'_N, Y'_N, X''_N, Y''_N) - w| \ge c_1\begin{cases}|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(\omega, X', X'') - w|, & w \in D_+ \text{ или } w \in D_-,\\ |z-w|, & \text{если } |z-w| \ge |z^{\pm}_{\eta,0}(\omega, X', X'') - w|.\end{cases} \quad (12)$$

Принимая во внимание (16) из [1], а также оценки (11), (12), получаем соотношение

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{E_{\rho_0}(I_n),} |f'_{1\bar z}(z)|\left|\frac{z^{\pm}_{\eta,0}(z, X', X'')-z}{z^{\pm}_{\eta,0}(z, X', X'')-w}\right|^{k+1}\frac{dm_2(z)}{|z-w|} \le$$
$$\le c_m(E)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\substack{E_{\rho_0}(I_n)\\ n\ne n_0, n_0+1}} \operatorname{dist}^{r-1}(z, I_n)\,\omega(\operatorname{dist}(r, I_n))\times$$

$$\times \frac{|z_{\eta,0}(w)-w|^{1/2}\left(|z-w|+(z_{\eta,0}(w)-w|)\right)^{1/2}}{|z-w|}\frac{dm_2(z)}{|z-w|}+$$

$$+c_m(E)\left(\int\limits_{E_{\rho_0}(I_{n_0})}\ldots+\int\limits_{E_{\rho_0}(I_{n_0+1})}\ldots\right)=T_1+T_2, \quad (13)$$

при этом $T_1=T_{1n_0}(w,X',X'')$, $T_2=T_{2n_0}(w,X',X'')$.

Поскольку $w\in I_{n_0}\bigcup J_{n_0}$ и $\sigma\geq 1$, справедлива оценка $|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w|\leq c|z-w|$ при $z\in E_{\rho_0}(I_n)$, $n\neq n_0$, $n\neq n_0+1$. Далее, с учетом (18) из [1], оцениваем

$$T_1\leq c_m(E)\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ n\neq n_0,\\ n\neq n_0+1}}\int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)}\operatorname{dist}^{r-1}(z,I_n)\omega(\operatorname{dist}(r,I_n))\left|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w\right|^{\frac{k+1}{2}}\frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}+1}}\leq$$

$$\leq c|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w|^{\frac{k+1}{2}}\sum_{\substack{n\neq 0,\\ n\in\mathbb{Z}}}\frac{1}{n^{\frac{2(k+1)}{2}}+1}\leq c\left|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w\right|^{\frac{k+1}{2}}. \quad (14)$$

В соотношении (14) знак «+» или «−» выбирается в соответствии с тем, будет ли $w\in D_+$ или $w\in D_-$.

Из (35) и (36) из [1] находим, что при любых X' и X'' выполняются неравенства

$$|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|\leq c\sqrt{\eta}=\frac{c}{\sqrt{\sigma}},$$

$$|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|^{\frac{k+1}{2}}\leq c\left(\sigma^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4(r+1)}{2}}=c\sigma^{-r-1}\leq c\sigma^{-r}\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (15)$$

В соотношении (15) постоянная c не зависит от X' и X''. Оценим слагаемое T_2. Как следует из [1, лемма 2], в случае $z\in D_{\pm}$, $|z-w|\leq|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|$ с постоянными $c'>0$ и $c''>0$, не зависящими от X',X'', справедливы неравенства

$$|z^{\pm}_{\eta,0}(z,X',X'')-z|\leq c'|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|, \quad (16)$$

$$|z^{\pm}_{\eta,0}(z,X',X'')-w|\geq c''|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|. \quad (17)$$

Если же имеем $|z-w|\geq|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|$, то с постоянной $c'''>0$, не зависящей от X' и X'', выполняется оценка

$$|z^{\pm}_{\eta,0}(z,X',X'')-w|\geq c'''|z-w|. \quad (18)$$

Неравенства (16)–(18) дают такое соотношение для слагаемого T_2:

$$T_2\leq c\int\limits_A\operatorname{dist}^{r-1}(z,I_{n_0}\cup I_{n_0+1})\omega(\operatorname{dist}(z,I_{n_0}\cup I_{n_0+1}))\times$$

$$\times\left|\frac{z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w}{z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w}\right|^{k+1}\frac{dm_2(z)}{|z-w|}+c\int\limits_B\operatorname{dist}^{r-1}(z,I_{n_0}\cup I_{n_0+1})\omega(\operatorname{dist}(z,I_{n_0}\cup I_{n_0+1}))\times$$

$$\times\frac{\left(|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w|^{\frac{1}{2}}\left(|z-w|+|z^{\pm}_{\eta,0}(w)-w|\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{k+1}}{|z-w|^{k+1}}\frac{dm_2(z)}{|z-w|}=T_{21}+T_{22}, \quad (19)$$

где $A = E_{\rho_0}(I_{n_0}) \bigcup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \bigcap \{z : |z-w| \le |z^{\pm}_{\eta,0}(w,x',X'')-w|\}$, $B = E_{\rho_0}(I_{n_0}) \bigcup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z-w| \le |z^{\pm}_{\eta,0}(w,x',X'')-w|\}$.

Слагаемое T_{21} оценивалось в работах Е. М. Дынькина [2, 3]: если имеем $\lambda = |z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|$, справедлива оценка

$$T_{21} \le c \int\limits_{|z-\omega|\le\lambda} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|} \le c\lambda^r \omega(\lambda) =$$

$$= c|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|^r \cdot \omega(|z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|). \quad (20)$$

Аналогично, полагая $\lambda = |z^{\pm}_{\eta,0}(w,X',X'')-w|$ и учитывая (18), получаем оценку для T_{22}:

$$T_{22} \le c \int\limits_{K_1} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{\lambda^{\frac{k+1}{2}} \cdot |z-w|^{\frac{k+1}{2}}}{|z-w|^{k+1}} \frac{dm_2(z)}{|z-w|} =$$

$$= c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \int\limits_{K_2} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}}} \le$$

$$\le c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \int\limits_{K_3} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}+1}}, \quad (21)$$

где $K_1 = E_{\rho_0}(I_n) \bigcup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z-w| \le \lambda\}$, $K_2 = E_{\rho_0}(I_n) \bigcup E_{\rho_0}(I_{n_0+1}) \setminus \{z : |z-w| \le \lambda\}$, $K_3 = \{z : |z-w| \le |I_{n_0}| + J_{n_0}| + |I_{n_0+1}|\} \setminus \{z : |z-w| \le \lambda\}$.

Пусть M таково, что $2^{M-1}\lambda \le |I_{n_0}| + |J_{n_0}| + |I_{n_0+1}| < 2^M\lambda$, тогда неравенство (21) можно продолжить:

$$T_{22} \le c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^{M} \int\limits_{R} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) \cdot \frac{dm_2(z)}{|z-w|^{\frac{k+1}{2}+1}} \le$$

$$\le c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{(2^\nu\lambda)^{\frac{k+1}{2}+1}} \int\limits_{R} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1}) \omega(\mathrm{dist}(z, I_{n_0} \cup I_{n_0+1})) dm_2(z) \le$$

$$\le c\lambda^{\frac{k+1}{2}} \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{(2^\nu\lambda)^{\frac{k+1}{2}+1}} (2^\nu\lambda)^{r+1} \cdot \omega(2^\nu\lambda) = c\lambda^r \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{k+1}{2}-r}} \omega(2^\nu\lambda) \le$$

$$\le c\lambda^r \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{k+1}{2}-r}} 2^\nu \omega(\lambda) \le c\lambda^r \omega(\lambda), \quad R = \{2^{\nu-1}\lambda \le |z-w| \le 2^\nu\lambda\}, \quad (22)$$

поскольку $\frac{k+1}{2} - r - 1 = 2(r+1) - r - 1 = r + 1 \ge 1$.

Таким образом, из оценок (19), (20) и (22) приходим при любых X' и X'' к соотношению

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar{z}}(z)| \left| \frac{z^{\pm}_{1/\sigma,0} - z}{z^{\pm}_{1/\sigma,0} - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z-w|} \le c|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(w) - w|^r \cdot \omega(|z^{\pm}_{1/\sigma,0}(w) - w|) \quad (23)$$

с постоянной c, не зависящей от X', X'' и $w \in \mathbb{R}$. Знак «$+$» или «$-$» в (23) выбирается в соответствии с тем, будет $w \in D_+$ или $w \in D_-$. Учитывая лемму 3 из [1], для $\sigma \geq 1$ получаем оценку

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar z}(z)| \left| \frac{z^{\pm}_{1/\sigma,0} - z}{z^{\pm}_{1/\sigma,0} - w} \right|^{k+1} \frac{dm_2(z)}{|z-w|} \leq C(E). \tag{24}$$

Привлекая соотношение (10), находим, что при $w \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq |F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| + |f(w)| \leq C(E, f). \tag{25}$$

3. В этом пункте проверим, что рассматриваемые функции F_σ имеют равномерные оценки на комплексной плоскости. Если $w = u + iv$, $w \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n)$, будем иметь

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} \frac{f'_{1\bar z}(z)}{z-w} dm_2(z) \right) = f_1(w) = 0. \tag{26}$$

Поэтому при таких w и $\eta = 1/\sigma$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) &= F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f_1(w) = \\
&= \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \int\limits_{E_1} f'_{1\bar z}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \times \\
&\times \left(- \left(\frac{z^{\pm}_{\eta,t}(z) - z}{z^{\pm}_{\eta,t}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z-w} \right) dm_2(z) = \\
&= \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_2} f'_{1\bar z}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \times \\
&\times \left(\left(\frac{z^{+}_{\eta,t}(z) - z}{z^{+}_{\eta,t}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z-w} \right) dm_2(z) + \\
&+ \int\limits_{Q'_N} d\mu'_N \int\limits_{Q''_N} d\mu''_N \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_3} f'_{1\bar z}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \times \\
&\times \left(\left(\frac{z^{-}_{\eta,t}(z) - z}{z^{-}_{\eta,t}(z) - w} \right)^{k+1} \frac{1}{z-w} \right) dm_2(z) = \\
&= S^+_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) + S^-_\sigma(w, Y'_N, Y''_N),
\end{aligned} \tag{27}$$

где $E_1 = E_{\rho_0(I_n)}$, $E_2 = E_{\rho_0(I_n)} \cap D_+$, $E_3 = E_{\rho_0(I_n)} \cap D_-$.

Выбираем L так, чтобы выполнялось равенство $\mathbb{R} \pm iL \cap E_{\rho_0}(I_n) = \emptyset$ при $n \in \mathbb{Z}$. Пусть имеем $w = u + iv, v = L + c^*_E$, с некоторым c^*_E (случай $v = -L + c^*_E$ рассматривается аналогично).

При $z \in D_- \bigcap \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n)$ выполняется

$$|z^-_{1/\sigma,0}(z) - z| \le \tilde{c}, \quad |z^-_{1/\sigma,0}(z) - w| \ge c|z - w|,$$

поэтому, учитывая (8) и (9), из (27) получаем оценку

$$|S^-_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \le c \int\limits_{Q'_N} d\mu'_n \int\limits_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} |f'_{1\bar{z}}(z)| \frac{1}{|z - w|^{k+1}} dm_2(z) \le c. \qquad (28)$$

В соотношении (28) и далее c могут обозначать различные постоянные, не зависящие от N, w и σ. При оценке $S^+_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)$ учтем, что функция $z^+_{\xi,t}(z)$ аналитична по t и при $t \in \mathbb{C}_+$, поэтому с постоянной $c^*_E > 0$, которую выберем позже в (36), имеем

$$S^+_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) = \int\limits_{Q'_N} d\mu'_n \int\limits_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}}(z) \frac{1}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{\mathbb{R}+iL+ic^*_E} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^m dt \times$$
$$\times \left(\frac{z^+_{\xi,t}(z) - z}{z^+_{\xi,t}(z) - w}\right)^{k+1} \frac{1}{z - w} dm_2(z). \qquad (29)$$

Лемма 1 из [1] влечет оценку с другой постоянной c'_0 при $t \in \mathbb{R}$:

$$|z^+_{1/\sigma,t}(z) - z| \le c'_0 |\sigma t + i|^4 |z^+_{1/\sigma,0}(z) - z|, \quad z \in D_+. \qquad (30)$$

Также в силу леммы 1 из [1] имеем

$$|z^+_{1/\sigma,t}(z) - z| \le c_E, \quad z \in \partial D_+, \quad \sigma \ge 1. \qquad (31)$$

Поскольку $(z^+_{1/\sigma,0}(z) - z)$ аналитична в D_+, то в силу нормировки на бесконечности функций φ_+ и ψ_+ для функции $(z^+_{1/\sigma,0}(z) - z)$ в D_+ действует принцип максимума, поэтому (31) влечет соотношение

$$|z^+_{1/\sigma,0}(z) - z| \le c_E, \quad z \in D_+, \quad \sigma \ge 1. \qquad (32)$$

Тогда из (31) и (32) следует, что (30) справедливо при $z \in D_+$ и $t \in \mathbb{C}_+$. Далее, при $t \in \mathbb{R}$, $z \in D_+$ имеем

$$\mathrm{Im}\left(z^+_{1/\sigma,t}(z) - z\right) \le \hat{c}_E, \qquad (33)$$

что получается из (32) и равенства $\mathrm{Im}(\varphi_+(z) + t) = \mathrm{Im}\varphi_+(z)$. Тогда (33) дает

$$\mathrm{Im} z^+_{1/\sigma,t}(z) \le \mathrm{Im} z + \hat{c}_E, \quad z \in D_+, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (34)$$

Поскольку функция $\mathrm{Im} z^+_{1/\sigma,t}(z)$ при фиксированном $z \in D_+$ является гармонической при $\mathrm{Im} t > 0$ функцией по t, непрерывной в $\bar{\mathbb{C}}_+$, то нормировка на бесконечности функций φ_+ и ψ_+ из соотношения (34) при $\mathrm{Im} t > 0$ дает неравенство

$$\mathrm{Im} z^+_{1/\sigma,t}(z) \le \mathrm{Im} t + \mathrm{Im} z + \hat{c}_E, \quad z \in D_+. \qquad (35)$$

Положим

$$c_E^* = 2\left(\hat{c}_E + \sup_{z\in E_{\rho_0}(I_n)} \mathrm{Im} z\right), \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{36}$$

Тогда при $t\in iL+\mathbb{R}+c_E^*,\ \mathrm{Im}w = L,\ z\in D_+\bigcap E_{\rho_0}(I_n)$ придем к неравенству

$$|z^+_{1/\sigma,t}(z) - w| \geq \left|\mathrm{Im}w - \mathrm{Im}z^+_{1/\sigma,t}(z)\right| \geq c_E^* - (\hat{c}_E + \mathrm{Im}z) \geq \hat{c}_E. \tag{37}$$

Затем при $\mathrm{Im}t = L + c_E^*$ получим

$$|(\sin t\sigma_1)|^m = \left|\left(\frac{1}{2i}\right)^m \left(e^{it\sigma_1} - e^{-it\sigma_1}\right)^m\right| = \left|\left(\frac{1}{2i}\right)^m e^{it\sigma}\left(1 - e^{-2it\sigma_1}\right)^m\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^m} e^{(c_E^*+L)\sigma}\cdot 2^m = e^{(c_E^*+L)\sigma}. \tag{38}$$

Собирая вместе оценки (38), (37), (32), (30), (16) из [1] и равенство (26), приходим при $\mathrm{Im}w = L$ (L выбрано после соотношения (27)) к неравенству

$$|S^+_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c\int\limits_{Q'_N} d\mu'_n \int\limits_{Q''_N} d\mu''_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} \mathrm{dist}^{r-1}(z, I_n)\omega(\mathrm{dist}(z, I_n))\frac{1}{\sigma_1^m} e^{(c_E^*+L)\sigma}\times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}+iL+ic_E^*} \frac{|dt|}{|t|^m}(\sigma|t|+1)^{4(k+1)}\cdot\frac{1}{|z-w|} dm_2(z) \leq c_m\sigma^{-m+4(k+1)}e^{(c_E^*+L)\sigma}. \tag{39}$$

Таким образом, из (27), (28) и (39) следует при $\mathrm{Im}w = L + c_E^*$ и любых Y'_N, Y''_N неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c + c_m\sigma^{-m+4(k+1)}e^{(c_E^*+L)\sigma}. \tag{40}$$

Оценки, аналогичные соотношениям (27)–(40), можно получить и при $\mathrm{Im}w = -L - c_E^*$ с рассмотрением D_- и D_+ соответственно вместо D_+ и D_-. Таким образом, имея в виду оценку, аналогичную (40), при $|\mathrm{Im}w| \leq L + c_E^*$ и любых Y'_N и Y''_N получаем неравенство

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)| \leq c + c_m\sigma^{-m+4(k+1)}e^{(c_E^*+L)\sigma}. \tag{41}$$

4. Закончим доказательство теоремы. Соотношение (41) показывает, что последовательность функций $\{F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N)\}_{N=1}^\infty$ образует нормальное семейство функций, из которого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{F_\sigma(w, Y'_{N_\varkappa}, Y''_{N_\varkappa})\}_{\varkappa=1}^\infty$, сходящуюся в силу (41) на компакте в $\mathbb{C}$ к целой функции $F_\sigma(w)$ экспоненциального типа σ.

Учитывая соотношения (10)–(28), при любых N получаем оценку

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \leq c|z^\pm_{\eta,0}(w) - w|^r\omega(|z^\pm_{\eta,0}(w) - w|), \quad w\in E \tag{42}$$

с постоянной c, независящей от N.

Учитывая соотношения (39) и (40) из [1], приходим при $w\in E$ к неравенствам

$$|w - x'_n| \geq \frac{1}{16}|I_n|, \quad |w - x''_n| \geq \frac{1}{16}|I_n|, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда (42) при $\eta = 1/\sigma$ дает оценку

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \le c|z^{\pm}_{\eta,0}(w) - w|^r \omega(|z^{\pm}_{\eta,0}(w) - w|) \le c d^r_{1+\eta}(w)\omega(d_{1+\eta}(w)). \quad (43)$$

Поскольку при рассматриваемом w справедливо неравенство $d_{1+1/\sigma}(w) \ge c/\sigma$, оценка (43) является неравенством, которое при таких w влечет утверждение теоремы, как покажет нижеследующее рассуждение. Если же при каком-то $n_0 \in \mathbb{Z}$ будет выполнено

$$|w - x'_{n_0}| < \frac{1}{16}|I_{n_0}| \quad \text{или} \quad |w - x''_{n_0}| < \frac{1}{16}|I_{n_0}|,$$

то проведем оценки лишь в случае $r = 0$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Пусть выполняется неравенство $|w - x'_{n_0}| \ge \frac{1}{16}|I_{n_0}|$ (при $|w - x''_{n_0}| \ge \frac{1}{16}|I_{n_0}|$ рассуждения аналогичны). Выберем $\varkappa_0$ так, чтобы неравенство $|n_0| < N_\varkappa$ выполнялось бы при $\varkappa \ge \varkappa_0$. Тогда, полагая в формулах (8)–(22) $\eta = 1/\sigma$ и учитывая (35) и (36) из [1], будем иметь

$$|F_\sigma(w, Y'_N, Y''_N) - f(w)| \le \int\limits_{Q'_{N_\varkappa}} \int\limits_{Q''_{N_\varkappa}} |z^{\pm}_{\eta,0}(w, X', X'') - w|^\alpha d\mu'_{N_\varkappa} d\mu''_{N_\varkappa} \le$$

$$\le c \cdot \frac{4}{|I_{n_0}|} \int\limits_{a^0_{n_0}}^{a^1_{n_0}} \frac{\eta^\alpha}{(|x'_{n_0} - w| + \eta^{1/2})^\alpha} dx'_{n_0} \le c_{2E,\alpha} \cdot \eta^\alpha = c_{2E,\alpha} \cdot \frac{1}{\sigma^\alpha}. \quad (44)$$

Постоянная $c_{2E,\alpha}$ в (44), как следует из анализа постоянных, участвующих в соотношениях (7)–(22), зависит лишь от E и α, но не зависит от $N_\varkappa$. Ранее было отмечено, что последовательности функций $F_\sigma(w, Y'_{N_\varkappa}, Y''_{N_\varkappa})$ в силу оценки (41) сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к функции F_σ экспоненциального типа σ, т. е. $F_\sigma \in T_\sigma$. Переходя в (44) к пределу при $\varkappa \to \infty$, получим оценку

$$|F_\sigma(w) - f(w)| \le c_{2E,\alpha} \cdot \frac{1}{\sigma^\alpha},$$

которая и доказывает теорему.

Теорема доказана.

Литература

1. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 644–650.

2. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115, N 2. P. 33–58.

3. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторах

Сильванович Ольга Васильевна — кандидат физико-математических наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор; nikolai.shirokov@gmail.com

APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS ON A COUNTABLE UNION OF SEGMENTS ON THE REAL AXIS. 2. PROOF OF THE MAIN THEOREM

Olga V. Silvanovich[1], *Nikolai A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii prospect, 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; olamamik@gmail.com

[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nikolai.shirokov@gmail.com

We proof in the present paper a theorem about approximation of a function defined on a countable union of segments of the real line by means of entire functions of exponential type. The approximating function is supposed to belong to a Holder class $\alpha, 0 < \alpha < 1$. The set $E \subset \mathbb{R}$ consists of disjoint segments $[a_n, b_n], -\infty < n < \infty$ such that $b_n - a_n \asymp b_k - a_k$ for any n and k and $a_{n+1} - b_n \asymp b_n - a_n$ for any n. The function f defined on E supposed to be bounded by a constant M and satisfying the condition $|f(x) - f(y)| \le c_0|x - y|^\alpha$, $x, y \in [a_n, b_n]$, $0 < \alpha < 1$. The construction of an approximation of f by entire functions we begin from a construction of a series of domains D_+ and D_- depending of sequens $\{x'\}_{n\in\mathbb{Z}}$ and $\{x''\}_{n\in\mathbb{Z}}$: x'_n, $x''_n \in [a_n, b_n]$. We introduce a special conformed mappings of D_+ and D_- to themselves and use these mapping to form kernels $R_k(z, w, \xi, \zeta)$.

Afterwards we combine a continuation of a function f from the set E to the whole complex plane $\mathbb{C}$ from our first part of this paper and kernels $R_k(z, w, \xi, \zeta)$. We get as a result a series of entire functions of exponential type depending on sequences $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ and $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Then we use sequences $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ and $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ to construct a final approximating entire function F_σ. Refs 3.

Keywords: Holder classe σ, entire function of exponential type, approximation on subsets of real line.

References

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., “Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, issue 4, 644–650 (2016) [in Russian].

2. Dyn’kin E. M., “Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale”, *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**(2), 33–58 (1980).

3. Dyn’kin E. M., “The pseudoanalytic extensions”, *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Для цитирования: Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 2. Доказательство основной теоремы // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 53–63. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.108

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the main theorem. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 53–63. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.108