

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены достаточные условия применимости закона повторного логарифма к последовательности зависимых случайных величин. Следствием этого результата является теорема о законе повторного логарифма для последовательности m -ортогональных случайных величин. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, последовательности m -ортогональных случайных величин.

Теорема 1. Пусть $\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве, $\{a_n; n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность положительных чисел, такая что $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $a_{n+r} \geq a_n(1 - \varepsilon)$ для всех $r \geq 1$ и всех достаточно больших n (условие А). Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left(\max_{[c^n] \leq k < [c^{n+1}]} Y_k > (1 + \varepsilon)a_{[c^n]} \right) < \infty \quad (1)$$

для некоторого $c > 1$ и любого $\varepsilon > 0$. Тогда выполняется

$$\limsup \frac{Y_n}{a_n} \leq 1 \quad \text{н. н.} \quad (2)$$

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число, $c > 1$. В силу условия А имеем

$$P(Y_n > (1 + \delta)a_n \quad \text{б. ч.}) \leq P \left(\max_{[c^n] \leq k < [c^{n+1}]} Y_k > (1 + \delta)a_{[c^n]}(1 - \varepsilon) \quad \text{б. ч.} \right)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$P(Y_n > (1 + \delta)a_n \quad \text{б. ч.}) \leq P \left(\max_{[c^n] \leq k < [c^{n+1}]} Y_k > \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) a_{[c^n]} \quad \text{б. ч.} \right),$$

если положительное число ε выбрать столь малым, что $(1 + \delta)(1 - \varepsilon) > 1 + \delta/2$.

Взяв число c удовлетворяющим условию (1) и применив лемму Бореля–Кантелли, приходим к неравенству (2).

Условие А представляет собой ослабление условия неубывания нормирующей числовой последовательности $\{a_n\}$, позволяющее применить теорему 1 к последовательностям случайных величин при нормирующей последовательности, которая

не является неубывающей, но удовлетворяет условию А. В частности, с помощью теоремы 1 можно получить достаточные условия применимости закона повторного логарифма к суммам m -зависимых случайных величин. Напомним, что последовательность случайных величин $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ называется *последовательностью m -зависимых случайных величин*, где m есть целое неотрицательное число, если случайные векторы (X_p, \dots, X_q) и (X_r, \dots, X_s) независимы при любых целых p, q, r, s , удовлетворяющих условиям $1 \leq p \leq q < r \leq s$ и $r - q > m$.

Понятие последовательности m -зависимых случайных величин введено Хёфдингом и Роббинсом в классической работе [1], содержащей также условия применимости центральной предельной теоремы к последовательностям m -зависимых случайных величин. К настоящему времени литература по предельным теоремам для сумм m -зависимых случайных величин весьма обширна.

В [2] введено понятие последовательности m -ортогональных случайных величин. Пусть m — целое неотрицательное число. Будем говорить, что заданная на некотором вероятностном пространстве последовательность случайных величин $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ есть *последовательность m -ортогональных случайных величин*, если $EX_n^2 < \infty$ для любого n и $E(X_k X_j) = 0$ при условии $|k - j| > m$. В частности, последовательность 0-ортогональных случайных величин есть последовательность ортогональных случайных величин. Если $\{X_n\}$ есть последовательность m -зависимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями, то она является последовательностью m -ортогональных случайных величин. Последнее утверждение остается верным, если в нем заменить условие m -зависимости более слабым условием попарной m -зависимости. Заметим, что проверка выполнения условия m -ортогональности значительно проще, чем проверка условия m -зависимости или попарной m -зависимости. Исследование предельных теорем для последовательностей m -ортогональных случайных величин представляет определенный интерес с учетом того большого внимания, которое было уделено предельным теоремам для сумм ортогональных случайных величин и сумм m -зависимых случайных величин. Приведем одну теорему о законе повторного логарифма для последовательностей m -ортогональных случайных величин.

Теорема 2. Пусть $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность m -ортогональных случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $B_n = ES_n^2$, $\chi(n) = (2B_n \log \log B_n)^{1/2}$. Пусть

$$B_n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\frac{EX_n^2}{B_n} \rightarrow 0 \quad (4)$$

при $n \rightarrow \infty$ и выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left(\max_{[c^n] \leq k < [c^{n+1}]} S_k > (1 + \varepsilon) \chi([c^n]) \right) < \infty \quad (5)$$

для некоторого $c > 1$ и любого $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\limsup \frac{S_n}{\chi(n)} \leq 1 \quad \text{н. н.} \quad (6)$$

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет условию А. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
B_n &= E(S_{n+1} - X_{n+1})^2 = B_{n+1} + EX_{n+1}^2 - 2E(S_{n+1}X_{n+1}) = \\
&= B_{n+1} + EX_{n+1}^2 + 2\theta (ES_{n+1}^2 EX_{n+1}^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

в силу неравенства Буняковского–Коши, где $|\theta| \leq 1$. Поэтому

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} = 1 + \frac{EX_{n+1}^2}{B_{n+1}} + 2\theta \left(\frac{EX_{n+1}^2}{B_{n+1}} \right)^{1/2}.$$

Условие (4) приводит к соотношению

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Для любого целого $p \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
B_{n+p} &= B_n + E(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})^2 + 2E[S_n(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})] \geq \\
&\geq B_n + 2E[S_n(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})],
\end{aligned}$$

$$E[S_n(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})] = E[(X_{n-m+1} + \dots + X_n)(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})]$$

при $n > m$ в силу условия m -ортогональности. Используя это же условие, нетрудно убедиться, что выполняется неравенство

$$E|S_n(X_{n+1} + \dots + X_{n+p})| \leq \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} |E(X_{n-j}X_{n+i})|.$$

Поэтому

$$B_{n+p} \geq B_n - 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} |E(X_{n-j}X_{n+i})| \geq B_n - 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} (EX_{n-j}^2 EX_{n+i}^2)^{1/2}. \quad (8)$$

Для любого целого фиксированного p имеем

$$\frac{EX_{n+p}^2}{B_n} = \frac{EX_{n+p}^2}{B_{n+p}} \frac{B_{n+p}}{B_{n+p-1}} \dots \frac{B_{n+1}}{B_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9)$$

вследствие (4) и (7). Из (8) и (9) следуют неравенства

$$B_{n+s} \geq B_n \left(1 - 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} \left(\frac{EX_{n-j}^2}{B_n} \frac{EX_{n+i}^2}{B_n} \right)^{1/2} \right),$$

$$B_{n+s} \geq B_n(1 - \varepsilon) \quad (10)$$

для любых $\varepsilon > 0$, $s \geq 1$ и всех достаточно больших n . Таким образом, последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет условию А.

Неравенство (10) сохраняет силу, если в нем заменить B_n на $\chi(n) = (2B_n \log B_n)^{1/2}$. Таким образом, последовательность $a_n = \chi(n)$ удовлетворяет

условию А. Условие (1) теоремы 1 также выполнено в силу (5) для $Y_n = S_n$ и $a_n = \chi(n)$. По теореме 1 справедливо соотношение (6).

Теорема 2 сохраняет силу, если в ней заменить условие m -ортогональности условием m -зависимости (с сохранением остальных условий теоремы) или даже более слабым условием попарной m -зависимости. Полученный таким образом результат представляет собой обобщение теоремы 2 из [3], в которой предполагались выполненными условия (3) и (4), а вместо (5) было наложено следующее условие: для любого $b > 1$ существуют положительные постоянные C и δ , такие что выполняется неравенство

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq b\chi(n)\right) \leq C(\log B_n)^{-1-\delta}$$

для всех достаточно больших n . Теорема из [2] отличается от последнего результата заменой условия m -зависимости условием m -ортогональности.

Литература

1. Hoeffding W., Robbins H. The central limit theorem for dependent random variables // *Duke Math. J.* 1948. Vol. 15, N 3. P. 773–780.
2. Петров В. В. Последовательности m -ортогональных случайных величин // *Зап. науч. семин. ЛОМИ.* 1982. Т. 119. P. 198–202.
3. Петров В. В. О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // *Зап. науч. семин. ЛОМИ.* 1980. Т. 97. P. 186–194.

Статья поступила в редакцию 19 мая 2016 г.; рекомендована в печать 6 октября 2016 г.

Сведения об авторе

Петров Валентин Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор;
petrov2v@mail.ru

ON THE LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR SEQUENCES OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Valentin V. Petrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
petrov2v@mail.ru

Some sufficient conditions are obtained for the applicability of the law of the iterated logarithm to sequences of dependent random variables. By means of this result we get a theorem on the law of the iterated logarithm for a sequence of m -orthogonal random variances. Refs 3.

Keywords: law of the iterated logarithm, sequences of m -orthogonal random variables.

References

1. Hoeffding W., Robbins H., “The central limit theorem for dependent random variables”, *Duke Math. J.* **15**(3), 773–780 (1948).
2. Petrov V. V., “Sequences of m -orthogonal random variables”, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **119**, 198–202 (1982) [in Russian].
3. Petrov V. V., “Law of the iterated logarithm for sequences of dependent random variables”, *J. Math. Sci* **24**(5), 611–617 (1984).

Для цитирования: Петров В. В. О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 49–52. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.107

For citation: Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm for sequences of dependent random variables. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 1, pp. 49–52. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.107