Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики–процессов управления

В.Э. Вишневский, О.А. Иванова, И.А. Цылёва

Аппроксимация Паде и интерполяционные последовательности в задачах управления

Учебное пособие

Санкт-Петербург
СПбГУ
2017

УДК 519.3:62–50

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии
факультета прикладной математики-процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

Вишневский В.Э., Иванова О.А., Цылева И.А. АППРОКСИМАЦИЯ ПАДЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ: Учебное пособие.— СПб: СПбГУ, 2017.— 45 с.

В пособии рассматривается систематическое изложение многомерной аппроксимации Паде аналитического продолжения решения задачи Коши. Рассмотрены вопросы интерполяции по равномерно разделенным последовательностям решений задачи Коши в проблемах наблюдения и идентификации. Используется аппарат теории функций комплексной переменной. Пособие предназначено для студентов старших курсов факультетов прикладной математики университетов и вузов. Библиогр. 28 назв.

Компьютерная верстка и дизайн выполнены О.А. Ивановой.

Глава 1

Аппроксимация Паде преобразований полиномиальных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрены методы лучевой аппроксимации Паде в C^n. Доказывается ряд фактов о многомерной аппроксимации Паде голоморфного в области $U \triangleq U_{R_1>0}(0) \times \cdots \times U_{R_n>0}(0)$, где $U_{R_k>0}(0)$ — поликруг, решения $q(Q, \varepsilon, t)$ задачи Коши аналитической системы вида:

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = \varphi(q, \varepsilon, t), \quad q_{\varepsilon=0} = Q(t), \quad \varepsilon \in [0, \hat{\varepsilon}], \quad t \in [0, T],$$

где $\forall\, k \in \overline{1:n}$ φ_k — аналитична в $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}} \supseteq U \times [0, \hat{\varepsilon}]$.

Заранее не предполагается, что $Q(t) \in U$, однако считается, что выполнены некоторые “обобщенные"условия однозначности всех координатных функций $q_k(\theta \cdot \xi, \varepsilon, t)$ по $\xi \in C^1$ в своих естественных областях определения Вейерштрасса W_{q_k}. Большая часть результатов опирается на работы Гончара А.А. При $\varphi = \dfrac{\partial S(p, q, \varepsilon, t)}{\partial p}$ из методики данной работы вытекает так называемая *лучевая* аппроксимация Паде–Шенкса преобразований Ли–Деприи [1] ld_t: $Q \to q$ за их поликругом сходимости, которые преобразуют исходную систему дифференциальных уравнений $\dot{q} = f(q, \varepsilon, t)$ в укороченную $\dot{Q} = AQ$.

§1. $(\mathfrak{m}, 1)$ — аппроксимация

С помощью преобразований Деприи полиномиальной системы дифференциальных уравнений [2] был получен локально голоморфный общий интеграл в форме Коши, который в специально рассматриваемом здесь случае удобно записать в виде

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z), \quad z \in C^n, \tag{1}$$

где f_k — однородный полином степени k, а f — голоморфна в поликруге $U_R = U_R(0)$, $R > 0$. Рассмотрим $(\mathfrak{m}, k)$ — приближение Паде–Шенкса $f_\theta^{(\mathfrak{m},k)}(\xi)$ при $k = 1$ для функции $f_\theta(\xi) \triangleq f(\theta\xi)$, где $z \triangleq \theta\xi$, $\theta \in C^n$, $\xi \in C^1$.

Из работы [4] следует, что

$$f_\theta^{(\mathfrak{m},k)}(\xi)=\frac{\begin{vmatrix} \xi^{\mathfrak{m}-k+1}f_{\mathfrak{m}-k+1}(\theta) & \dots & \xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)\\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta) & \dots & \xi^{\mathfrak{m}+k}f_{\mathfrak{m}+k}(\theta)\\ \sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}-k} f_i(\theta)\xi^i & \dots & \sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}} f_i(\theta)\xi^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi^{\mathfrak{m}-k+1}f_{\mathfrak{m}-k+1}(\theta) & \dots & \xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)\\ \xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta) & \dots & \xi^{\mathfrak{m}+k}f_{\mathfrak{m}+k}(\theta)\\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}\stackrel{\triangle}{=}\frac{p_\theta^{(m,k)}(\xi)}{q_\theta^{(m,k)}(\xi)}, \qquad (2)'$$

и тогда для $f_\theta^{(\mathfrak{m},1)}(\xi)$ имеем соотношения

$$f_\theta^{(\mathfrak{m},1)}(\xi)=\frac{p_\theta^{(m,1)}(\xi)}{q_\theta^{(m,1)}(\xi)}=\frac{\begin{vmatrix} \xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta) & \xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)\\ \sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}-1} f_i(\theta)\xi^i & \sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}} f_i(\theta)\xi^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta) & \xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)\\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{\xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta)\sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}} f_i(\theta)\xi^i-\xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)\sum\limits_{i=0}^{\mathfrak{m}-1} f_i(\theta)\xi^i}{\xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta)-\xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta)}. \qquad (2)$$

Из асимптотического соотношения Паде следует импликация [3]

$$f_\theta(\xi)-f_\theta^{(\mathfrak{m},1)}(\xi)=O(\xi^{\mathfrak{m}+2})\cdot(\xi^{\mathfrak{m}}f_{\mathfrak{m}}(\theta)-\xi^{\mathfrak{m}+1}f_{\mathfrak{m}+1}(\theta))^{-1} \iff$$

$$\iff f(z)-f^{(\mathfrak{m},1)}(z)=\frac{O(\xi^{\mathfrak{m}+2})}{f_{\mathfrak{m}}(z)-f_{\mathfrak{m}+1}(z)}, \quad \xi\in C^1 \qquad (3)$$

Откуда следует, что необходимо, чтобы не имело место свойство: $\forall\mathfrak{m}$ НСНМ $f_{\mathfrak{m}}(z)-f_{\mathfrak{m}+1}(z)=0$, где z — фиксировано.

Рассмотрим это отдельно. Пусть НСНМ по $\mathfrak{m}$, т.е. $\forall\mathfrak{m}\geq\mathfrak{m}_0$ следует, что

$$f_{\mathfrak{m}}(z)-f_{\mathfrak{m}+1}(z)=0. \qquad (4)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\mathfrak{m}_0 = 1$ и тогда

$$f_1(z) = f_2(z) = \cdots = f_{\mathfrak{m}}(z) = \cdots = f_{\mathfrak{m}+k}^{(z)} = \cdots , \tag{5}$$

т.е. $z \in \mathfrak{M}$ — алгебраическому многообразию, определенному счетной бесконечной системой уравнений

$$\mathfrak{M}: \quad \begin{array}{l} f_2(\tilde{z}) = f_1(\tilde{z}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_{\mathfrak{m}}(\tilde{z}) = f_1(\tilde{z}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \tag{6}$$

где f_i — однородны, $\deg f_i = i$, $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$ — свободная переменная. По теореме Гильберта о базисах существует $\widehat{\mathfrak{m}} < +\infty$ такое, что система (6) эквивалентна системе

$$\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}: \quad \begin{array}{l} f_2(\tilde{z}) = f_1(\tilde{z}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\tilde{z}) = f_1(\tilde{z}), \end{array} \tag{7}$$

где, не нарушая общности, можно считать, что индексы у f_k изменяются от 2 до $\widehat{\mathfrak{M}}$. При этом очевидно, что

$$\dim_C \mathfrak{M} < n. \tag{8}$$

Пусть $M \stackrel{\triangle}{=} f_1(z) = \cdots = f_{\widehat{\mathfrak{m}}}(z) \in C^1)$[1]. Рассмотрим функцию $f \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\tilde{z})$ при $\tilde{z} \stackrel{\triangle}{=} \rho z$, тогда получим, что

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\rho^k = M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = M \cdot (1-\rho)^{-1}, \tag{9}$$

где $1 \neq \rho \in C^1$, т.е. функция $f(\tilde{z})$ определена на всем луче $\rho \cdot z$ ($\rho \in C^1$) кроме точки z (когда $\rho = 1$). Более того, если $z^* \in \mathfrak{M}$, то никакая из точек $z^* \cdot \rho \,\overline{\in}\, \mathfrak{M}$ при $1 \neq \rho \in C^1$, так как f_k однородны. Т.е., если

$$L_{z^*} \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{z} \mid \tilde{z} = \rho \cdot z^*, \quad 1 \neq \rho \in C^1\} \tag{10}$$

луч без точки z^* в C^n, то $\mathfrak{M} \cap (U_{z^* \in \mathfrak{M}} L_{z^*}) = \emptyset$.

[1] Т.е. M — значение f_1 в точке z.

Таким образом, $(\mathfrak{m},1)$ — приближение Паде–Шенкса построимо почти для всякого (по мере Лебега в C^n) элемента $z \in C^n$. Аналогичная ситуация имеет место и при $(\mathfrak{m},k)$-приближении Паде–Шенкса $f_\theta^{(\mathfrak{m},k)}(\xi)$. На самом деле, как будет показано ниже, в сути дела лежит "емкость"(в частности α- и h-мера Хаусдорфа).

§2. Оценка константы в символе $O(\xi^{\mathfrak{m}+2})$

Рассмотрим последовательности аппроксимаций Паде–Шенкса $f^{(\mathfrak{m},1)}(z)$ и $f^{(\tilde{\mathfrak{m}},1)}(z)$ при $\mathfrak{m} \neq \tilde{\mathfrak{m}}$, т.е. имеем

$$\begin{aligned} f(z) - f^{(\mathfrak{m},1)}(z) &= \frac{O(\xi^{\mathfrak{m}+2})}{f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)}, \\ f(z) - f^{(\tilde{\mathfrak{m}},1)}(z) &= \frac{O(\xi^{\tilde{\mathfrak{m}}+2})}{f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Вычитая эти соотношения друг из друга, получим, что

$$f^{(\tilde{\mathfrak{m}},1)}(z) - f^{(\mathfrak{m},1)}(z) = \frac{O(\xi^{\mathfrak{m}+2})}{f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)} - \frac{O(\xi^{\tilde{\mathfrak{m}}+2})}{f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)},$$

$$\left|f^{(\tilde{\mathfrak{m}},1)}(z) - f^{(\mathfrak{m},1)}(z)\right| \leq \frac{|O(\xi^{\mathfrak{m}+2})|}{|f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)|} + \frac{\left|O(\xi^{\tilde{\mathfrak{m}}+2})\right|}{|f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)|} \leq \tag{2}$$

$$\leq \frac{C_z \cdot |\xi^{\mathfrak{m}+2}|}{|f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)|} + \frac{C_z \cdot \left|\xi^{\tilde{\mathfrak{m}}+2}\right|}{|f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)|}, \quad \xi \in C^1,$$

в предположении, что константа C_z зависит только от точки z, для которой строится приближение Паде. Ниже увидим, что это не всегда так. Из соотношений (2) имеем

$$C_z \geq \Xi(\mathfrak{m},\tilde{\mathfrak{m}}) \triangleq$$
$$\triangleq \frac{|f^{(\tilde{\mathfrak{m}},1)}(z) - f^{(\mathfrak{m},1)}(z)| \cdot |f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)| \cdot |f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)|}{|\xi^{\mathfrak{m}+2}| \cdot |f_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z) - f_{\tilde{\mathfrak{m}}+1}(z)| + |\xi^{\tilde{\mathfrak{m}}+2}| \cdot |f_{\mathfrak{m}}(z) - f_{\mathfrak{m}+1}(z)|}, \tag{3}$$

где ξ — некоторое фиксированное число, причем $|\xi| < 1$ и $\theta\xi = z$. Поэтому θ также фиксированный вектор из C^n. Таким образом, в качестве C_z достаточно взять

$$C_z \triangleq \overline{\lim_{\mathfrak{m}\to\infty}} \ \overline{\lim_{\substack{\tilde{\mathfrak{m}}\to\infty \\ \mathfrak{m}\neq\tilde{\mathfrak{m}}}}} \ \Xi(\mathfrak{m},\tilde{\mathfrak{m}}). \tag{4}$$

Ниже покажем, что асимптотическая константа C_z в общем случае зависит еще и от других параметров аппроксимации. Это было установлено Перроном и Паде [4]. Интерполяционная дробь $f_\theta^{(\mathtt{m},n)}(\xi)$ из формулы $(2)'$ сократима, $\deg_\xi p_\theta^{(\mathtt{m},n)} \le \mathtt{m}n+\mathtt{m}$, $\deg_\xi q_\theta^{(\mathtt{m},n)} \le \mathtt{m}n+n$ и полиномы $p^{(\mathtt{m},n)}$ и $q^{(\mathtt{m},n)}$ имеют $\mathtt{m}n$-кратный ноль. После сокращения $p^{(\mathtt{m},n)}$ и $q^{(\mathtt{m},n)}$ на ξ^{mn} получим дробь $p^{(\mathtt{m},n)}/q^{(\mathtt{m},n)} = \tilde{p}^{(\mathtt{m},n)}/\tilde{q}^{(\mathtt{m},n)}$, в которой $\deg_\xi \tilde{p}^{(\mathtt{m},n)} \le m$, $\deg_\xi \tilde{q}^{(\mathtt{m},n)} \le n$, и которая единственна [4,5]. Будем считать, что $p_\theta^{(\mathtt{m},n)}/q_\theta^{(\mathtt{m},n)}$ означает уже сокращенную дробь, т.е. $\deg_\xi p_\theta^{(\mathtt{m},n)} \le m$ и $\deg_\xi q_\theta^{(\mathtt{m},n)} \le n$. Согласно [4] имеем соотношение (в общем случае $d_{\mathtt{m},n} \ne 0$)

$$f_\theta(\xi) \cdot q_\theta^{(\mathtt{m},n)}(\xi) - p_\theta^{(\mathtt{m},n)}(\xi) = \frac{1}{d_{\mathtt{m},n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \xi^{\mathtt{m}+n+k}, \tag{5}$$

где

$$A_k \;\triangleq\; \sigma\left[t^{\mathtt{m}+n+k} \cdot \mathcal{D}_{\mathtt{m},n}\left(\frac{1}{t}\right)\right], \tag{6}$$

$$\mathcal{D}_{\mathtt{m},n}(t) \;\triangleq\; \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^{\mathtt{m}} \\ c_{n+1} & c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-\mathtt{m}+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-\mathtt{m}+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+\mathtt{m}} & c_{n+\mathtt{m}-1} & c_{n+\mathtt{m}-2} & \dots & c_n \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$c_k \triangleq 0, \quad \forall\, k < 0, \quad d_{\mathtt{m},n} \triangleq |(c_{n+i-j})_{ij=1}^{\mathtt{m}}, \tag{8}$$

$$\forall\, k \;\ge\; 0 \Rightarrow c_k = f_k(\theta). \tag{9}$$

Символ σ означает линейный функционал, определенный в пространстве полиномов следующим условием:

$$\sigma: \quad P_{C^1}[t] \to C^1, \qquad \sigma[t^k] \;\triangleq\; c_k. \tag{10}$$

Из формул (5)–(10) рекуррентно определяется полная асимптотическая константа C_z в символе O

$$C \;\triangleq\; C_z = d_{\mathtt{m},n}^{-1} \cdot \sigma\left[\mathcal{D}_{\mathtt{m},n}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{(tz)^{\mathtt{m}+n}}{1-tz}\right]. \tag{11}$$

Примеры [4].

1^0. Ряд $f = \sum_{k=0}^{\infty} g^k \cdot (1+g^k)^{-1} \cdot z^k$, $0 < |g| < 1$, сходится лишь в круге $|z| < |g|^{-1}$. Однако последовательность дробей $f^{(\mathtt{m},\mathtt{m})}(z)$, т.е. диагональная последовательность таблицы Паде для $f(z)$ сходится к $f(z)$ на всей плоскости C^1.

2^0. Любая последовательность дробей $\left\{f^{(\mathfrak{m}_k,n_k)}(z)\right\}$ таблицы Паде для e^z сходится к e^z во всей плоскости C^1, если $\lim\limits_{k\to+\infty}(\mathfrak{m}_k+n_k)=+\infty$. В работе [4] рассмотрено большое число задач аппроксимации Паде для функций (аналитических) одной переменной $z\in C^1$.

§3. Диагональная аппроксимация Паде

Возвращаясь к формуле (1.1), напишем

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z), \tag{1}$$

f_k — однородный полином, $\deg f_k=k$, $k\geq 0$. Пусть точка $z^*\in U_r(0)$, где $U_r(0)$ — поликруг полирадиуса $r=(r_1,\dots,r_n)$, $r_i>0$, в котором функция $f(z)$ аналитична. Значит числовой ряд

$$f(z^*)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z^*)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k \tag{2}$$

сходится. Можно было бы не требовать аналитичности f в $U_r(0)$, а предположив сходимость числового ряда (2), иметь аналитичность f в поликруге $U_{z^*_{|\dots|}}(0)$ полирадиуса $z^*_{|\dots|}=(|z^*_1|,\dots,|z^*_n|)$ согласно лемме Абеля. Подставим в соотношение (2) вместо z^* величину $z^*\cdot\rho$, $\rho\in C^1$, тогда

$$f(\rho\cdot z^*)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(\rho\cdot z^*)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z^*)\cdot\rho^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\rho^k, \tag{3}$$

где при фиксированной точке z^* величины $f_k(z^*)=C_k$ — фиксированы для $k\geq 0$. Будем рассматривать функцию φ одной комплексной переменной $\rho\in C^1$ из формулы (3).

Введем обозначение $z\stackrel{\triangle}{=}\rho$, тогда имеем

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\qquad z\in C^1. \tag{4}$$

Если вычислено значение $\varphi(z')$ при каком-либо значении $z'\in C^1$, то однозначно определено значение $f(\rho'\cdot z^*_1,\dots,\rho'\cdot z^*_n)$, где $\rho'=z'$. Заметим, что

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \cdot |z|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|, \quad c_n \stackrel{\triangle}{=} C_n \tag{5}$$

при $|z| \le 1$, но последняя сумма в (5) сходится абсолютно (в формуле (1) — степенной ряд, имеет место лемма Абеля). Поэтому ряд в (4) абсолютно сходится в замкнутом единичном круге. Существует[2] некоторая открытая область $\mathcal{D} \supset \bar{S}_{r=1}(0)$, в которой функция $\varphi(z)$ аналитична. Заметим также, что по теореме Бореля [6] числа c_k, какими бы они ни были, являются коэффициентами Тейлора для некоторой φ в нуле[3]. Поскольку радиус круга $S_{r=1}(0)$, $r = 1 > 0$ положителен, то по формулам Коши–Адамара $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|} < \infty$. Тогда согласно [7, теорема 1.2.1] всегда существует целая функция экспонециального типа $A(z)$ такая, что $A(k) = C_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, называемая функцией коэффициентов. Пусть множество $\bar{K} \subset C^1$ является индикаторной диаграммой [7] для $A(z)$, соответствующей последовательности $\{C_k\}_0^\infty$. Тогда по теореме Карлсона [7] функция $\varphi(z)$ из формулы (4), т.е. $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A(k) \cdot z^k$ при любом C_0 регулярна и однозначна в содержащей точку $z = 0$ связной части множества $C^1 \setminus \{e^{-z} | z \in K\}$; в случае, если множество $\{e^{-z} | z \in K\}$ не разделяет точки 0 и ∞, т.е. если ширина множества K (см. [7]) в направлении мнимой оси меньше 2π, функцию $\varphi(z)$ можно продолжить аналитически в бесконечно удаленную точку по одному из радиусов и в окрестности ∞ справедливо разложение

$$\varphi(z) = C_0 - \sum_{k=1}^{\infty} A(-k) \cdot z^{-k}, \tag{6$'$}$$

$$A(\tau) = (2\pi\, i)^{-1} \int\limits_{\Gamma} \varphi(e^{-\sigma}) e^{\tau\sigma} d\sigma, \tag{6}$$

где Γ — контур, отображаемый функцией $z = e^{-\sigma}$, когда z пробегает контур γ, охватывающий нуль. Для изучаемой задачи интерес может представлять ряд важных теорем об аналитическом продолжении [7]. Однако перейдем к конструктивной реализации аппроксимации Паде для аналитической в области $\mathcal{D} \supset S_1(0)$ и однозначной в компоненте связности

[2]Предполагая функцию φ голоморфной в замкнутом круге $\bar{S}_1(0)$, имеем, что $\exists$ область $D \supset \bar{S}_1(0)$, где φ аналитична, голоморфна. В противном случае, если φ не продолжима в D, то в $\operatorname{int} \bar{S}_1(0)$ φ сколь угодно точно аппроксимируется рядом (4) и проблемы аппроксимации φ исчерпана согласно (4)

[3]При этом возможно, что φ не аналитична, а лишь $\varphi \in C^{(\infty)}$.

$C^1 \backslash \{e^{-z} |\ z \in K\}$, содержащей $z = 0$, функции $\varphi(z)$. Фактически, далее геометрия множества K не потребуется. В настоящее время наиболее перспективной оказывается диагональная аппроксимация Паде $f^{(m,m)}(z)$ для функции $\varphi(z)$. Не нарушая общности можно считать, что $\mathcal{D} = S_T(0)$, $T > 1$, так как $\mathcal{D}$ — открыта и $\mathcal{D} \supset S_1(0)$. Пусть множество $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}$, $\alpha_{ni} \in C^1$, $i \in \overline{1:n}$ не имеет при $n \to \infty$ предельных точек по модулю меньших $A > 1$. Пусть $r_n(z)$ — рациональная функция вида

$$r_n(z) = \frac{b_{n0}z^n + b_{n1}z^{n-1} + \cdots + b_{nn}}{(z - \alpha_{n1})(z - \alpha_{n2}) \ldots (z - \alpha_{nn})} \tag{7}$$

наилучшего приближения $\varphi(z)$ на единичной окружности $S_1(0)$ в смысле $L_2(S_1(0))$ — средних квадратичных. Тогда по теореме Уолша [13] последовательность $r_n(z)$ сходится к $\varphi(z)$ при $|z| < (TA^2+T+2A)(2AT+A^2+1)^{-1}$, и равномерно при $|z| \leq Z < (TA^2 + T + 2A)(2AT + A^2 + 1)^{-1}$. Очевидно вопрос построения последовательности $r_n(z)$ из (7) с указанными свойствами решается положительно для $L_2(S_1(0))$. Аналогичная теорема для $\varphi(z)$ (нашего случая) работает в чебышевской и $L_2(S_1(0))$-метриках.

Т е о р е м а [8]. Пусть множество $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn} \in C^1$ не имеет предельных точек по модулю меньших числа $A > 1$, $\pi_n(z)$ — последовательность рациональных функций вида

$$\pi_n(z) = \frac{b_{n0}z^n + b_{n1}z^{n-1} + \cdots + b_{nn}}{(z - \alpha_{n1})(z - \alpha_{n2}) \ldots (z - \alpha_{nn})} \tag{8}$$

наилучшего приближения $\varphi(z)$ на окружности $S_1(0)$ в смысле Чебышева или $L_p(S_1(0))$, $p > 0$ или в смысле $L_p(\{z :\ |z| \leq 1\})$, $p > 0$ с положительной непрерывной весовой функцией в каждом из этих случаев. Тогда последовательность $\pi_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(z)$ при $|z| < (A^2T + T + 2A)(A^2 + 2AT + 1)^{-1}$ и равномерно $\pi_n(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(z)$ при $|z| \leq Z < (A^2T + T + 2A)(A^2 + 2AT + 1)^{-1}$. Причем в каждом из этих случаев имеет место оценка

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left[\max_{z\in S_1(0)} |\varphi(z) - \pi_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{A + T}{1 + AT}. \tag{9}$$

Аналитическая структура оценки из формулы (9) оказывается решающей для последующего изложения. Так, если последовательность рациональных функций $r_n(z)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, т.е. тогда она по крайней мере сходится в области D (не содержащей предельных точек полюсов функций $r_n(z)$ при $n \to \infty$), и вместо (9) выполняется более сильное условие

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_{z\in D}|\varphi(z)-r_n(z)|\right]^{\frac{1}{n}}=0, \tag{10}$$

то последовательность $r_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(z)$, $\varphi(z)$ аналитична в каждой точке $P \in \bar{C}^1$ кроме предельных точек полюсов функций $r_n(z)$ при $n \to \infty$ и точек, отделенных от D посредством линий из этих предельных точек. Сходимость является равномерной в любой замкнутой области D_1 точек P, не содержащей предельных точек полюсов функций $r_n(z)$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_{z\in D_1}|\varphi(z)-r_n(z)|\right]^{\frac{1}{n}}=0. \tag{11}$$

Т.е. (11) определяет так называемую “быструю"сходимость [5, 9]. Заключение вышеприведенного утверждения справедливо и в случае, когда D — замкнутое с односвязным дополнением, содержащее более одной точки. Эти результаты об аппроксимации $\varphi(z)$ рациональными функциями $r_n(z)$ позволяют получить новые утверждения об аппроксимации функции $\varphi(z)$ дробями Паде $f^{(k,k)}(z)$ и исследовать типы сходимости $f^{(k,k)}(z)$ к $\varphi(z)$. При этом дроби $f^{(k,k)}(z)$ конструируются по соответствующим специально подобранным [5] функциям $r_n(z)$ при получении оценок погрешностей, но с другой стороны в силу единственности дробей Паде $f^{(\mathfrak{m},\mathfrak{m})}(z)$ для $\varphi(z)$ элементы $f^{(\mathfrak{m},\mathfrak{m})}(z)$ легко могут быть реализованы алгоритмами аналогичными формулам (1.1) для $f^{(\mathfrak{m},\mathfrak{m})}(z)$.

Определение 1. Пусть $\alpha > 0$, $E \subset R^n$, $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — открытое покрытие E такое, что $d(E_i) < r$, $r > 0$ $\ \forall\, i \geq 1$. Величина [10]

$$\Lambda_\alpha(E) \triangleq \lim_{r\to 0}\left(\Lambda_\alpha^r(E) \triangleq \inf_{\{E_i\}_{i=1}^{\infty}}\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^\alpha\right), \tag{12}$$

где $d(E_i)$ — диаметр E_i и inf берется по всем таким покрытиям, называется α-мерной мерой Хаусдорфа множества E. $\Lambda_\alpha^r(E)$ — невозрастающая функция r, $\Lambda_\alpha^r(E)$ определена $\forall\, E \subset R^n$ и $0 \leq \Lambda_\alpha(E) \leq \infty$. Нужные нам свойства α-мерной меры Хаусдорфа состоят в том, что это внешняя мера; всякое борелевское множество в R^n измеримо по Хаусдорфу, т.е. $L_{\Lambda_\alpha}(R^n) \supset B(R^n)$; для всякого $E \subset R^n$ $\mathfrak{m}_n^*(E)$ обращаются в нуль или бесконечность одновременно.

Определение 2. Пусть E — компактное метрическое пространство, h — монотонная непрерывная возрастающая функция, h: $R_+ \to R_+$, $h(t) > 0$

при $t > 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого $A \neq \emptyset$, $A \subset E$ положим [11]

$$\Lambda_\varepsilon^h(A) \triangleq \inf_{\Phi_\varepsilon} \sum_n h[\delta(K_n)], \tag{13}$$

где $\delta(\cdot)$ — диаметр множества в рассматриваемой метрике, $\{(K_n)\}$ — покрытие A компактами K_n: $\delta(K_n) \leq \varepsilon$, Φ_ε — множество таких покрытий. Положим $\Lambda_\varepsilon^h(\emptyset) = 0$ и $\forall\, A \subset E$

$$\Lambda^h(A) \triangleq \sup_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon^h(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda_\varepsilon^h(A). \tag{14}$$

Функция Λ^h называется h-мерной мерой или просто h-мерой Хаусдорфа [6,11,12]. Это также внешняя регулярная (в смысле Каратеодори) мера и все борелевские множества Λ^h — измеримы. Очевидно, при $h(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$) получим Λ_α.

Определение 3. Положим $h(t) = (\ln t^{-1})^{-1}$, тогда функция $c(E) \triangleq c_l(E) \triangleq \Lambda^{(\ln t^{-1})^{-1}}(E)$ называется логарифмической емкостью [12] множества E.

Определение 4. Пусть K — плоский компакт, т.е. из R^2, точки $x_1, \ldots, x_n \in K$. Положим

$$\ln \frac{1}{d_n} \triangleq \min_{x_i \in K} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j} \ln \frac{1}{|x_i - x_j|} =$$

$$= \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j} \ln \left(\left| \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} \right|^{-1} \right), \quad \xi_i^{(n)} \in K, \tag{15}$$

тогда

$$d_n = \exp\left\{ -\binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j} \ln \left(|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}|^{-1} \right) \right\} = \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j} |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}|}. \tag{16}$$

Величина $d(K) \triangleq \lim\limits_{n \to \infty} d_n$ называется трансфинитным диаметром множества K.

Т е о р е м а [12]. $c_l(K) \triangleq c(K) = d(K)$ для всякого компакта $K \subset R^2$.

Определение 5 [5]. R^0 — класс всех функций f, аналитичных в точке $z = 0$ и обладающих свойством: существует круг $K = \{z || \, |z| \leq \delta\}$, ($\delta = \delta_f > 0$ — произвольно малы) такой, что

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n^{\frac{1}{n}} = 0, \quad \rho_n \triangleq \rho_n(f, K) \triangleq \inf_{\{r_n\}} ||f - r_n||_K, \tag{17}$$

где inf берется по всем рациональным функциям порядка не выше n, $||\cdot||_K$ — sup-норма на K. Согласно [13], если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = 0$, то f — однозначная аналитическая функция в вейерштрассовской естественной области существования W_f. В частности, таковыми являются элементы из R^0. Легко заметить, что мероморфные и целые функции также лежат в R^0 (мероморфные аналитические в нуле). Важным обстоятельством является то, что R^0 — поле над C^1, а также что, если f — однозначная аналитическая функция, множество особенностей которой имеет нулевую c-емкость и не содержит нуля, как это имеет место в данном случае, то $f \in R^0$. Условие (17), наложенное на скорость рациональной аппроксимации функции f в окрестности точки $z = 0$ (сравним с условием (10) для $\varphi(z)$), которое определяет принадлежность f классу R^0, является и необходимым условием того, чтобы последовательность $\{\pi_n\}$ дробей Паде быстро сходилась по емкости $c_l \stackrel{\triangle}{=} c$ к $f(z)$ (в данном случае к функции $\varphi(z)$) внутри области W_f. Более того [5] оно необходимо и для быстрой сходимости $\{\pi_n(z)\}$ к $f(z)$ ($\varphi(z)$) по мере в произвольно малой окрестности нуля или любой другой точке $a \in W_f$ — вейерштрассовской полной области определения функции f. Дополним определение 3 замечанием: компакты $E \subset \bar{C}^1$ (сфера Римана) будут измеряться по обобщенной емкости $\bar{c}(E)$ ($\stackrel{\triangle}{=}$ трансфинитный диаметр $E \subset \bar{C}^1$, где расстояние между точками измеряется не в эвклидовой, а в сферической метрике, т.е. эвклидово расстояние между изображениями этих точек на сфере Римана).

Определение 6. Пусть $r(z)$ — рациональная функция, точки $z_1, \ldots, z_{\mathrm{m}}$ — ее геометрически различные полюсы в C^1, $r(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\mathrm{m}} r(z, z_\nu)$ — разложение $r(z)$ по главным частям. Тогда запись $S \prec r$ означает, что $S(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\mathrm{m}} \lambda_\nu r(z, z_\nu)$, где $\lambda_\nu = 0$ или 1.

Т е о р е м а 2 (Гончар [5]). Пусть $f \in R^0$, $\{\pi_n\}$ — последовательность аппроксимаций Паде функции f. Тогда существует разбиение $\pi_n = \pi_n^* + \Delta_n$, $\pi_n^* \prec \pi_n$ (тем самым $\Delta_n \prec \pi_n$) такое, что:

А^0. Последовательность $\{\pi_n^*\}$ равномерно сходится к функции f внутри ее естественной области существования $W_f \subset \bar{C}^1$, причем $||f - \pi_n^*||_F \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall\, F \Subset W_f$;

В^0. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\bar{c}$ $\{z \in \bar{C}^1$: $|\Delta_n(z)|^{\frac{1}{n}} \geq \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие. Либо предполагая заранее, что функция $\varphi(z)$ из формул (4) однозначна в W_φ, либо развивая теорему Карлсона [2], будем иметь, что функция $\varphi \in R^0$.

Т е о р е м а 3 (Гончар [5]). Пусть $f \in R^0$, f аналитична в $z = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

1^0) $f \in R^0$;

2^0) $|f - \pi_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по мере в некоторой (произвольно малой) окрестности точки $z = 0$;

3^0) f — однозначная аналитическая (в W_f), причем $|f - \pi_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по $\bar{c}$-емкости внутри W_f.

В частности для $\varphi(z)$ из (4) теорема 3 применима следующим образом. Был построен генератор Ли–Деприт $S(p, q, \varepsilon)$, $p, q \in C^n$, голоморфный в поликруге $U_{R_S}(0)$, который генерирует в некотором поликруге $U_r(0) \subseteq U_{R_S}(0)$ биголоморфное преобразование Ли–Депри ld: $q \to Q$ и обратное преобразование ld^{-1}: $Q \to q$. Обратные голоморфны в поликруге $U_{\underline{r}}(0) \neq \emptyset$. При этом использовались хорошо известные соотношения [2]:

1) $dq/d\varepsilon = \partial_p S(p, q, \varepsilon)$, S — линейна по p, 2) $q(0) \overset{\triangle}{=} q_{\varepsilon=0} = Q$, 3) $\varepsilon \overset{\triangle}{=} 1$, 4) $q(Q) = Q + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(Q)$, где функция f из формул (1) этого параграфа играют роль одной из координат $q_i(Q)$, а функция f_k из той же формулы играет роль $q_i^{(k)}(Q)$. Сами же $q_i^{(k)}(Q)$ вычисляются рекуррентно по формулам Кэмела [2]. Чтобы воспользоваться теоремой 3, достаточно предположить, что $\forall\, i \in \overline{1:n}$ функция $q_i(Q^* \cdot \rho) \in R^0$ как функция одного переменного ρ ($Q^* \in U_r(0)$ и фиксировано). Нетрудно заметить, что это предположение существенно слабее предположения о том, что функция $q_i(Q)$ однозначна в области $W_q \subseteq C^n$ по векторному аргументу $Q \in C^n$ $\forall\, i \in \overline{1:n}$. Тоже самое относится и к обратному отображению Ли–Депри $Q(q) = q + \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}(q)$. Отображения ld и ld^{-1} биголоморфны [2] в поликругах $U_r(0)$ и $U_{\underline{r}}(0)$ соответственно, т.е. это больше, чем требуется (по крайне мере в U_r и $U_{\underline{r}}$) — они однолистны как вектор-функции векторных аргументов Q и q из C^n. Еще одно важное обстоятельство состоит в том, чтобы не делая каких-либо предположений о принадлежности $q_i(Q^* \cdot \rho)$ и $Q_i(q^* \cdot \rho)$ $\forall\, i \in \overline{1:n}$ как функции от ρ, классу R^0, а используя лишь утверждение 2^0 теоремы 3, установить важное функциональное свойство для $q_i(Q^* \cdot \rho)$ и $Q_i(q^* \cdot \rho)$ $\forall\, i \in \overline{1:n}$. При этом в нашем распоряжении имеются соотношения (5)–(11) из второго параграфа, которые являются не асимптотическими, а точными.

Рассмотрим сначала ту точку зрения при которой функция $\varphi(z)$ из (4) имеет множество своих особенностей нулевой емкости и не содержит нуля (последнее имеет место в данной задаче всегда). При любом $\varepsilon > 0$ получим, что $\bar{c}\ \{z \in \bar{C}^1\colon |\varphi(z) - \pi_n(z)|^{\frac{1}{n}} \geq \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$ (или, что тоже самое, $|\varphi - \pi_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по $\bar{c}$-емкости в C^1). К отмеченному выше второму обстоятельству вернемся позже и более подробно, а сейчас предположим, что множество $Q\{r_n\} \overset{\triangle}{=} \bar{C}^1 \backslash P\{r_n\}$, где $P\{r_n\}$ — множество предельных точек полюсов рациональных функций последовательности $\{r_n\}$. (Об однолистности ld_t см. §3).

Т е о р е м а. Последовательность аппроксимаций Паде $\{\pi_n\}$ для функции $\varphi(z)$ из формулы (4) равномерно сходится внутри (открытого множества) $Q = Q\{\pi_n\}$ к некоторой функции $\widetilde{\varphi}(z)$, аналитичной в Q и совпадающей с $\varphi(z)$ на множестве $W_\varphi \bigcap Q$. При этом $||\widetilde{\varphi} - \pi_n||_F^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty\ \ \forall F \Subset Q$ (предполагается, что $Q \neq \emptyset$). Кроме того каждая особая точка функции $\varphi(z)$ является предельной точкой полюсов рациональных функций последовательности $\{\pi_n(z)\}$, соответствующей функции $\varphi(z)$, т.е. $\partial W_\varphi \subset P\{\pi_n\}$. Доказательство непосредственно следует из аналогичной теоремы работы [5] для $f \in R^0$.

Замечание. О числе полюсов рациональных функций π_n в окрестности изолированной особой точки a функции φ. Пусть $a \in \partial W_\varphi$ одна из таких точек, $U = U(a)$ — окрестность точки a, $N_n(U)$ — число полюсов с учетом их кратности для функции π_n в U, тогда:

1) если a — полюс кратности $\mathfrak{m}$, то $N_n(U) \geq \mathfrak{m}\ \ \forall U = U(a)$ и достаточно больших n;

2) если a — существенно особая точка, то $N_n(U) \to \infty$ ($U = U(a)$ — любая окрестность) $n \to \infty$.

Из теоремы 2 для функции $\varphi(z)$ (из формулы (4)) следует, что $|\varphi - \pi_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по логарифмической емкости на любом замкнутом ограниченном множестве $F \subset W_\varphi$ внутри $W_\varphi \bigcap C^1$. Учитывая связь логарифмической емкости с мерами Хаусдорфа (см. определение 3) нетрудно получить, что для функции $h(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$ или $h(t) = |\log t|^{-\beta}$, $\beta > 1$, последовательность $\{\pi_n\}$ быстро сходится к φ по h-мере Хаусдорфа внутри $W_\varphi \bigcap C^1$.

Замечание. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для функции $\varphi(z)$ из формулы (4).

Пусть K_R круг, в котором φ аналитична, r: $0 < r < R$, $\theta = rR^{-1}$. Тогда имеет место оценка

$$|\varphi(z) - \pi_n(z)| \leq A_n(\theta) \cdot \rho_n(\varphi, K_R) \cdot {\prod_\nu}' \frac{R - r}{|z - z_{n,\nu}|}, \quad z \in K_R,$$

где $A_n(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^{2n}$, ${\prod_\nu}'$ — произведение по всем ν, для которых $|z_{n,\nu}| < R$ ($z_{n,\nu}$ – нули полинома $q_n(z)$ при $\pi_n = p_n \cdot q_n^{-1}$), величина

$$\rho_n(\varphi, K_R) \triangleq \inf_{\{r_n\}} ||\varphi - r_n||_{K_R}$$

введена в формуле (17), $\rho_n^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ибо $\varphi \in R^0$.

Рассмотрим по-прежнему функцию вида

$$f(z^*, \rho) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z^*) \cdot \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z^*) \cdot \rho^k, \tag{18}$$

где $z \in U_{R>0}(0)$ (где $f(z^*, \rho)$ — голоморфна). Не нарушая общности можно считать, что $U_R(0) = \bar{U}_R(0)$, т.е. что $U_R(0)$ — компакт. Тогда для любого $z^* \in U_R(0)$ существует функция вида (18), т.е. определено отображение

$$\bar{U}_R(0) \ni z^* \to f(z^*, \bullet \overset{\rho}{\swarrow}), \quad f(z^*, \bullet \overset{\rho}{\swarrow}) \in O(\bar{S}_1(0)), \tag{19}$$

но каждой функции $f(z^*, \bullet)$ соответствует своя естественная область определения Вейерштрасса $W_{f(z^*,\bullet)}$. Пусть при любом $z^* \in U_{R>0}(0)$ следует $f(z^*, \bullet) \in R^0$. Из предыдущих теорем вытекает следующее следствие.

Следствие. Если $f(z^*, \bullet) \in R^0 \ \ \forall\, z^* \in \bar{U}_R(0)$, то $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N = N(\varepsilon) < +\infty$ — независящие от точки z^* такое, что

$$\|f(z^*, \rho) - \pi_n(z^*, \rho)\|_{K \Subset W}^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \quad \text{по емкости} \quad \forall\, z^* \in \bar{U}_R(0), \tag{20}$$

где

$$W \triangleq \bigcap_{z^* \in \bar{U}_R(0)} W_{f(z^*,\bullet)}. \tag{20$'$}$$

Доказательство. Пусть соотношение (20) не верно. Пусть произвольная точка ${}_{(1)}z^* \in \bar{U}_R(0)$, тогда, так как $f({}_{(1)}z^*, \bullet) \in R^0$, существует число $N_1({}_{(1)}z^*, \varepsilon)$ такое, что при $n \geq N_1$ следует

$$\left\|f({}_{(1)}z^*, \rho) - \pi_n({}_{(1)}z^*, \rho)\right\|_{K \Subset W_{f({}_{(1)}z^*,\bullet)}}^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \quad \text{по емкости} \ . \tag{21}$$

Но найдется точка ${}_{(2)}z^* \in \bar{U}_R(0)$ такая, что соотношение (21) нарушается для некоторых $n \geq N_1$. Однако функция $f({}_{(2)}z^*, \bullet) \in R^0$, следовательно, существует число $N_2({}_{(2)}z^*, \varepsilon) > N_1$ такое, что при $n \geq N_2$ получим

$$\left\|f({}_{(2)}z^*, \rho) - \pi_n({}_{(2)}z^*, \rho)\right\|_{K \Subset W_{f({}_{(2)}z^*,\bullet)}}^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \quad \text{по емкости} \ . \tag{22}$$

Пусть N_2 не обслуживает весь компакт $U_R(0)$, т.е. найдется точка ${}_{(3)}z^* \in \bar{U}_R(0)$ такая, что соотношение (22) (и естественно (21)) нарушаются хотя бы при одном $n \geq N_2$. Тогда существует $N_3 > N_2 > N_1$ такое, что в силу $f({}_{(3)}z^*, \bullet) \in R^0$ по емкости выполняется неравенство, аналогичное (21) и (22) для точки ${}_{(3)}z^* \in \bar{U}_R(0)$ и так далее. Т.е. определена последовательность $\{{}_{(k)}z^*\} \in \bar{U}_R(0)$, следовательно, существует $\widetilde{z}^* \underset{i\to\infty}{\longleftarrow} {}_{(k_i)}z^*$, $\widetilde{z}^* \in \bar{U}_R(0)$. Но тогда неравенство

$$\|f(\widetilde{z}^*, \rho) - \pi_n(\widetilde{z}^*, \rho)\|^{\frac{1}{n}}_{K \in W_{f(\widetilde{z}^*, \bullet)}} < \varepsilon \quad \text{по емкости} \tag{23}$$

не может выполняться ни при каких конечных n, т.е. $f(\widetilde{z}^*, \bullet) \overline{\in} R^0$, что означает противоречие, ибо $\widetilde{z}^* \in \bar{U}_R(0)$. (Действительно, дробь Паде $\pi_{\mathrm{m}}(z^*, \rho)$ непрерывная в $W_{f(\widetilde{z}^*, \bullet)}$ по z^* и ρ в совокупности, так как π_{m} рациональна по ρ и $c_k(z^*)$, а c_k — многочлен по $z_1^*, \ldots, z_n^*$. Но тогда формальная функция $N(z^*, \varepsilon)$ — локально постоянная, откуда и следует, что неравенство (23) не может выполняться). Учитывая, что емкость множества, состоящего из счетного числа множеств нулевой емкости, равна нулю, получаем требуемое соотношение (20) для условия $(20)'$.

§4. Дополнение — однолистность преобразований Ли–Деприи $ld_t : \quad Q \to q$

Преобразования Ли–Деприи $ld_t : \quad Q \to q$ задаются локально общим интегралом в форме Коши системы [15], т.е.

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = \partial_p S(p, q, \varepsilon, t), \quad q_{\varepsilon=0} = Q, \quad S(p, q, \varepsilon, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} S_{m+1}(p, q, t), \tag{1}$$

и тогда

$$q(Q, \varepsilon, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} q^{(m)}(Q, t), \tag{2}$$

при $\varepsilon = 1$ определяет преобразование $ld_t : \ Q \to q$ при $t \in [0, T]$. Вопрос взаимной однозначности ld_t в области $U_{R>0}(Q^0)$ сводится к голоморфности функции $\partial_p S(p, q, \varepsilon, t)$ в $U_{\hat{R}>0}(Q^0)$. Действительно, если функция $\partial_p S(p, q, \varepsilon, t)$ (однозначная аналитическая) голоморфна в области $U_{R>0}(Q^0) \times [0, \hat{\varepsilon}]$, где $\hat{\varepsilon} > 1$, то преобразование $ld_t : \ Q \to q$ есть сдвиг вдоль решения системы (1) за время $\varepsilon = 1$ из начальной точки Q в точку $q(Q, 1, t)$ для всякого $t \in [0, T]$ и в силу единственности решения задачи Коши для системы (1) преобразование ld_t при любом $t \in [0, T]$ — однозначное в области $U_{R'>0}(Q^0) \subseteq U_{R>0}(Q^0)$. Аналогичное справедливо и для преобразования $ld_t^{-1}:\ q \to Q$. Поэтому результаты параграфа 3 и последующего параграфа 4 лучше применять к ростку $(U_{r>0}(0), \partial_p S)$ нежели к росткам $(U_{r>0}^{(k)}(0), q_k(Q,t))$ при всех $k \in \overline{1:n}$.

Приведенное дополнение существенно способствует экономии вычислений в практических расчетах.

§5. Преобразование Ли–Деприи мера, решающая соответствующую степенную проблему моментов

Возвращаясь к теореме 3, снимем предположение о том, что функция $\varphi(z) \in R^0$, а также то, что $f(z^*, \bullet) \in R^0\ \ \forall z^* \in \overline{U}_R(0)$ — условие в последнем следствии. Аргументом к таким действиям служит то, что формально имеется: поликруг $\overline{U}_R(0)$; любой коэффициент $c_k \overset{\triangle}{=} f_k(z^*)$, $z^* \in \overline{U}_R(0)$; при любом m функция π_m — дробь Паде из формул (1.2); точное соотношение (2.5); в достаточно малой окрестности нуля функция $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \rho^k$ не имеет полюсов в силу голоморфности преобразований Ли–Депри в поликруге $\overline{U}_R(0)$. Будем проверять условие 2) теоремы 3. Обратимся к формулам (2.5), (2.6). Заметим, что при $(m, n) = (n, n)$ — аппроксимации Паде с учетом формул (2.10) имеет место

$$|A_k| = \left|\sigma \begin{vmatrix} t^{2n+k} & t^{2n+k-1} & t^{2n+k-2} & \dots & t^{n+k} \\ c_{n+1} & c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & c_{2n-2} & \dots & c_n \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} c_{2n+k} & c_{2n+k-1} & c_{2n+k-2} & \dots & c_{n+k} \\ c_{n+1} & c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & c_{2n-2} & \dots & c_n \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{2n-1+k} & c_{2n+k} \end{vmatrix}\right|, \tag{1}$$

и тогда следует, что

$$|A_1| = \left\| \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n+2} & c_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n} & c_{2n+1} \end{array} \right\|. \tag{2}$$

Далее находим величину $d_{m,n} = d_{n,n}$ при $m = n$ из формул (2.8), которые дают

$$|d_{n,n}| = \left\| \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-1} \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Перепишем соотношение (2.5) в следующем виде

$$\begin{gathered} f_\theta(\xi) \cdot q_\theta^{(n,n)}(\xi) - p_\theta^{(n,n)}(\xi) = (d_{n,n})^{-1} \cdot \xi^{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \xi^{k-1} = \\ = (d_{n,n})^{-1} \cdot \xi^{2n+1} \cdot (A_1 + A_2\xi + A_3\xi^2 + \ldots + A_k\xi^{k-1} + \ldots). \end{gathered} \tag{4}$$

Ряд в правой части точного равенства (4) очевидно абсолютно сходящийся в круге $|\xi| \leq 1 \ \ \forall n \in \overline{1:N}$ и $\forall N < +\infty$, так как левая часть (4) определена при $|\xi| \leq 1$ и там $q_\theta^{(n,n)}(\xi) \neq 1$. Поэтому имеем, что

$$\left| f_\theta(\xi) \cdot q_\theta^{(n,n)}(\xi) - p_\theta^{(n,n)}(\xi) \right| \leq |d_{n,n}|^{-1} \cdot |\xi|^{2n+1} \cdot |A_1| \cdot (1 + \delta(A, \xi)), \tag{4$'$}$$

где

$$\delta(A, \xi) \triangleq \sum_{k=2}^{\infty} |A_k| \cdot |A_1|^{-1} \cdot |\xi|^{k-1}, \tag{$*$}$$

причем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \varlimsup_{k\to\infty} |A_k| \cdot |A_1|^{-1} < +\infty, \tag{$**$}$$

при $A_k(n)$ определяемых согласно (1) и (2), и учитывая, что $c_m \to 0$ при $m \to \infty$, как коэффициенты сходящегося числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. В соотношении (4)$'$ не нарушая общности, можно считать, что $A_1 \neq 0$, иначе за скобку выносится ξ и A_1 заменяется на A_2. Из (4) следует, что

$$\left| f_\theta(\xi) - p_\theta^{(n,n)}(\xi)(q_\theta^{(n,n)}(\xi))^{-1} \right| \leq |\xi|^{2n+1} \cdot (|d_{n,n}| \cdot |q_\theta^{(n,n)}(\xi)|)^{-1} |A_1(n)|(1 + \delta). \tag{4$''$}$$

Согласно [9, с. 595] имеет место оценка снизу

$$\min_{|\xi|\le 1} |q_\theta^{(n,n)}(\xi)| > C \cdot n^{-2n}, \quad \forall\, n \ge 1, \tag{5}$$

а по теореме Полиа [14, 15, с. 297] оценка сверху

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |A_1(n)|^{\frac{1}{(1+n)^2}} \le \operatorname{cap}\Omega^c \stackrel{\triangle}{=} c(\Omega^c), \tag{6}$$

где $c(\Omega^c)$ — трансфинитный диаметр множества

$$\Omega^c \stackrel{\triangle}{=} (S_{r_0} \stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in C^1 : \ |\xi| \le r_0 \le 1\}) \cup S_{r_1} \cup \ldots \cup S_{r_N}, \quad N < +\infty.$$

Здесь замкнутые области S_{r_i} $i \in \overline{1:N}$, не нарушая общности, можно считать замкнутыми круговыми окрестностями всех особых точек ξ_i^*, которых предполагается конечное число N, функции $f_\theta(\xi)$ по ξ. Т.е. $f_\theta(\xi)$ — регулярна по $\xi \in \Omega \ni \infty$. Очевидно, что в окрестности ∞ функция $f_\theta(\xi)$ представима рядом (через суперпозицию)

$$f_\theta(\widetilde{\xi}) \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{f}_\theta(\widetilde{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \frac{1}{\widetilde{\xi}^k}, \quad \widetilde{\xi} \in U_{\mathcal{R}}(\infty), \quad \widetilde{\xi}^{-1} = \xi \in U(0), \tag{7}$$

поскольку в нуле функция $f_\theta(\xi)$ регулярна, а число особых точек не более $N < \infty$. Пусть полином

$$\mathcal{P}(\xi) \stackrel{\triangle}{=} \xi^{N+1} + \alpha_1 \xi^N + \cdots + \alpha_N \xi = \xi(\xi - \xi_1^*) \ldots (\xi - \xi_N^*).$$

Тогда положим по определению

$$\bigcup_{i=0}^{N} S_{r_i(\varepsilon)} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} \mathcal{D}_{r_i(\varepsilon)} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\xi \in C^1 : \ \mathcal{P}(\xi) \le \varepsilon\right\}, \tag{8}$$

откуда согласно [15, с. 291] имеем оценку

$$c\left(\bigcup_{i=0}^{N} S_{r_i(\varepsilon)}\right) \le c\left(\bigcup_{i=0}^{N} \mathcal{D}_{r_i(\varepsilon)}\right) = \sqrt[N+1]{\varepsilon}, \tag{9}$$

т.е. при стягивании всех кругов $S_{r_i(\varepsilon)}$ $i \in \overline{1:N}$ к особым точкам ξ_i^* и круга S_{r_0} к нулю следует оценка

$$\operatorname{cap}(\Omega^c) = c(\Omega^c) \le \sqrt[N+1]{\varepsilon}. \tag{10}$$

Из соотношения (10) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|A_1(n)| \leq (\mathrm{cap}\,(\Omega^c))^{(n+1)^2}, \tag{11}$$

Далее используем некоторые результаты степенной проблемы моментов. Заметим, что матрицы из формул (2) и (3) ганкелевы. Пусть (мера) функция $\psi \in L_1[-1,1]$, $\psi(x) \geq 0$.

Обозначим согласно [16] через $\mathcal{D}_n(\psi)$ определитель формы $H_n(\psi)$, где

$$H_n(\psi) \triangleq \int\limits_{-1}^{1}(u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n)^2 \psi(x)dx = \sum_{\mu,\nu}^{n} c_{\mu+\nu}\cdot u_\mu \cdot u_\nu,$$

в предположении существования ψ-решения проблемы моментов для данных $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$. Тогда согласно [16, с. 118] справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(2^{2n+1}\cdot \mathcal{D}_n(\psi)\cdot(\mathcal{D}_{n-1}(\psi))^{-1}) = 2\pi\cdot\exp\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\psi(\cos\theta)d\theta\} = l, \tag{12}$$

где, если $\ln\psi(\cos\theta)$ не интегрируем, то правую часть (12) необходимо положить равной нулю [18]. Из (12) по индукции по $k \in \overline{1:n-1}$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_n = l^n\cdot\mathcal{D}_0\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{n(2n+4)}{2}} \qquad \text{(asimpt.)}. \tag{13}$$

Производя сдвиг последовательности $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, \ldots$ по индексам вперед, имеем, что соотношение (13) дает для величин $|d_{n,n}|$ следующие оценки

$$\lim_{n\to\infty}|d_{n,n}| = l^n\cdot\mathcal{D}_0\cdot 2^{-n(n+2)}, \qquad \text{(asimpt.)} \tag{14}$$

Учитывая, что имеют место соотношения (11) и (14), получим из $(4)''$ начиная с некоторого места по $n\to\infty$, что

$$\left|f_\theta(\xi) - \frac{p_\theta^{(n,n)}(\xi)}{q_\theta^{(n,n)}(\xi)}\right| \leq \frac{|\xi|^{2n+1}}{l^n\cdot\mathcal{D}_0\cdot c}\,(\mathrm{cap}\,\Omega^c)^{(n+1)^2}\cdot 2^{n(n+2)}\cdot n^{2n}\cdot(1+\delta), \tag{15}$$

или

$$\pi \triangleq \left|f_\theta - \frac{p_\theta^{(n,n)}}{q_\theta^{(n,n)}}\right| \leq \frac{|\xi|^{2+\frac{1}{n}}}{l\cdot\sqrt[n]{\mathcal{D}_0 c}}\cdot n^2\cdot 2^{(n+2)}\cdot(\mathrm{cap}\,\Omega^c)^{n+2+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{1+\delta}. \tag{16}$$

Используя далее (10), получаем оценку

$$\pi \le \frac{|\xi|^{2+\frac{1}{n}}}{l \cdot \sqrt[n]{\mathcal{D}_0 c}} \cdot n^2 \cdot 2^{(n+2)} \cdot \varepsilon^{\frac{n+2+n^{-1}}{N+1}} \cdot \sqrt[n]{1+\delta}. \tag{17}$$

Окончательно получаем, что начиная с некоторого места по $\xi \to 0$ и $r_i(\varepsilon) \to 0$ (независимо друг от друга) величина $(2 \cdot \varepsilon^{1/N+1})$ станет меньше единицы. Но тогда будем иметь, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2 (2 \cdot \sqrt[N+1]{\varepsilon})^{n+2+n^{-1}} = 0, \tag{18}$$

и поскольку остальные величины в (17) ограничены при $n \to \infty$, то получим в пределе

$$\pi = |f_\theta(\xi) - p_\theta^{(n,n)}(\xi) \cdot (q_\theta^{(n,n)}(\xi))^{-1}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{19}$$

при $0 \le \xi \le \xi_{\min},\ \ \xi_{\min} > 0$. Но тогда $f_\theta(\xi) \in R^0$ и удовлетворяет условию 3) из теоремы 3.

Приведенные рассуждения, согласно замечанию к теореме А. А. Маркова в работе [14, с. 553], фактически подробно доказывают параллельно с основным утверждением классическую теорему (Маркова), использующую в оригинале для своего доказательства формулу Гаусса–Якоби и свойства коэффициентов Кристоффеля. Резюмирует полученное следующая

Т е о р е м а. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — голоморфна в нуле, в пространстве $\mathbf{C}^1 \ni z$ имеет не более конечного числа особых точек (следовательно функция $\tilde{f} = f(z^{-1})$ представима рядом $\tilde{f}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ в окрестности ∞).

Пусть последовательность $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ решает в смысле Хаусдорфа степенную проблему моментов, т.е. существует (мера) функция $\psi \in L_1[-1,1], \quad \psi \ge 0$ такая, что

$$c_k = \int_{-1}^{1} t^k \, d\psi(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Тогда функция $f \in R^0$, и отсюда следует, что $|f - \pi_n|^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по c-емкости во всей естественной области определения Вейерштрасса W_f.

Т е о р е м а (Хаусдорф [16]). Для представления (20) необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ была вполне монотонной, т.е. чтобы[4]

$$(-1)^p \Delta^p c_k \overset{\triangle}{=} (-1)^p (c_{k+p} + \tbinom{p}{1} c_{k+p-1} - \tbinom{p}{2} c_{k+p-2} + \ldots (-1)^p c_k) \geq 0. \quad (21)$$

В заключение параграфа приведем теорему Гончара о равномерной сходимости аппроксимаций Паде для функции $f(z)$.

Определение [14]. Пусть R_n — произвольная последовательность рациональных функций, Ω — область из $\bar{\mathbf{C}}^1$. Будем писать: $\{R_n\} \in \mathcal{H}(\Omega)$, если для любого компакта $K \subset \Omega$ функция $R_n(z)$ голоморфна (не имеет полюсов) на K для любого $n > n(K)$; $\{R_n\} \in \mathfrak{C}(\Omega)$, если последовательность R_n равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) области Ω. Обозначим через $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\infty$ класс всех областей Ω вида $\infty \in \Omega = \mathcal{D} \setminus E$, где $\mathcal{D}$ — область и E — относительно замкнутое подмножество $\mathcal{D}$, удовлетворяющие [14] условиям: $\partial\mathcal{D} \subset \partial\tilde{\mathcal{D}}$, $\operatorname{cap} E = 0$, где $\tilde{\mathcal{D}}$ — дополнение к $\operatorname{conv}(\partial\mathcal{D})$.

Т е о р е м а (Гончар [14]). Если $\Omega \in \mathfrak{G}$, то

$$\{\pi_n\} \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow \{\pi_n\} \in \mathfrak{C}(\Omega).$$

Следствие [14]. Если $\Omega \in \mathfrak{G}$, то

$$\{\pi_n\} \in \mathcal{H}(\Omega) \Longrightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega),$$

где π_n аппроксимационная дробь Паде для функции f. Проведя замену переменных $z \to z^{-1}$ получим, что

$$\{\pi_n\} \in \mathcal{H}(\omega) \Longrightarrow \{\pi_n\} \in \mathfrak{C}(\omega) \Longrightarrow f \in \mathcal{H}(\omega),$$

где $\omega = \Omega^{-1}$ при $\Omega \in \mathfrak{G}$.

§6. Практическая реализация

При построении дроби Паде $p_\theta^{(n,n)}(\xi)/q_\theta^{(n,n)}(\xi)$ для функции $f_\theta(\xi)$ или, что эквивалентно, дроби $p_n(z)/q_n(z)$ для $f(z)$, где $f(z)$ — функция $f_\theta(\xi)$ при фиксированном $\theta \in \mathbf{C}^N$, т.е. $f(z)$ — срезка $f(z_1, \ldots, z_N)$ на луче $L =$

[4] $\binom{p}{m}$ — биномиальные коэффициенты.

$\{\theta \cdot \xi \parallel \xi \in \mathbf{C}^1\}$, приходиться вычислять определители

$$p^{(n,n)}(\xi) \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \\ (c_0\xi^n) & (\xi^{n-1}(c_0 + c_1\xi)) & (\xi^{n-2}\sum\limits_{k=0}^{2} c_k\xi^k) & \dots & (\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\xi^k) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$q^{(n,n)}(\xi) \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \\ \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} & \dots & \xi^0 = 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

а затем их отношение. Заметим, что, вообще говоря, аргументу ξ из (1) и (2) присваивается числовое значение, так что не всегда требуется в (1) и (2) по последним строкам для получения рациональной функции от ξ вида $p^{(n,n)}(\xi)/q^{(n,n)}(\xi)$, проводить разложение.

ε-алгоритм

Проведем замену переменных $\xi = z^{-1}$, тогда положим

$$P_{n,n}(z) = \frac{p_\theta^{(n,n)}(z^{-1})}{q_\theta^{(n,n)}(z^{-1})}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3)$$

Далее определим следующую рекуррентную процедуру ($\mathfrak{m} \triangleq 0$ для диагональной аппроксимации)

$$\varepsilon_{-1}^{(\mathfrak{m})} = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0^{(\mathfrak{m})} = \sum_{k=0}^{\mathfrak{m}} c_k z^{-k}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{i+1}^{(\mathfrak{m})} = \varepsilon_{i-1}^{(\mathfrak{m}+1)} + (\varepsilon_i^{(\mathfrak{m}+1)} - \varepsilon_i^{(\mathfrak{m})})^{-1}, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Если $\varepsilon_i^{(\mathfrak{m}+1)} = \varepsilon_i^{(\mathfrak{m})}$, то по *определению* полагается

$$\varepsilon_{i+1}^{(\mathfrak{m})} = \varepsilon_{i-1}^{(\mathfrak{m})} + \varepsilon_{i-1}^{(\mathfrak{m}+2)} - \varepsilon_{i-3}^{(\mathfrak{m}+2)}. \quad (8)$$

В [17] доказывается, что

$$\varepsilon_{2j}^{(\mathfrak{m})} = P_{j,\mathfrak{m}+j}(z) = p_\theta^{(\mathfrak{m}+j,j)}\left(\frac{1}{z}\right)\left[q_\theta^{(\mathfrak{m}+j,j)}(\frac{1}{z})\right]^{-1}, \qquad (9)$$

причем это верно в общем случае аппроксимации дробями Паде, т.е., вообще говоря, не диагональными дробями Паде. При диагональной аппроксимации необходимо положить $\mathfrak{m} \stackrel{\triangle}{=} 0$.

Связь элементов $\varepsilon_{2j}^{(\mathfrak{m})}$ (при $\mathfrak{m} = 0$) с аппроксимируемой функцией f осуществляется по формуле (5), при этом

$$f = f_\theta(\xi) = f_\theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

QD-алгоритм (алгоритм частных и разностей)

Для исходной функции

$$f_\theta(\xi) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k,$$

аналитической в круге $|\xi| \le 1$, проведем замену вида

$$(\xi = z^{-1})\ \&\ (\forall j \ge 1 \Longrightarrow c_j \stackrel{\triangle}{=} (-1)^{j-1}\tilde{c}_j) \qquad (10)$$

так, что

$$f_\theta(\xi) = f_\theta\left(\frac{1}{z}\right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\tilde{c}_k\cdot z^{-k}. \qquad (11)$$

После этого ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\tilde{c}_k\cdot z^{-k} \stackrel{\triangle}{=} \varphi(z) \qquad (12)$$

преобразуется в непрерывную [17,18] дробь вида

$$\varphi(z) = \frac{1}{a_1 z} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-1} z} + \frac{1}{a_{2n} z} + \cdots \qquad (13)$$

с помощью рекуррентной процедуры относительно величин $e_k^{(\mathfrak{m})}$ и $q_k^{(\mathfrak{m})}$ по формулам

$$e_0^{(\mathfrak{m})} = 0, \quad q_1^{(\mathfrak{m})} = \frac{c_{\mathfrak{m}+2}}{c_{\mathfrak{m}+1}}, \qquad (14)$$

$$e_k^{(\mathfrak{m}+1)} \cdot q_k^{(\mathfrak{m}+1)} = q_{k+1}^{(\mathfrak{m})} \cdot e_k^{(\mathfrak{m})}, \tag{15}$$

$$q_k^{(\mathfrak{m}+1)} + e_{k-1}^{(\mathfrak{m}+1)} = e_k^{(\mathfrak{m})} + q_k^{(\mathfrak{m})}, \tag{16}$$

Согласно Рутисхаузеру [18] имеют место равенства

$$a_1 = c_1, \quad a_{2k} = q_k^{(0)}, \quad a_{2k+1} = e_k^{(1)} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где a_i — коэффициенты в соотношении (13). Формулы (15) и (16) объясняют название алгоритма — частных и разностей.

Замечание. ε-алгоритм применим несколько раз (т.е. последовательно). Положим $\varepsilon_{2i}^{(\mathfrak{m})} = {}_0\varepsilon_{2i}^{(\mathfrak{m})}$; введем величины

$${}_k\varepsilon_{-1}^{(\mathfrak{m})} = 0, \quad {}_k\varepsilon_0^{(\mathfrak{m})} = {}_{k-1}\varepsilon_{2\mathfrak{m}}^{(0)}, \quad k > 1$$

и продолжим вычисления по формулам (4)–(7) (при необходимости (8)). Такой прием называется присоединенным повторным применением ε-алгоритма. Если согласно [17] взять

$${}_k\varepsilon_0^{(2\mathfrak{m})} = {}_{k-1}\varepsilon_{\mathfrak{m}}^{(0)}, \quad {}_k\varepsilon_0^{(2\mathfrak{m}+1)} = {}_{k-1}\varepsilon_{\mathfrak{m}}^{(1)},$$

то получим соответствующий повторный ε-алгоритм. Вопросы устойчивости ε-алгоритма рассматривались в [19].

Глава 2

Применение решений интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика в задачах управления

Многие методы интерполяции находят самое широкое применение в задачах идентификации и наблюдения [20], о чем свидетельствует многочисленная литература за последние двадцать лет в реферативных журналах. Однако там до сих пор не было отражено применение интерполяционных методов, связанных с теоретико-функциональными свойствами аналитических функций, например с граничным поведением голоморфных функций. Оказывается, что привлекая понятие равномерно разделенных последовательностей, удается решить ряд важных вопросов о существовании решений и их аппроксимации, представляющих большой интерес для прикладных задач аналитической динамики. Таким образом, теоретические результаты Хеймана и Карлесона оказались весьма полезными для важных задач аналитической теории дифференциальных уравнений.

§1. Существование и единственность

Пусть рассматривается задача идентификации для систем управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t),\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), \end{aligned} \tag{1}$$

с функцией наблюдения, совпадающей с фазовым состоянием системы (1)

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1(t, x^0, u),\\ z_2 &= x_2(t, x^0, u),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ z_n &= x_n(t, x^0, u), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in \mathcal{C}^n$, $t \in R^1$, $\forall\, i \in \overline{1:n}$, f_i — голоморфная функция своих аргументов в поликруге $U_i \overset{\triangle}{=} \{(t, x, u):\ t \in \mathcal{C}^1,\ |t| \le r_t > 1,\ \forall\, i\, |x_i| \le r_i,\ \forall\, i \in \overline{1:m}\ |u_i| \le r_{u_i}\}$, $\forall\, i \in \overline{1:n}\ |f_i| \le \mathcal{M}$, т.е. $f_i \in \mathcal{A}(U_i)$. Предполагается, что управление u_i $\forall\, i \in \overline{1:m}$ — голоморфны в кругах $V_i \overset{\triangle}{=} \{t \in \mathcal{C}^1:\ |t| \le \rho_i > 1\}$, т.е. $u_i \in \mathcal{A}(V_i)$. Таким образом, управлять системой (1) разрешено только голоморфными по $t \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i$ функциями u_i, в связи с этим соответствующим образом должна пониматься и задача идентификации (1). Заметим, что во многих задачах механики управляемого движения выполняются более жесткие условия. Например, векторное поле (1) определено по t в полосе $\prod_t \stackrel{\triangle}{=} \{t \in \mathcal{C}^1\colon |\mathrm{Im}\, t| \le h > 0\}$, или же вообще функции f_i — целые, а наблюдаться может фазовое состояние — пара из конфигурационной и кинематической составляющей. Поэтому естественно предположение, разумное при аналитических управлениях (по t) для многих важных задач аналитической механики (движение твердого тела, задачи N–тел), что любое решение задачи Коши $x(t, x^0, u(t))$ аналитично по t в единичном круге при $\max\limits_{|t|\le\rho_i} |u_i(t)| \le r_{u_i}$, ограниченно и единственно. (В задаче N–тел $u \stackrel{\triangle}{=} 0$, а все x^0, приводящие к соударениям, исключены. При $N = 3$ это гарантирует теорема Пенлеве). Приводимые ниже теоретические рассуждения для многих задач, удовлетворяющих сформулированным условиям, могут оказаться не эффективными и требуют более тонкого подхода, однако в немалом классе задач (динамика тяжелого твердого тела, вращение спутника вокруг центра масс) данная методика может быть использована.

При $t = 0$ из соотношений (2) получим начальное $x^0 = z(0)$. Пусть $u_i(t)$ выбраны аналитическими по $t\ \forall\, i \in \overline{1:m}$ и $\max\limits_{|t|\le\rho_i} |u_i(t)| \le r_{u_i}$, т.е. допустимы для рассматриваемой задачи. Пусть последовательность $\{t_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty} \in \mathcal{C}^1\colon\ \forall\, \nu \in \overline{1:+\infty}\ \Rightarrow |t_\nu| < 1$ задана, тогда имеем последовательности $\{z_{i\nu}\}_{\nu=1}^{+\infty} = \{x_i(t_\nu, x^0, u(t_\nu))\}_{\nu=1}^{+\infty}$, $i \in \overline{1:n}$, которые в силу предполагаемых аналитических свойств (1) равномерно ограничены известной константой M,

$$|z_{i\nu} \le M, \quad i \in \overline{1:n}, \quad \nu \in \overline{1:+\infty}. \tag{3}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы использовать для решения поставленной задачи общую теорию интерполяции аналитических функций [21] или те направления проблемы моментов, которые связаны с интерполяционной проблемой Неванлинны—Пика для соответствующих классов функций [22, 23, 24, 25]. В этой связи важное значение имеют высказывания известного специалиста по теории функций А. Ловатера [26, с. 59] о том, что современные исследования по граничным свойствам аналитических функций развиваются по двум главным направлениям: во-первых, продолжается изучение проблем важного класса функций, возникающих естественным путем; во-вторых, отправной точкой исследований являются вопросы, возникающие извне, в других областях, в данном случае идентификации. Во многих отношениях исследования второго типа более интересны и плодотворны в настоящее время, поскольку именно вопросы извне подсказывают часто интересные направления развития и позволяют увидеть стандартную теорию в новом свете.

Возвращаясь к исходной задаче, заметим, что по постановке она сведена к решению проблемы Неванлинны–Пика для класса H^M [27], т.е. интерполированию голоморфной в единичном круге функции $\mathcal{F}(t)$ такой, что $|\mathcal{F}(t)| < M$, по данным интерполяции $(\{t_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}\mathcal{F}(t_\nu))$. Для рассматриваемой исходной задачи идентификации естественными представляются и другие функциональные классы для проблемы $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ (Неванлинны—Пика): $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, H_p, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}[a,b]$, $\mathcal{S}[a,b]$, $\mathcal{S}(E_m)$ согласно [22], C, S, N согласно [23]. Важным теперь является вопрос существования и единственности решения проблемы $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ для класса H^M. Причем одного существования, которое здесь тривиально, для наших целей не достаточно (по крайне мере в данной задаче, хотя в других подходах, например, если задаться целью представлять аналитические функции непрерывными дробями, одного существования может быть достаточно). Если, однако, решение проблемы $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ в H^M вдобавок еще и единственно, то в силу единственности решения задачи Коши $x(t, x^0, u(t))$ и его аналитичности, а также того, что $x(t, x^0, u(t))$ само решает проблему $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ в H^M по данным $(\{t_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$, $x_i(t_\nu, x^0, u(t_\nu))$, это и будет искомым решением исходной задачи построения решения $x(t, x^0, u(t))$ как функции только $t \in \mathcal{C}^1 : \ |t| < 1$. Далее нетрудно от класса H^M перейти к классу $\mathcal{R} \triangleq \{f \in \mathcal{A}(U_{|t|<1})\colon |f| \le 1\}$ или рассматривать проблему $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ в классе $\mathcal{E}$, считая $e^{-i\cdot 0{,}5\pi}{}_{+}\sqrt{H^M} \subset \mathcal{E}$. В обоих случаях условия существования и единственности решения проблемы $\mathcal{N}$–$\mathcal{P}$ могут быть сформулированы в терминах сходимости или расходимости произведения Бляшке [22]

$$b(t) \triangleq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t_k - t}{1 - \bar{t}_k\, t} \cdot \frac{\bar{t}_k}{|t_k|} \triangleq \lim_{N\to\infty} b_N(t), \tag{4}$$

свойства неотрицательной определенности матриц

$$G_m \triangleq \left\| \frac{1 - z_j \bar{z}_k}{1 - t_j \bar{t}_k} \right\|_{j,k=1}^{m} \tag{5}$$

что не совсем удобно (выражение (5)) для наших целей — в перспективе практической реализации. Поэтому целесообразней отказаться от компактных формулировок в терминах (5) и использовать чисто рекурентный способ, основанный на результатах Неванлинны и Данжуа [26]. Вводя замену времени $dt = Md\tau$ и $x = My$, а затем $(\tau := t)\&(y := x)$ (чтобы не перегружать обозначения), перейдем от H^M к классу $\mathcal{R} = H^1$. Поскольку никаких действий над величинами x^0 и u не выполняется, будем вместо $x_i(t, x^0, u(t))$ писать сокращенно — $x_i(t) \stackrel{\triangle}{=} x_i(t, x^0, u(t))$. Нижеследующий алгоритм — рекуррентный, поэтому удобно ввести первый нулевой индекс

$$ {}_0x_i(t) \stackrel{\triangle}{=} x_i(t), $$

при этом используется следующая запись:

$$ {}_0x_i(t_k) \stackrel{\triangle}{=} x_i(t_k) \stackrel{\triangle}{=} {}_kx_i^{(0)}, \qquad k \in \overline{1:+\infty}, \quad i \in \overline{1:n}. \tag{6} $$

По определению считается, что если на ν-м шаге получена функция ${}_\nu x_i(t)$, то для ее значений в точках последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ приняты обозначения

$$ {}_\nu x_i(t_k) = {}_kx_i^{(\nu)}, \qquad k \in \overline{1:+\infty}, \quad i \in \overline{1:n}. \tag{7} $$

Принцип рекуррентности в данном алгоритме заключается в том, что начиная с номера 1, последовательно строятся функции ${}_\nu x_i(t)$, рационально (дробно-линейно) зависящие от t и ${}_{\nu-1}x_i(t)$ со специально выбираемыми интерполяционными данными для ${}_\nu x_i(t)$, т.е. значениями ${}_kx_i^{(\nu)}$ при $k \in \overline{1:+\infty}$. Затем по обратным рекуррентным формулам (для дробно-линейных преобразований) выписывается искомая функция ${}_0x_i(t) = x_i(t)$.

Шаг 1. Формулы, представляющие решение проблемы $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ $(\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{{}_kx_i^{(0)}\}_{k=1}^{+\infty})$ $\quad i \in \overline{1:n}$, определяются выражениями

$$ \forall i \in \overline{1:n} \quad x_i(t) = \frac{P^{(i)}(t) - Q^{(i)}(t)_\infty x_i(t)}{1 - S^{(i)}(t)_\infty x_i(t)}, \quad |t| < 1, \tag{8} $$

где ${}_\infty x_i(t)$ — произвольная функция класса H^1, а величины $P^{(i)}(t)$, $Q^{(i)}(t)$, $S^{(i)}(t)$ определяются формулами

$$ \begin{gathered} P^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} P_{m_k}^{(i)}(t), \quad Q^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} Q_{m_k}^{(i)}(t), \quad i \in \overline{1:n}, \\ S^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} S_{m_k}^{(i)}(t), \quad i \in \overline{1:n}, \end{gathered} \tag{9} $$

где все пределы в (9) существуют и равномерные, т.е. последовательности $\{P_{m_k}^{(i)}(t)\}$, $\{Q_{m_k}^{(i)}(t)\}$, $\{S_{m_k}^{(i)}(t)\}$, $\forall i$ равномерно сходятся к соответствующим

$P^{(i)}(t)$, $Q^{(i)}(t)$ и $S^{(i)}(t)$ в любом замкнутом множестве из единичного круга $|t| < 1$, при этом соответствующая последовательность индексов $\{m_k\}$ существует [26]. Далее следует, что функция

$$X_{m_k}^{(i)}(t) \triangleq \frac{P_{m_k}^{(i)}(t) - Q_{m_k}^{(i)}(t)_\infty x_i(t)}{1 - S_{m_k}^{(i)}(t)_\infty x_i(t)}, \quad |t| < 1, \tag{10}$$

также из H^1 и удовлетворяет первым m_k условиям интерполяции, т.е. $X_{m_k}^{(i)}(t_\nu) = {}_\nu x_i^{(0)}$ $\forall i \in \overline{1:n}$, $\forall \nu \in \overline{1:m_k}$; для функций $P_\nu^{(i)}(t)$, $Q_\nu^{(i)}(t)$ и $S_\nu^{(i)}(t)$ справедливы следующие формулы вычислений при $\nu \in \overline{0:+\infty}$:

$$\begin{gathered} P_\nu^{(i)}(t) = A_\nu^{(i)}(t)\left(C_\nu^{(i)}(t)\right)^{-1}, \quad Q_\nu^{(i)}(t) = B_\nu^{(i)}(t)\left(C_\nu^{(i)}(t)\right)^{-1}, \\ S_\nu^{(i)}(t) = D_\nu^{(i)}(t)\left(C_\nu^{(i)}(t)\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{11}$$

при этом $P_\nu^{(i)}$, $Q_\nu^{(i)}$, $S_\nu^{(i)} \in H^1$ $\forall \nu \in \overline{0:+\infty}$, $\forall i \in \overline{1:n}$ [26]. Вспомогательные функции $A_\nu^{(i)}(t), B_\nu^{(i)}(t), D_\nu^{(i)}(t), C_\nu^{(i)}(t)$ вычисляются по формулам

$$\forall\forall i \in \overline{1:n}, \quad \nu \in \overline{0:+\infty},$$

$$\begin{gathered} A_\nu^{(i)}(t) \triangleq \left[t_\nu(1 - |t_\nu|^2|_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2) - |t_\nu|^2(1 - |_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2 t\right] \times \\ \times A_{\nu-1}^{(i)}(t) - t_{\nu\nu} x_i^{(\nu-1)}(1 - |t_\nu|^2) B_{\nu-1}^{(i)}(t), \end{gathered} \tag{12.1}$$

$$\begin{gathered} B_\nu^{(i)}(t) \triangleq |t_\nu|_\nu \bar{x}_i^{(\nu-1)}(1 - |t_\nu|^2) t A_{\nu-1}^{(i)}(t) + [t_\nu|t_\nu| \times \\ \times (1 - |_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2) - |t_\nu|(1 - |t_\nu|^2|_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2)t\Big] B_{\nu-1}^{(i)}(t), \end{gathered} \tag{12.2}$$

$$\begin{gathered} C_\nu^{(i)} \triangleq \left[t_\nu(1 - |t_\nu|^2|_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2) - |t_\nu|^2(1 - |_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2 t)\right] \times \\ \times C_{\nu-1}^{(i)}(t) - t_{\nu\nu} x_i^{(\nu-1)}(1 - |t_\nu|^2) D_{\nu-1}^{(i)}(t), \end{gathered} \tag{12.3}$$

$$\begin{gathered} D_\nu^{(i)}(t) \triangleq |t_\nu|_\nu \bar{x}_i^{(\nu-1)}(1 - |t_\nu|^2) t C_{\nu-1}^{(i)}(t) + [t_\nu|t_\nu \times \\ \times (1 - |_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2) - |t_\nu|(1 - |t_\nu|^2\ |_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2)t\Big] D_{\nu-1}^{(i)}(t), \end{gathered} \tag{12.4}$$

причем $A_0^{(i)} = 0$, $B_0^{(i)} = -1$, $C_0^{(i)} = 1$, $D_0^{(i)} = 0$ $\forall i \in \overline{1:n}$. При этом наряду с формулой (8) справедливы эквивалентные формулы для $x_i(t)$

$$x_i(t) = \frac{A_{\nu-1}^{(i)}(t) - B_{\nu-1}^{(i)}(t)_{\nu-1} x_i(t)}{C_{\nu-1}^{(i)}(t) - D_{\nu-1}^{(i)}(t)_{\nu-1} x_i(t)} = \frac{A_\nu^{(i)}(t) - B_\nu^{(i)}(t)_\nu x_i(t)}{C_\nu^{(i)}(t) - D_\nu^{(i)}(t)_\nu x_i(t)},$$

где ${}_k x_i^{(\nu)}(t) = {}_\nu x_i(t_k)$, $k > \nu$. На самом деле (8) вытекает из этих формул при $\nu \to +\infty$.

Таким образом, определитель дробно-линейной функции в (10), вычисленный согласно (11) и (12), равен

$$
\begin{gathered}
A_\nu^{(i)}(t)D_\nu^{(i)}(t) - B_\nu^{(i)}(t)C_\nu^{(i)}(t) = \prod_{\mu=1}^{\nu}\Big[|t_\mu|(1-|{}_\mu x_i^{(\nu-1)}|^2)\times \\
\times(1-|t_\mu|^2|{}_\mu x_i^{(\nu-1)}|^2)(t-t_\mu)(|t_\mu|^2 t - t_\mu)\Big]
\end{gathered}
\tag{13}
$$

и обращается в нуль внутри единичного круга только в точках t_ν. Из [26] следует, что $C_\nu^{(i)}(t) \neq 0$, $|t| \leq 1$. Функции $A_\nu^{(i)}$, $B_\nu^{(i)}$, $C_\nu^{(i)}$ и $D_\nu^{(i)}$ из (12) зависимы, поэтому целесообразно их параметризовать друг через друга. Тогда будем иметь уравнения связи [27]

$$
A_\nu^{(i)}(t) = (-1)^{\nu+1}\frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu} t_k}{\left|\prod\limits_{k=1}^{\nu} t_k\right|}\, t^\nu \bar{D}_\nu^{(i)}(\frac{1}{t}),
\tag{14}
$$

$$
B_\nu^{(i)}(t) = (-1)^{\nu+1}\frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu} t_k}{\left|\prod\limits_{k=1}^{\nu} t_k\right|}\, t^\nu \bar{C}_\nu^{(i)}(\frac{1}{t}),
\tag{15}
$$

вычисляя $D_\nu^{(i)}(t)$ и $C_\nu^{(i)}(t)$ по (12), находим $A_\nu^{(i)}(t)$ и $B_\nu^{(i)}(t)$ $\forall\, i \in \overline{1:n}$, $\nu \in \overline{0:\infty}$. Возвращаясь к (8), необходимо сузить произвол функций ${}_\infty x_i(t)$ и $x_i(t)$.

Т е о р е м а Данжуа [27]. Необходимым и достаточным условием того, что $x_i(t)$ из (8) единственна, является (при условии существования решения) расходимость произведения

$$
\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{|t_\nu|(1-|{}_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2)}{1-|t_\nu|^2|{}_\nu x_i^{(\nu-1)}|^2},
\tag{16}
$$

а необходимым и достаточным условием расходимости последнего является расходимость ряда

$$
\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-|t_\nu|}{1-|{}_\nu x_i^{(\nu-1)}|}.
\tag{17}
$$

Следствие. Поскольку $\prod_{\nu=1}^{\infty}|t_\nu|$ — расходится $\Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|t_\nu|)$ — расходится $\Longrightarrow$ расходимость (17), то расходимость $\prod_{\nu=1}^{\infty}|t_\nu|$ всегда влечет единственность решения проблемы $\mathcal{N}-\mathcal{P}$ в H^1, как и расходимость

$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|t_\nu|)$ ▲. Но последовательность $\{t_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ выбираема нами и добиться расходимости $\prod_{\nu=1}^{\infty}|t_\nu|$ или $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|t_\nu|)$ не представляет труда.

Данные рассуждения составляют содержание известной теоремы Бляшке, которая не формально приведена в [22]. Заметим, что сходимость ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|t_\nu|) \tag{18}$$

выражает необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости произведения Бляшке $b(t)$ из (4) [26]. Таким образом, условие единственности решения $x_i(t,x^0,u(t))$[5] проблемы $\mathcal{N}-\mathcal{P}$ в H^1 с данными $(\{t_k\}_{k=1}^{\infty},\{{}_kx_i^{(0)}\}_{k=1}^{\infty})$ $|t_k|<1$, $|{}_kx_i^{(0)}|\le 1$, а значит и интерполяция решения задачи Коши системы (1) может быть выражено в терминах функции $b(t)$.

Для случая конечной последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{m}$ формулы (8)–(15) остаются $\forall m<+\infty$ без изменений при существовании решения проблемы $\mathcal{N}-\mathcal{P}$, которое теперь без априорных условий может быть легко проверено с помощью условий неотрицательной определенности матрицы

$${}^{(i)}G_m=\|(1-{}_jx_i\cdot{}_k\bar{x}_i)(1-t_j\bar{t}_k)^{-1}\|_{j,k=1}^{m},\quad i\in\overline{1:n},$$

являющихся необходимыми и достаточными для существования. Очень эффективное необходимое и достаточное условие существования решения интерполяционной проблемы $\mathcal{N}-\mathcal{P}$ для класса $H^1=\mathcal{B}$ и для более удобного в приложении класса $\mathcal{P}H^M$ в общем случае бесконечной последовательности узлов $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ будут приведены ниже.

В настоящее время имеется ряд теорем [22, 26] об аналитическом продолжении интерполированных таким образом функций за границу круга $|t|<1$ в определенном направлении. Часто оказывается, что в основе таких теорем лежит принцип симметрии Шварца. По понятным причинам вопрос об аналитическом продолжении интерполяционной функции $x_i(t,x^{(0)},u(t))$, построенной выше, за границу круга $|t|<1$ является несомненно важным как с точки зрения собственной аналитической теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения идентификации (или оценки параметров) системы (1) при (2). В первом случае речь может идти (при положительном решении вопроса продолжения) о построении аналитического решения задачи Коши для (1) при наблюдении $z(t)$ из (2). Конечно это не классический подход к вопросу построения решения задачи

[5] $x_i(t,x^0,u(t))\triangleq x_i(t,x^0,u:[t_0,t]\to C^1)$.

Коши, однако во многих практических важных случаях фазовое состояние механической системы действительно может наблюдаться при условиях близких к рассматриваемым (твердое тело, задача 3-х тел). При этом, если не придерживаться принципиальной точки зрения на задачу Коши и по возможности измерять фазовые состояния системы, то будет получено решение, описывающее динамику этой системы. Кроме того, вопросы конструктивного построения аналитических решений задачи Коши всегда сложны и постоянно разрабатываются. Во втором случае — при идентификации, продолженное за круг $|t| < 1$ решение $x_i(t, x^{(0)}, u(t))$ также может оказать большую пользу при работе с самим объектом. Дело в том, что за время пока ЭВМ обрабатывает информацию и считывает программу идентификации, объект управления может уйти в неизвестную область фазового пространства. Но имея продолженное решение $x_i(t, x^{(0)}, u(t))$ на максимальный интервал существования, после работы ЭВМ и определения параметров объекта (либо оценок, либо параметров, эквивалентных исходным, т.е. точек из $\mathfrak{M}$) можно начинать работу с объектом при известном его новом начальном состоянии в некоторый момент $t_{\oplus}$. В этой связи отметим интересную и важную проблему, поставленную в работе [26], которая может касаться задачи идентификации (1), (2).

Пусть $b(t)$ — такое произведение Бляшке, для которого множество нулей $\{t_k\}$ имеет в качестве производного множества (множества всех предельных точек) всю окружность $|t| = 1$. Тогда согласно теореме 4.1 [26] окружность $|t| = 1$ есть естественная граница для $b(t)$, т.е. $b(t)$ не продолжима аналитически ни через какую дугу окружности $|t| = 1$. Однако можно показать, что бесконечное произведение

$$\tilde{b}(t) = \left(\overline{b(\bar{t}^{-1})}\right)^{-1} \tag{19}$$

вполне определено и представляет мероморфную функцию в области $|t| > 1$, которая почти всюду на окружности $|t| = 1$ имеет радиальные пределы

$$\lim_{r \to 1+0} \tilde{b}(t), \tag{20}$$

совпадающие с пределами $b(t)$. Функция $\tilde{b}(t)$ определяет $b(t)$ единственным образом и наоборот. Как отмечено в [26] в высшей степени полезно определить в связи с этим и развить понятие некоего “обобщенного аналитического продолжения”. Другой пример, не касающийся внутренних функций (содержащих множителем произведение Бляшке), дает функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{t - \zeta_k}, \tag{21}$$

где последовательность точек $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — плотная на окружности $|t| = 1$, а $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность не равных нулю комплексных чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$. Очевидно $f(t)$ — аналитическая и непродолжима аналитически ни через какую дугу окружности $|t| = 1$. Подобно $b(t)$ она имеет радиальные и даже угловые пределы [26] на окружности $|t| = 1$, совпадающие почти всюду с радиальными и угловыми пределами этой функции при $|t| > 1$.

Шаг 2. Функции (8), т.е. $x_i(t, x^{(0)}, u(t)), \quad i \in \overline{1:n}$, используем для определения оценок параметров исходной системы (1). Предварительно вернемся из класса H^1 в H^M, т.е. к старому времени. Выбирая последовательность $\{t_k\}$, $k \in \overline{1:s}$, из области ее определения (не обязательно из узлов интерполяции) имеем значения

$$ {}_k\dot{x}_i = \dot{x}_i(t_k, x^0, u(t_k)) \stackrel{\triangle}{=} \dot{x}_i(t_k, x^0, u : [t_1, t_k] \to C^1), \quad i \in \overline{1:n} \tag{22} $$

ибо $x(t, x^{(0)}, u(t))$ — аналитично. Поскольку "значения" $x_i(t_k, x^{(0)}, u(t_k))$, t_k, $u : [t_1, t_k] \to C^1$ лежат в области определения аналитических функций $f_i(t, x, u)$, то справедливы соотношения

$$ {}_k\dot{x}_i = \sum_{\substack{\nu=0 \\ |\bar{\mu}|\geq 0, |\bar{\rho}|\geq 0}}^{\infty} f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}} t_k^{\nu} x_k^{\bar{\mu}} u_k^{\bar{\rho}}, i \in \overline{1:n}, \tag{23} $$

для поликругов U_i, где $x_k^{\bar{\mu}} \stackrel{\triangle}{=} {}_kx_1^{\mu_1} \dots {}_kx_n^{\mu_n}$, $u_k^{\bar{\rho}} \stackrel{\triangle}{=} {}_ku_1^{\rho_1} \dots {}_ku_m^{\rho_m}$. Система (23) линейна по $f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}$. Ряды справа абсолютно сходятся в $\operatorname{int} U_i$ $i \in \overline{1:n}$. Оценка $|f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}|$ осуществляется стандартно — через оценку $\max\limits_{U_i} |f_i|$, но на решении $x_i(t, x^{(0)}, u(t))$ (полученном интерполяцией) имеем, что $\max\limits_{U_i} |f_i| \leq \max\limits_{U_i} |\dot{x}_i(t, x^0, u : [t_1 : t] \to C^1)|$ — известной. Тогда при соответствующем количестве выбранных точек t_k, т.е. величины s, имеем оценку остаточных членов в рядах из (23), а вместе с точным решением усеченной системы

$$ {}_k\dot{x}_i = \sum_{\substack{\nu = 0 \\ 0 \leq |\bar{\mu}| \leq \hat{\mu} \\ 0 \leq |\bar{\rho}| \leq \hat{\rho}}}^{\hat{V}} f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}} t_k^{\nu} x_k^{\bar{\mu}} u_k^{\bar{\rho}}, i \in \overline{1:n}, \tag{24} $$

получаем коэффициенты $f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}$ $i \in \overline{1:n}$, $0 \leq \nu \leq \hat{\nu}$, $0 \leq |\bar{\mu}| \leq \hat{\mu}$, $0 \leq |\bar{\rho}| \leq \hat{\rho}$, $s = s(n, \hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\rho})$. Многочлены из (24) с коэффициентами $f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}$ из (24) отклоняются в поликругах U_i не более чем на максимум модуля в U_i $i \in \overline{1:n}$, отброшенных остаточных членов, которые, как было уже замечено, легко оцениваются.

Заметим, что априори могло бы предполагаться, что функции f_i в областях U_i $i \in \overline{1:n}$, мероморфны или какого-либо другого функционального класса, допускающего существование единственного аналитического решения задачи Коши. Тогда в (23) и (24) (справа) стояли бы конечные суммы- разложения f_i по алгебраическому базису, соответствующего класса. В практической реализации, если только исследование системы (1) не касается качественно аналитических свойств функций f_i и решений $x_i(t, x^{(0)}, u(t))$, процедуры интерполяции $x(t, x^{(0)}, u(t))$ и решения (23), (24) должны выполняться над конечными суммами и последовательностями со сквозными оценками. Для получения последних могут быть привлечены численные и аналитические методы оценок остаточных членов интерполяции, например [20], а также численные и аналитические методы оценок решений конечных и бесконечных линейных систем уравнений, например работы Курпеля [28].

Замечание 1. Формулы (8) верны только при условии существования решения проблемы $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ для данных $(\{t_k\}, \{{}_k x_i^{(0)}\}_{k=1}^{\infty})$ из H^1, что не акцентировано в работе [27], из-за чего возможно неправильное толкование утверждения. Например из (8) [27] следует, что разрешима проблема $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ для данных

$$(\{t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t^* : |t^*| < 1\}, \{({}_{2k}x_i^{(0)} = \text{const})\&({}_{2k+1}x_i^{(0)} - \text{произвольные},$$

но $|{}_{2k+1}x_i^{(0)}| \leq 1)\})$, т.е. для не постоянной аналитической функции, накапливающей в области аналитичности в точке t^* постоянное значение, что абсурдно. Таким образом, необходимо иметь в виду выражения (4) и, что особенно важно (при не единственном решении), выражения (5) [21, 23]. Либо действуя, как в задаче идентификации, предполагать априорное существование аналитического решения для (I) $- x_i(t, x^0, u(t))$, решающего проблему $\mathcal{N} - \mathcal{P}$. Одного же свойства расходимости $b(t)$ – произведения Бляшке из (4) недостаточно для утверждения *существования и единственности*, а требуются дополнительные условия, влекущие прежде существование решения, что не акцентировано в [27]. Если же произведение Бляшке $b(t)$ сходится, то при существовании решения проблемы $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ по $\left(\{t_k\}, \{{}_k x_i^{(0)}\}\right)_{k=1}^{\infty}$, оно будет единственным тогда и только тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \det \mathcal{P}_n / \det G_n = +\infty, \tag{25}$$

где G_n матрица из (5), а матрица $\mathcal{P}_n$ имеет вид

$$\mathcal{P}_n = -\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & t_1^{-1} & t_2^{-1} & \dots & t_n^{-1} \\ \hline \bar{t}_1^{-1} & & & & \\ \bar{t}_2^{-1} & & & & \\ \vdots & & & G_n & \\ \bar{t}_n^{-1} & & & & \end{array}\right) \tag{26}$$

Что, однако, трудно проверяемо в задачах идентификации и создает дополнительные проблемы.

§2. Универсальные интерполяционные последовательности Хеймана и построение аналитических дифференциальных уравнений с заданным множеством значений аналитических решений задачи Коши

Пусть требуется построить семейство Ω обыкновенных аналитических дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \underset{(\omega)}{f}\,(t, x, \underset{(\omega)}{u}(t)), \tag{27}$$

где $t \in C^1$, $x \in C^n$, $\underset{(\omega)}{u_i}(t) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $i \in \overline{1{:}m}$, $\mathcal{D} \subseteq C^1$, $\underset{(\omega)}{f_i}$ — голоморфные функции своих аргументов $\forall \omega \in \Omega$, $i \in \overline{1{:}n}$, в общей для всех $\omega \in \Omega$ области $W \subseteq C_t^1 \times C_x^n \times D_u^m$, такое, чтобы каждое по $\omega \in \Omega$ голоморфное в круге $|t| < 1$ решение задачи Коши $\underset{(\omega)}{x}\,(t, \underset{(\omega)}{x^0}, \underset{(\omega)}{u}(t))$ из (27) принимало заданные значения ${}_k\underset{(\omega)}{x}$ $k \in \overline{1{:}\infty}$: $|{}_k\underset{(\omega)}{x_i}| \leq 1$, $\forall i \in \overline{1{:}n}$, $k \in \overline{1{:}\infty}$ (свои для каждого $\omega \in \Omega$ и $\underset{(\omega)}{x}\,(t, \underset{(\omega)}{x^0}, \underset{(a)}{u}(t))$) при общих для всего Ω значениях времени $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$: $|t_k| < 1$ $\forall k \in \overline{1{:}\infty}$, т.е. на общевременной последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Иначе говоря, проводя *одновременные* измерения фазовых состояний всех систем из Ω в некоторые моменты t_k : $|t_k| < 1$ $\forall k$, требуется получить заданные значения ${}_k\underset{(\omega)}{x}$. При $\Omega \triangleq \{\omega_1\}$ (одноточечном), решение сводится к нахождению некоторой последовательности узлов интерполяции $\{t_k\}$: $|t_k| < 1$, согласованных с последовательностью значений ${}_k\underset{(\omega_1)}{x} = ({}_k\underset{(\omega_1)}{x_1}, \dots, {}_k\underset{(\omega_1)}{x_n}) \in U_1(0)$ — поликруг полирадиуса 1, т.е. к интерполяции на одной последовательности узлов $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ уже только n голоморфных функций $\underset{(\omega_1)}{x_i}(t, \underset{(\omega_1)}{x^0}, \underset{(\omega_1)}{u}(t))$, $i \in \overline{1{:}n}$, формирующих аналитическое векторное решение задачи Коши искомой единственной системы вида (27). Значит требуется согласование последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ (искомой) с n последовательностями $\{_k \underset{(\omega_1)}{x_i}\}_{k=1}^{\infty}$. Т.е. вышепоставленный вопрос содержателен для одноточечного Ω. Подчеркнем то обстоятельство, что с аналитической точки зрения всегда вместо семейства Ω можно взять новое семейство Ω^*, состоящее из одной точки, т.е. от семейств систем уравнений перейти к одной системе уравнений суммарной размерности, состоящей из невзаимодействующих подсистем. Однако вышесформулированные условия лучше отражают физический смысл задачи, чем не формальный.

Теперь мы не располагаем никакими априорными сведениями о существовании решений проблемы $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ в $H^1 = \mathcal{B}$, как это было в первом пункте, поэтому построение последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, приводящей к расходимости произвеления Бляшке $b(t)$, ничего не дает в плане решения, т.к. теперь единственность не влечет существования. Однако данный вопрос может быть решен положительно и при том всегда.

Определение 1 (Хейман). Последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} : |t_k| < 1$ $\forall k \in \overline{1{:}\infty}$ называется У-интерполяционной (универсальной), если для любой данной последовательности значений $\{_k x\}_{k=1}^{\infty} : |_k x| \le 1 \quad \forall k$ существует ограниченная аналитическая функция $f(t) = x$ в круге $|t| < 1$ такая, что $f(t_k) = {}_k x$.

Условия задачи показывают, что точки последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ различны и не имеют предельных в круге $|t_k| < 1$.

Определение 2. Псевдогиперболическим расстоянием между точками t_n и t_m называется функция

$$\chi(t_n, t_m) = \left| \frac{t_n - t_m}{1 - \bar{t}_m \cdot t_n} \right|, \tag{28}$$

которая связана с гиперболической метрикой $\rho(t_n, t_m)$ соотношением

$$\rho(t_n, t_m) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \chi(t_n, t_m)}{1 - \chi(t_n, t_m)} = \operatorname{Arth} \chi(t_n, t_m). \tag{29}$$

Определение 3. Последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется равномерно разделенной, если

$$\exists\, \delta > 0 \Rightarrow \prod_{k \ne n, n=1}^{\infty} \chi(t_k, t_n) \ge \delta > 0 \quad \forall k \in \overline{1{:}\infty}. \tag{30}$$

Геометрически равномерная разделенность эквивалентна тому, что множество уровня

$$ {}_{b(t)}\mathrm{T}_{\varepsilon} \stackrel{\triangle}{=} \{t\in C^1 : |b(t)| = \varepsilon > 0\} $$

произведения Бляшке $b(t)$ с нулями $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ для достаточно малых ε состоят из взаимно не пересекающихся кривых, каждая из которых окружает в точности одну точку t_k. Очевидно также, что произведение Бляшке $b(t)$ с нулями по равномерно разделенной последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится.

Теорема (Карлесон) [26]. Последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} : |t_k| < 1$, $k\in\overline{1{:}\infty}$ может быть У-интерполяционной (т.е. для какой- либо произвольной последовательности $\{{}_kx\}_{k=1}^{\infty} : |{}_kx| \le 1,\ k\in\overline{1{:}\infty}$) тогда и только тогда, когда она ($\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$) равномерно разделена.

Эта теорема показывает, что для произвольных последовательностей $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{{}_kx\}_{k=1}^{\infty}$ решение $f(t)$ существует и не единственное при $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно разделенной, т.к. любая функция $f(t) + b(t)\cdot g(t)$, где $b(t)$ произведение Бляшке с нулями в $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, а $g(t)$ — произвольная ограниченная функция, также является решением. Это “общее решение” зависит от сходимости $b(t)$. Единственность будет тогда, когда

$$ (\exists\, f(t) : {}_kx = f(t_k))\ \&\ \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |t_k|) = \infty\Big) $$

Таким образом, теорема Карлесона решает поставленную выше задачу построения системы интерполяционных функций для заданных значений ${}_k\underset{(\omega)}{x_i} : |{}_k\underset{(\omega)}{x_i}| \le 1 \quad i\in\overline{1{:}n},\ k\in\overline{1{:}\infty},\ \omega\in\Omega$, если в качестве узлов интерполяции выбрать любую У-интерполяционную последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Решение получается, как правило, не единственным, чего и не требовалось, т.е. является общим — сразу определяется все семейство интерполирующих функций из $\mathrm{H}^1 = \mathcal{B}$ по данным $(\{t_k\}_{k=1}^{\infty}, \{{}_kx\}_{k=1}^{\infty})$.

По аналитическим интерполяционным функциям $\underset{(\omega)}{x}(t, \underset{(\omega)}{x^0}, \underset{(a)}{u}(t))$ — решениям проблемы Неванлинны-Пика, каждая для данных $(\{t_k\}_{k=1}^{\infty},\ \&\ \{{}_k\underset{(w)}{x}\}_{k=1}^{\infty})\ \forall\,\omega\in\Omega$ система вида (27) строится, как и выше, из линейных соотношений (с оценкой отброшенных членов) $\forall\,\omega\in\Omega$

$$ \dot{x} \stackrel{\triangle}{=} \underset{(\omega)}{\dot{x}}(t, \underset{(\omega)}{x^0}, \underset{(\omega)}{u} : [t_1, t] \to \mathrm{C}^1) = \sum_{\substack{\nu=0\\ 0\le|\bar{\mu}|\le\hat{\mu}\\ 0\le|\bar{\rho}|\le\hat{\rho}}}^{\hat{\nu}} \underset{(\omega)}{f}_{\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}\, t^{\nu}\, \underset{(\omega)}{x}^{\bar{\mu}}\, \underset{(\omega)}{u}^{\bar{\rho}}. \qquad (31) $$

Данная методика распространяется на задачи соответствующего типа для других важных пространств, отличных от H^1, H^{M}, $\mathcal{E}$ и т.д. из [22, 24].

Пусть теперь известно, что решение задачи Коши $x(t,x^0,u(t))$ системы (1) первого пункта голоморфно и ограничено на полосе:

$$(\operatorname{Re} t\in(-\infty,+\infty))\,\&\,(\operatorname{Im} t\in[-h,h]),\quad |x(t,x^0,u(t))|<M$$

при x^0 и $u(t)$, лежащих в своих допустимых областях, причем $u\in\mathcal{A}(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}\subseteq \mathrm{C}^1$. Перейдем к новому времени τ путем замены[6]

$$\tau=(e^{\frac{\pi}{2h}t}-1)(e^{\frac{\pi}{2h}t}+1)^{-1}, \tag{32}$$

переводящей внутренность полосы ширины $2h$ вдоль $\operatorname{Re} t$ во внутренность единичного круга переменной τ. Следует сделать важное замечание по поводу использования замены (32) в данной задаче. Как известно, практическое использование преобразования Пуанкаре (32) для представления решения задачи Коши во всем интервале существования в задачах небесной механики (и общих задачах аналитической динамики) мало пригодно из-за медленной сходимости рядов Пуанкаре. Однако к рассматриваемой задаче решения проблемы Неванлинны-Пика в классе $\mathrm{H}^1=\mathcal{B}$ это не имеет никакого отношения, так как, во-первых, заранее предполагается, что решение задачи Коши в данном случае ограничено в полосе (как, например, в задаче движения тяжелого твердого тела). Во-вторых, новое время τ заменяется по формулам (32) на старое время t не в степенных рядах, представляющих решение задачи Коши, а в интерполяционных функциях, являющихся существенно рациональными. Таким образом, здесь как нельзя лучше проявляется хорошее качество интерполяции (правда за счет полученной информации о состояниях $\{{}_k x\}$) по сравнению с чисто классическим подходом к решению задачи Коши, т.е. всего одно интерполяционное значение: при $t=0$ $x(t)={}_0x$. Поэтому не возникает типичной трудности — большого объема вычислений значения решения задачи Коши после преобразования (32) при приближении τ к границе круга (изнутри). В интерполяционной задаче все точки — значения аргумента $\tau:|\tau|<1$ равноправны.

Далее заметим, что фактически замену (32) ни в какие дифференциальные уравнения движения подставлять не надо. Процедура вычислений следующая: пусть последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — из указанной выше полосы, тогда имеем последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\tau_k=(e^{\frac{\pi}{2h}t_k}-1)(e^{\frac{\pi}{2h}t_k}+1)^{-1},\quad k\in\overline{1{:}\infty} \tag{33}$$

[6]Это преобразование использовалось Пуанкаре, Зубовым в аналитических задачах динамики.

так, что $|\tau_k| < 1\ \forall k$. Проверяем $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ на свойство равномерной разделенности, эквивалентной свойству У- интерполяционности. Либо обратно, сразу выбираем $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно разделенной из круга $|\tau| < 1$, тогда, разрешая голоморфное отображение (33), получим, что

$$t_k = \frac{2h}{\pi}\ \ln\frac{1+\tau_k}{1-\tau_k}, \quad k\in\overline{1{:}\infty}$$

откуда имеем последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ из полосы. При этом полезно учесть, что вещественная ось $\mathrm{Re}\, t$ переходит при (32), (33) в отрезок $(-1,+1)$. Таким образом решение интерполяционной проблемы Неванлинны-Пика для класса $\mathrm{H}^1 = \mathcal{B}$ переносится на класс, голоморфных в полосе $|\mathrm{Im}\, t| < h$ и ограниченных там величиной M, функций $\mathcal{F}$, который обозначим $\mathcal{P}\mathrm{H}^{\mathrm{M}}$.

Окончательная процедура восстановления коэффициентов $f_{i\nu\bar{\mu}\bar{\rho}}$ из (31) проводится при подстановке в решение проблемы $\mathcal{N}-\mathcal{P}$ в классе $\mathcal{P}\mathrm{H}^{\mathrm{M}}$ вместо τ его значения от t по (32).

Замечание. Доказательство теорем Неванлинны и Карлесона, а также свойства произведения Бляшке можно найти в монографии Дж. Гарнета [23]. При этом следует заметить, что там определение интерполяционных последовательностей совпадает с определением Хеймана для У-интерполяционных. Кроме того, проблема Неванлинны-Пика изучается в [23] для банаховой алгебры H^{∞}.

Данная методика может найти важные приложения в ряде актуальных практических задач. Рассмотрим одну из них.

Задача. Пусть имеется семейство систем Ω, возможно несчетное (проблема $\mathcal{N}-\mathcal{P}$ для $\mathrm{H}^1 = \mathcal{B}$ допускает несчетные последовательности[7] $\{t_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ [22]), аналитических дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \underset{(\omega)}{f}\,(t, x, \underset{(\omega)}{u}(t)) \tag{34}$$

где u, $u(t)$, x, $\underset{(\omega)}{f}$ обладают свойствами как и прежде — в начале этого пункта, гарантирующими существование и голоморфность решения задачи Коши $\underset{(\omega)}{x}\,(t,\ \underset{(\omega)}{x^0},\ \underset{(a)}{u}(t))$ в указанной выше полосе ширины $2h$, а также то, что $|\underset{(\omega)}{x}\,(t,\ \underset{(\omega)}{x^0},\ \underset{(\omega)}{u}(t))| \le M,\ \forall\,\omega\in\Omega,\ t$ в полосе. Величины h и M практически могут быть известны, что не умаляет практического значения постановки задачи. Согласно основному подходу в задачах наблюдения и оценивания необходимо, по крайней мере, если параметры $\underset{(\omega)}{f}$ не известны, наблюдать

[7] k — трансфинитный параметр из несчетного множества $\mathcal{K}$.

какие-либо функции от фазовых состояний объектов движения, либо сами фазовые состояния. Т.е. первым делом необходимо выбрать либо заранее всю целиком, либо перманентно последовательность $\{t_k\}$ — моментов наблюдения. Причем, вообще говоря, необходимо строить для каждого интерполяционного частного решения $\underset{(\omega)}{x}(t,\ \underset{(\omega)}{x^0},\ \underset{(a)}{u}(t))$ свою последовательность узлов $\{t_k\}_\omega$ и на ней производить измерение значений $\underset{(\omega)}{x}(t,\ \underset{(\omega)}{x^0},\ \underset{(a)}{u}(t))$, получая тем самым данные $\{{}_k\underset{(\omega)}{x}\}_{k=1}^\infty$. Если множество Ω — большое, то указанная задача построения всех данных, т.е. ${}_k\underset{(\omega)}{x}\ \forall\,\omega\in\Omega$ на своей последовательности $\{t_k\}_\omega$ становится не обозримой практически ибо для этого может потребоваться чрезвычайно большой общий (для всего Ω) промежуток времени обработки информации.

Тем не менее, теорема Карлесона для функционального класса $\mathcal{P}\mathrm{H}^1$ существенно упрощает процедуру наблюдения и оценивания. Действительно, достаточно выбрать в качестве последовательности моментов наблюдения глобальную равномерно разделенную последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ из круга $|\tau|<1$, затем после интерполирования перейти по формулам (33) к соответствующей последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, принадлежащей указанной выше полосе и являющейся общей последовательностью моментов наблюдения для всех $\omega\in\Omega$. Но поскольку решение данной задачи существует в силу априорной информации об объекте, то условие $\sum_{k=1}^\infty(1-|\tau_k|)=\infty$ обеспечивает единственность каждого решения проблемы интерполяции $\underset{(\omega)}{x}(t,\ \underset{(\omega)}{x^0}, u\colon[t_1,t]\to\mathrm{C}^1)$ по соответствующим данным $\{{}_k\underset{(\omega)}{x}\}_{k=1}^\infty$ и для моментов $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, так как преобразование (32) эквивалентное (33) — голоморфное.

Следовательно, теперь в ясном смысле, теорема Карлесона позволяет построить квазиоптимальный процесс наблюдения за системой Ω. Однако в смысле выбора равномерно разделенных последовательностей $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$: $|\tau_k|<1$, являющихся У-интерполяционными, единственности нет, ибо условие (30) этого не обеспечивает. Таким образом, появляется возможность дальнейшей оптимизации путем выбора из семейства всех равномерно разделенных последовательностей $\{{}_\alpha\tau_k\}_{k=1}^\infty\quad \alpha\in\mathrm{A}\ :\ |{}_\alpha\tau_k|<1$ наилучшей $\{{}_{\alpha^*}\tau_k\}_{k=1}^\infty$ в некотором, относящимся к дальнейшей конкретизации и постановке задачи, смысле.

Литература

1. *Вишневский В.Э.* Функционально-аналитические представления решений в нелинейных задачах теории управления.—СПб: СПбГУ, 1998. 110 с.

2. *Вишневский В.Э.* Представление решений вблизи равновесия полиномиальных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение к некоторым задачам механики и математической кибернетики. Ч. 2. №4826–23 Деп. от 30 авг. 1983 г. ВИНИТИ, 49 с.

3. *Скоробогатько В.Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. М., 1983, 311 с.

4. *Балк М.В.* Интерполяционный процесс Паде для некоторых аналитических функций. —В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1960, с. 234 – 257.

5. *Гончар А.А.* О сходимости аппроксимаций Паде.—Матем. сб., М., 1973, 92:1, с. 152–164.

6. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1971, 232 с.

7. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М., 1967, с. 240.

8. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961, 508 с.

9. *Гончар А.А.* Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций.—Матем. сб., М., 1981, 115:4, с. 590–613.

10. *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосиб., 1983, 151 с.

11. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы. М., 1975, 192 с.

12. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М., 1966, 516 с.

13. *Гончар А.А.* Локальные условия однозначности аналитических функций. —Матем. сб., М., 1972, 89:1, с. 149.

14. *Гончар А.А.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде.—Матем. сб., М., 1982, 118:4, с. 535–556.

15. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966, с. 628.

16. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973, 552 с.

17. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. Т. 1, Рига, 1974, 392 с.

18. *Рутисхаузер Г.* Алгоритмы частных и разностей. М., 1960, 94 с.

19. *Wynn P.* On the convergence and stability of the epsilon algorithm.—SIAM J. Numer. Anal., 3, 1966, c. 91–122.

20. *Вишневский В.Э.* Функционально-аналитические представления решений в задачах теории автоматического регулирования.—СПб. 1975. 28 с. Автореферат докт. диссертации.

21. *Ибрагимов И.И.* Методы интерполяции функции и некоторые их приложения.–М., 1971, 518 с.

22. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.–М., 1973, 551 с.

23. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.–М., 1984, 469 с.

24. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов.–М., 1961, 310 с.

25. *Никольский Н.К.* Лекции об операторе сдвига.–М., 1980, 383 с.

26. *Ловатер А.* Граничное поведение аналитических функций.–В кн.: Итоги науки и техн., сер. Матем. анализ, вып. 10. Т. 10, М., 1973, с. 99– 204.

27. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.–М., 1961, 508 с.

28. *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.—Киев, И.Д. 1968, 243 с.

Содержание