

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.71

*Г. П. Малявкин, В. А. Шмыров, А. С. Шмыров***ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ
ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО
МНОГООБРАЗИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ
ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ***Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Статья посвящена проблеме стабилизации орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце—Земля. В рамках хилловского приближения ограниченной круговой задачи трех тел рассматривается специальная функция фазовых переменных, называемая функцией опасности. Последняя определяется как невырожденное решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных. Функция опасности может быть использована для аналитического представления некоторого инвариантного многообразия в окрестности точки либрации. На основе приближений функции опасности первого, второго и третьего порядка строятся три закона стабилизирующего управления движением в окрестности L_1 . При помощи численного моделирования с различными начальными условиями проводится сравнение энергетических затрат на реализацию полученных законов управления. Библиогр. 8 назв. Ил. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: ограниченная круговая задача трех тел, коллинеарные точки либрации, инвариантное многообразие, стабилизация движения.

*G. P. Maliavkin, V. A. Shmyrov, A. S. Shmyrov***DESIGN OF THE STABILIZING CONTROL OF THE ORBITAL
MOTION USING THE ANALYTICAL REPRESENTATION
OF AN INVARIANT MANIFOLD IN THE VICINITY
OF A COLLINEAR LIBRATION POINT**St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The article is devoted to the problem of stabilization of orbital motion in the vicinity of

Малявкин Георгий Павлович — инженер-исследователь; malgepav@yandex.ru*Шмыров Василий Александрович* — кандидат физико-математических наук, доцент;
vasilyshmyrov@yandex.ru*Шмыров Александр Сергеевич* — доктор физико-математических наук, профессор; ashmyrov@yandex.ru*Maliavkin Georgii Pavlovich* — research engineer; malgepav@yandex.ru*Shmyrov Vasilii Aleksandrovich* — PhD of physico-mathematical sciences, associate professor; vasilyshmyrov@yandex.ru*Shmyrov Aleksandr Sergeevich* — doctor of physico-mathematical sciences, professor; ashmyrov@yandex.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.37.345.2015).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

the collinear libration point L_1 of the Sun—Earth system. The key concept of the suggested approach is the so-called hazard function. The latter is a function of the phase variables of the Hill's approximation of the circular restricted three-body problem, which is defined as a nondegenerate solution of some partial differential equation. The hazard function can be used for the analytical representation of an invariant manifold in the vicinity of the libration point. Approximations of the hazard function of the first, second and the third order are obtained with the method of indefinite coefficients. These approximations are then used in the construction of three motion stabilizing control laws. Numerical modelling of the controlled motion is applied to compare these laws with respect to the energy consumptions. Refs 8. Figs 3. Table 1.

Keywords: restricted three-body problem, collinear libration point, invariant manifold, stabilizing control of motion.

1. Введение. Точками либрации называют положения равновесия в конфигурационном пространстве так называемой ограниченной круговой задачи трех тел, в которой рассматривается движение непритягивающего тела в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговым кеплеровским орбитам. Точки либрации являются частным случаем лагранжевых решений в общей задаче трех тел. В этих точках силы ньютоновского притяжения уравновешиваются центробежной силой, поэтому во вращающейся системе координат, связанной с притягивающими телами, малое тело, помещенное в точку либрации с нулевой начальной скоростью, остается в этом положении сколь угодно долго. Существует пять точек либрации. Три из них, располагающиеся на одной линии с массивными телами, получили название «коллинеарных» и обозначение L_1 , L_2 и L_3 , «треугольные» точки либрации L_4 и L_5 образуют с этими телами равносторонние треугольники [1].

Изучение движений в окрестностях коллинеарных точек либрации систем Солнце—Земля и Земля—Луна является одним из актуальных направлений в космических исследованиях. Коллинеарные точки либрации широко применяются при наблюдении за космическим пространством. К настоящему времени реализованы проекты по размещению аппаратов для исследования различных видов солнечной активности и космических телескопов в коллинеарных точках либрации L_1 и L_2 системы Солнце—Земля. В последнее время, однако, рассматривается возможность использования точек либрации и в иных целях. Например, такие компании как “Planetary Resources” и “Deep Space Industries” разрабатывают идею добычи полезных ископаемых из астероидов, предварительно уведенных со своей гелиоцентрической орбиты в окрестность точки либрации L_1 или L_2 системы Солнце—Земля или Земля—Луна.

Коллинеарные точки либрации неустойчивы [1]. Отсюда следует проблема стабилизации орбитального движения в их окрестностях. Настоящая работа посвящена исследованию законов стабилизирующего управления орбитальным движением в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце—Земля, построенных с помощью приближений различных порядков некоторой функции фазовых переменных, называемой функцией опасности. Последняя определяется как нетривиальное решение некоторого уравнения в частных производных и используется для аналитического представления некоторого инвариантного множества в окрестности точки либрации. На основе численного моделирования проведено сравнение энергетических затрат для построенных законов управления.

2. Уравнения движения. Для описания движения в окрестности точки либрации в дальнейшем используется система уравнений хилловского приближения ограниченной круговой задачи трех тел во вращающейся геоцентрической системе координат [2, 3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u, \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — геоцентрические координаты, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — скорость, а u — величина управляющего воздействия, направленного по линии Солнце—Земля. Единица расстояния равна расстоянию от Земли до L_1 , примерно равному 0.01 а. е., а единица времени выбрана так, что 2π единиц времени равняется одному году (периоду обращения Земли вокруг Солнца). При этом единица скорости равна 303.14 м/с, а единица ускорения — $5.93 \cdot 10^{-5}$ м/с² [4, 5].

В этой системе координат при $u = 0$ точке либрации L_1 соответствует положение равновесия (x^*, y^*) , где $x^* = (1, 0, 0)$, $y^* = (0, 1, 0)$.

Матрица линейного приближения системы в отклонениях от положения равновесия (x^*, y^*) имеет следующие собственные числа [6]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, & -\lambda_1, \\ \lambda_2 &= i\sqrt{-1 + 2\sqrt{7}} = i\omega_1, & -\lambda_2, \\ \lambda_3 &= 2i = i\omega_2, & -\lambda_3. \end{aligned}$$

Положительное собственное число λ_1 объясняет неустойчивость точки либрации L_1 .

3. Функция опасности. Уравнения (1) при $u = 0$ являются гамильтоновыми, причем роль канонически сопряженных координат и импульсов играют пары (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, а гамильтониан имеет вид

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2} x_1^2 + x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Определим невырожденную гладкую функцию фазовых переменных $l(x, y)$, которую назовем *функцией опасности*, так, чтобы для решений $(x(t), y(t))$ системы (1) при $u = 0$ выполнялось

$$\dot{l}(x(t), y(t)) = \lambda_1 l(x(t), y(t)). \quad (2)$$

Таким образом, уравнение

$$l(x, y) = 0$$

описывает некоторое инвариантное множество M , обладающее важным свойством для задачи стабилизации орбитального движения в окрестности L_1 : если начальные фазовые координаты принадлежат M , то траектория движения будет находиться в окрестности точки либрации. Уравнение (2), учитывая гамильтоновость системы (1), можно записать как дифференциальное уравнение в частных производных:

$$[l, H] = \lambda_1 l,$$

где $[l, H]$ — это скобки Пуассона функций $l(x, y)$ и $H(x, y)$, т. е.

$$[l, H] = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial l}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right).$$

Функция $H(x, y)$ раскладывается в ряд Тейлора около положения равновесия (x^*, y^*)

$$H(x, y) = H^{(2)}(x, y) + H^{(3)}(x, y) + \dots + H^{(i)}(x, y) + \dots,$$

здесь $H^{(i)}(x, y)$ — однородный полином i -го порядка. Например,

$$H^{(2)}(x, y) = -4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1y_2 + x_2y_1,$$

$$H^{(3)}(x, y) = 3x_1^3 - \frac{9}{2}x_1x_2^2 - \frac{9}{2}x_1x_3^2,$$

$$H^{(4)}(x, y) = -3x_1^4 + 9x_1^2x_2^2 + 9x_1^2x_3^2 - \frac{9}{8}x_2^4 - \frac{9}{4}x_2^2x_3^2 - \frac{9}{8}x_3^4.$$

В уравнениях (1) сделаем линейную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} x &= x(q, p), \\ y &= y(q, p) \end{aligned}$$

($q = (q_1, q_2, q_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$) таким образом, чтобы в новых переменных (q, p) в разложении функции Гамильтона в ряд около положения равновесия

$$\widehat{H}(q, p) = H(x(q, p), y(q, p)) = \widehat{H}^{(2)}(q, p) + \widehat{H}^{(3)}(q, p) + \dots + \widehat{H}^{(i)}(q, p) + \dots \quad (3)$$

члены второго порядка приняли вид

$$\widehat{H}^{(2)}(q, p) = H^{(2)}(x(q, p), y(q, p)) = \lambda_1 q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2).$$

Построение такой замены описано, например, в [1, 7]. В данной работе используется замена

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \\ q_3 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

с матрицей S , равной

$$\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}-3}{2} & \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+1}(5\sqrt{7}-7)}{252} & \frac{-(2\sqrt{7}-1)^{\frac{1}{4}}(3\sqrt{7}-7)\sqrt{11\sqrt{7}+28}}{42} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2\sqrt{7}+1}\sqrt{\sqrt{7}+1}}{6} & \frac{(3\sqrt{7}-7)}{28} & 0 & \frac{(2\sqrt{7}-1)^{\frac{3}{4}}\sqrt{11\sqrt{7}+28}(\sqrt{7}-7)}{126} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2\sqrt{7}+1}(2\sqrt{7}+5)}{3} & \frac{-\sqrt{7}}{14} & 0 & \frac{-(2\sqrt{7}-1)^{\frac{3}{4}}\sqrt{11\sqrt{7}+28}(5\sqrt{7}-14)}{63} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-\sqrt{2\sqrt{7}+1}(11\sqrt{7}-28)}{126} & \frac{(2\sqrt{7}-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{77\sqrt{7}+196}}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В новых переменных будем искать следующее представление функции опасности:

$$\widehat{l}(q, p) = q_1 - \widehat{f}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3).$$

Такой подход позволяет избежать появления малых знаменателей. В этом случае с учетом инвариантности скобок Пуассона при каноническом преобразовании (доказательство этого факта можно найти, например, в [8]) множество M описывается уравнением

$$q_1 = \widehat{f}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3),$$

а функция $\widehat{f}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left[q_1 - \widehat{f}, \widehat{H} \right] \Big|_{q_1 = \widehat{f}} = 0. \quad (4)$$

Функцию $\widehat{f}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ будем искать в виде ряда по фазовым переменным около положения равновесия, соответствующего точке либрации L_1 :

$$\widehat{f}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{f}^{(i)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3). \quad (5)$$

Здесь $\widehat{f}^{(i)}(q_2, q_3, p)$ — также однородный полином i -го порядка. Тогда, подставляя разложения (3) и (5) с неопределенными коэффициентами в уравнение (4), можно последовательно находить приближения функции опасности различных порядков

$$\begin{aligned} \widehat{l}_1(q, p) &= q_1 - \widehat{f}^{(1)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3), \\ \widehat{l}_2(q, p) &= \widehat{l}_1(q, p) - \widehat{f}^{(2)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3), \\ \widehat{l}_3(q, p) &= \widehat{l}_2(q, p) - \widehat{f}^{(3)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3), \\ &\dots \end{aligned}$$

При этом получим

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{(1)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) &= 0, \\ \widehat{f}^{(2)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) &= 0.1134q_2^2 + 0.0045q_2p_1 - 0.0296q_2p_2 + 0.01996q_3^2 - \\ &\quad - 0.02503q_3p_3 - 0.0002p_1^2 - 0.0039p_1p_2 + 0.04299p_2^2 + 0.0357p_3^2, \\ \widehat{f}^{(3)}(q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) &= 0.002q_2^3 + 0.0018q_2^2p_1 - 0.01095q_2^2p_2 + 0.0027q_2q_3^2 - \\ &\quad - 0.011302q_2q_3p_3 + 0.00004q_2p_1^2 - 0.0038q_2p_1p_2 + 0.0339q_2p_2^2 + 0.0242q_2p_3^2 + \\ &\quad + 0.00103q_3^2p_1 - 0.0008q_3^2p_2 - 0.0004q_3p_1p_3 + 0.0038q_3p_2p_3 - 0.0000007p_1^3 + \\ &\quad + 0.0003p_1^2p_2 - 0.0022p_1p_2^2 - 0.0027p_1p_3^2 - 0.0109p_2^3 - 0.00907p_2p_3^2. \end{aligned}$$

В этих формулах приведены численные значения коэффициентов, чтобы избежать громоздких алгебраических выражений.

4. Управляемое движение в окрестности точки либрации. При помощи найденных приближений функции опасности первого, второго и третьего порядков построим три закона управления орбитальным движением в окрестности точки либрации L_1 :

$$\begin{aligned}u_1(x, y) &= kl_1(x, y), \\u_2(x, y) &= kl_2(x, y), \\u_3(x, y) &= kl_3(x, y).\end{aligned}$$

Здесь k — число, а функции $l_i(x, y) = \widehat{l}_i(q(x, y), p(x, y))$, $i = 1, 2, 3$, определяются из $\widehat{l}_i(q, p)$, $i = 1, 2, 3$, найденных в п. 3, переходом к исходным геоцентрическим координатам:

$$\begin{aligned}l_1(x, y) &= -0.18898x_1 - 0.02196x_2 - 0.061998y_1 - 0.03347y_2, \\l_2(x, y) &= l_1(x, y) + 0.0004x_1^2 - 0.0592x_1x_2 - 0.0145x_1y_1 - 0.0326x_1y_2 - \\&\quad - 0.0752x_2^2 - 0.0115x_2y_1 - 0.0368x_2y_2 - 0.0713x_3^2 - 0.025x_3y_3 + \\&\quad + 0.0014y_1^2 + 0.014y_1y_2 - 0.0118y_2^2 - 0.001y_3^2, \\l_3(x, y) &= l_2(x, y) - 0.0015x_1^3 + 0.0163x_1^2x_2 + 0.0033x_1^2y_1 - 0.0095x_1^2y_2 + \\&\quad + 0.0129x_1x_2^2 - 0.0099x_1x_2y_1 - 0.0322x_1x_2y_2 + 0.0334x_1x_3^2 - 0.0061x_1x_3y_3 - \\&\quad - 0.002x_1y_1^2 - 0.0024x_1y_1y_2 - 0.0126x_1y_2^2 - 0.0048x_1y_3^2 - 0.031x_2^3 - \\&\quad - 0.0259x_2^2y_1 - 0.0403x_2^2y_2 - 0.0303x_2x_3^2 - 0.0049x_2x_3y_3 - 0.0034x_2y_1^2 - \\&\quad - 0.0068x_2y_1y_2 - 0.0132x_2y_2^2 - 0.00004x_2y_3^2 - 0.0197x_3^2y_1 - 0.0294x_3^2y_2 + \\&\quad + 0.00006x_3y_1y_3 - 0.0093x_3y_2y_3 + 0.00003y_1^3 - 0.0001y_1^2y_2 + 0.0008y_1y_2^2 + \\&\quad + 0.0014y_1y_3^2 - 0.0027y_2^3 - 0.0018y_2y_3^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим результаты численного интегрирования системы (1) при $u = u_i$, $i = 1, 2, 3$, на промежутке 3π единиц времени (примерно 1.5 года) и сравним затраты на управление, выражаемые интегралами $I_i = \int_0^{3\pi} |u_i| dt$, $i = 1, 2, 3$ (в дальнейшем во всех примерах $k = 75$).

На рис. 1, *a–в* изображены управляемые траектории с начальными условиями $x_0 = (1.0122, 0.0240, 0.0421)$, $y_0 = (0.0350, 1.0057, 0.0352)$ (в этом случае $\|x_0 - x^*\| = 0.05$, $\|y_0 - y^*\| = 0.05$, что соответствует отклонению от точки либрации по координатам на 75 тыс. км и скорости на 15.6570 м/с). Видно, что имеет место стабилизация движения в окрестности точки либрации. Зависимости управлений $u = u_i$, $i = 1, 2, 3$, от времени приведены на рис. 2, 3. В этом случае $I_1 = 0.2871$ (87.035 м/с), $I_2 = 0.1949$ (59.0832 м/с), $I_3 = 58.9854$ (0.1946 м/с).

В таблице представлено сравнение затрат на управления u_i , $i = 1, 2, 3$, на промежутке 3π единиц времени при движениях с начальными условиями, соответствующими разным отклонениям от положения равновесия (x^*, y^*) по координатам и скоростям. Видно, что в некоторых случаях управление, построенное по второму и третьему приближениям функции опасности, требует значительно меньше затрат на реализацию, чем построенное по ее линейному приближению.

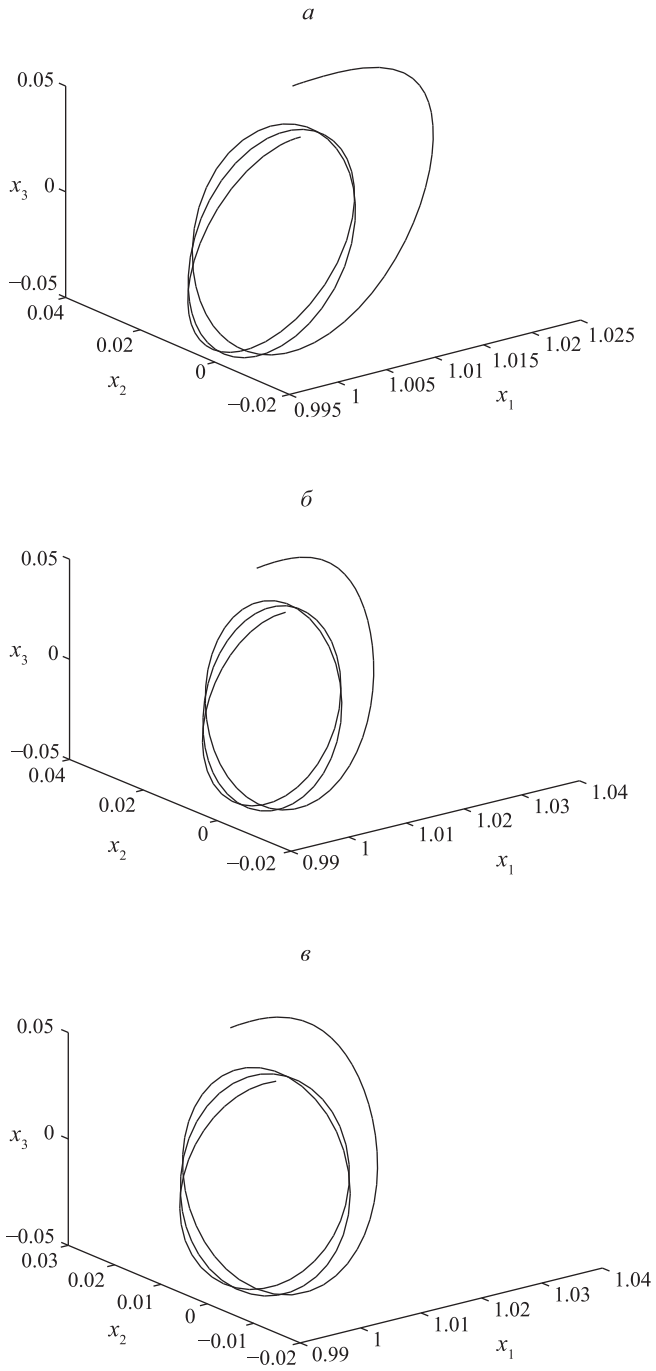


Рис. 1. Траектория движения с управлением u_1 (а), u_2 (б) и u_3 (в)

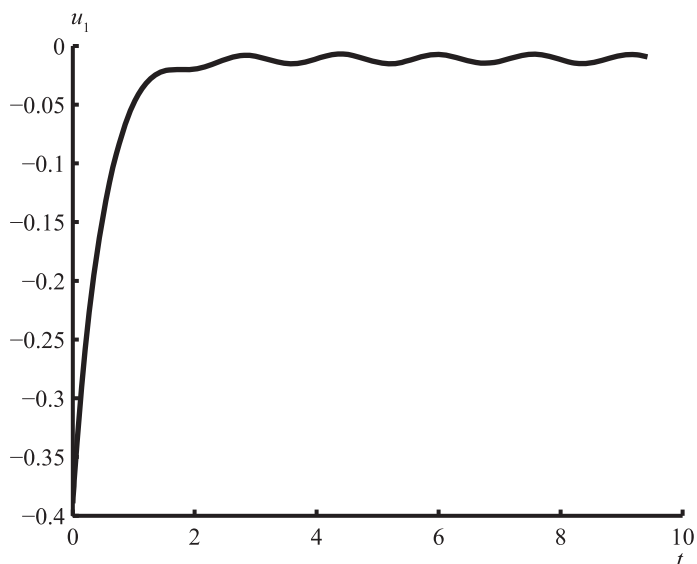


Рис. 2. Зависимость управления u_1 от времени

Сравнение энергетических затрат при движениях с управлениями $u_{1,2,3}$

$x_0;$ $\ x_0 - x^*\ $	$y_0;$ $\ y_0 - y^*\ $	$I_{1,2,3}, \text{ М/с}$	$(I_1 - I_2)/I_1 \cdot 100\%,$ $(I_2 - I_3)/I_2 \cdot 100\%$
(1.0024, 0.0048, 0.0084); 0.01 (15 тыс. км)	(0.0070, 1.0011, 0.0070); 0.01 (3.0314 м/с)	12.8081 11.6584 11.6581	8.9764, 0.0029
(1.0049, 0.0096, 0.0168); 0.02 (30 тыс. км)	(0.0140, 1.0023, 0.0141); 0.02 (6.0628 м/с)	27.9695 23.3961 23.3909	16.3515, 0.0221
(1.0162, 0.0180, 0.0177); 0.03 (45 тыс. км)	(0.0150, 1.0251, 0.0066); 0.03 (9.0942 м/с)	62.2717 57.6823 57.6794	7.3699, 0.005
(1.0098, 0.0192, 0.0337); 0.04 (60 тыс. км)	(0.0280, 1.0046, 0.0282); 0.04 (12.1256 м/с)	65.1394 47.1124 47.0570	27.6745, 0.1175
(1.0342, 0.0355, 0.0083); 0.05 (75 тыс. км)	(0.0265, 1.0241, 0.0349); 0.05 (15.1570 м/с)	111.3244 104.4974 104.4916	6.1325, 0.0055
(1.0147, 0.0289, 0.0505); 0.06 (90 тыс. км)	(0.0420, 1.0069, 0.0423); 0.06 (18.1884 м/с)	111.0182 71.1541 70.9300	35.9077, 0.3150
(1.0077, 0.0321, 0.0618); 0.07 (105 тыс. км)	(0.0334, 1.0575, 0.0220); 0.07 (21.2198 м/с)	125.5995 72.2166 71.8743	42.5025, 0.4739
(1.0113, 0.0080, 0.0788); 0.08 (120 тыс. км)	(0.0510, 1.0611, 0.0085); 0.08 (24.2512 м/с)	164.7988 87.8942 87.4186	46.6658, 0.5411
(1.0596, 0.0634, 0.0232); 0.09 (135 тыс. км)	(0.0639, 1.0615, 0.0153); 0.09 (27.2826 м/с)	208.1356 196.2329 196.1807	5.7187, 0.0266

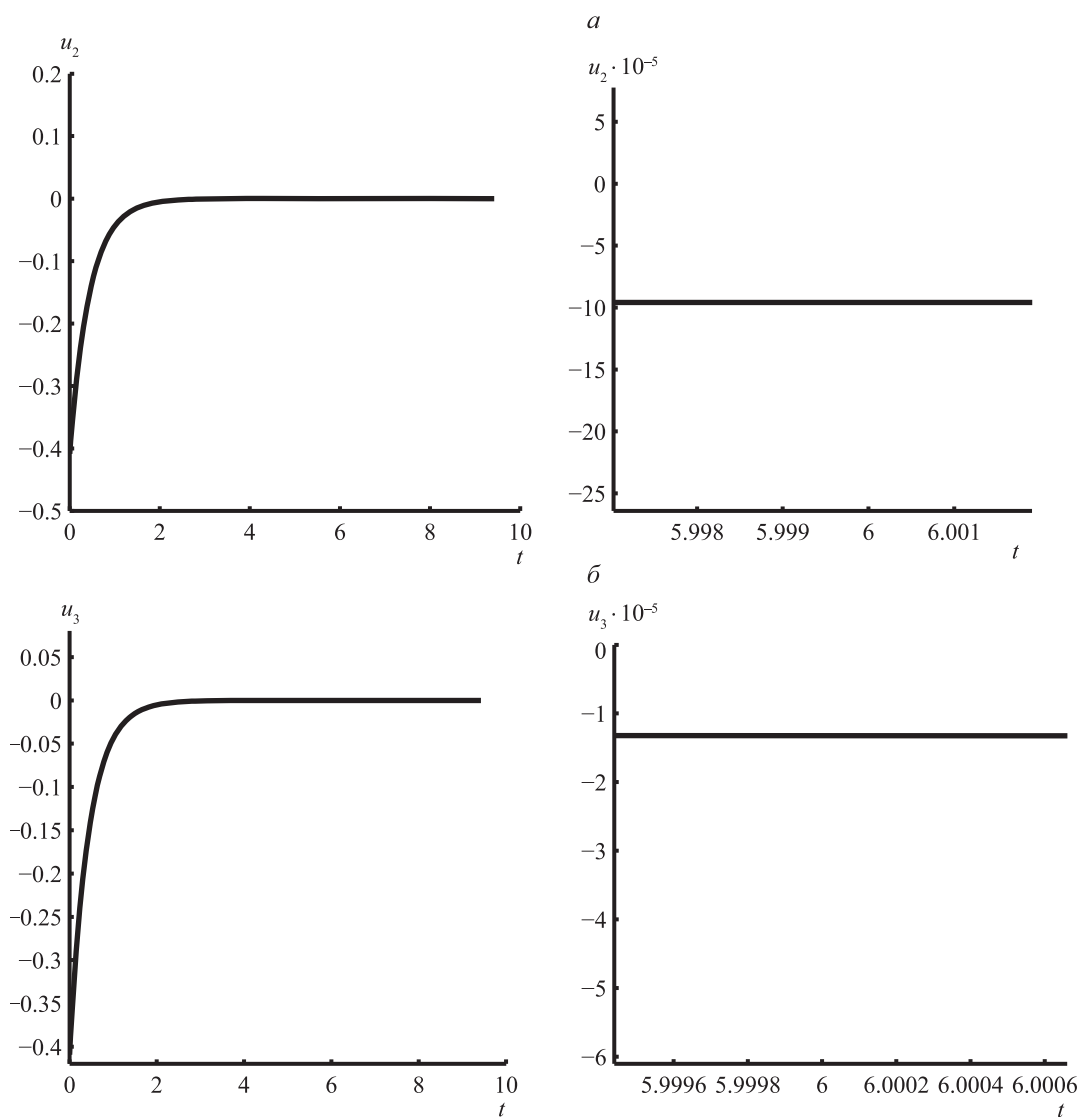


Рис. 3. Зависимости управления u_2 (а) и u_3 (б) от времени

5. Заключение. В рамках хилловского приближения ограниченной круговой задачи трех тел были получены приближения первого, второго и третьего порядков функции опасности, которая используется для аналитического представления некоторого инвариантного множества в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце—Земля, заполненного ограниченными траекториями. Вопрос сходимости в процессе получения приближений функции опасности в классическом смысле остается, конечно, очень важным. Но стоит заметить, что в подобных случаях теоремы существования гарантируют сходимость в некоторой окрестности, радиус которой может оказаться весьма малым. По результатам численного моделирования, представленным в таблице, можно говорить о так называемой «практической сходимости» данной процедуры.

Использование третьего приближения функции опасности для построения стабилизирующего управления орбитальным движением в окрестности L_1 дает небольшую выгоду в затратах на управление в сравнении со вторым, однако при управлении массивным телом, таким как, например, астероид, эта выгода может оказаться существенной.

Литература

1. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193–199.
3. Simó C., Stuchi T. J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM Tori in the planar Hill problem // *Physica D*. 2000. Vol. 140, issues 1–2. P. 1–32.
4. Шмыров А. С., Шмыров В. А. Об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 250–257.
5. Shmyrov A., Shmyrov V. On controllability region of orbital motion near L_1 // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 9 (145–148). P. 7229–7236.
6. Шмыров А. С., Шмыров В. А. Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 4. С. 139–146.
7. Биркгоф Д. Д. Динамические системы / пер. с англ. Е. М. Ливенсона, под ред. А. А. Маркова и др. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с. (*Birkhoff G. D. Dynamical systems.*)
8. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2005. 264 с.

Для цитирования: Малявкин Г. П., Шмыров В. А., Шмыров А. С. Построение стабилизирующего управления орбитальным движением с использованием аналитического представления инвариантного многообразия в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 102–112. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.110

References

1. Markeev A. P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* [Libration points in celestial mechanics and space dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 312 p. (In Russian)
2. Shmyrov V. A. Stabilizatsiia upravliaemogo orbitalnogo dvizheniia kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnoi tochki libratsii L_1 [Stabilization of controlled orbital motion of a spacecraft in the neighbourhood of the collinear libration point L_1]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2005, issue 2, pp. 193–199. (In Russian)
3. Simó C., Stuchi T. J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM Tori in the planar Hill problem. *Physica D.*, 2000, vol. 140, issues 1–2, pp. 1–32.
4. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti po otnosheniiu k chasti peremennykh orbitalnogo dvizheniia kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnoi tochki libratsii [On the asymptotic stability with respect to a part of the variables of the orbital motion of a spacecraft in the neighbourhood of a collinear libration point]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2009, issue 4, pp. 250–257. (In Russian)
5. Shmyrov A., Shmyrov V. On controllability region of orbital motion near L_1 . *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9 (145–148), pp. 7229–7236.
6. Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Sintez optimalnogo upravleniia orbitalnym dvizheniim v okrestnosti kollinearnoi tochki libratsii [Optimal orbital motion control synthesis in the neighbourhood of a collinear libration point]. *Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, issue 4, pp. 139–146. (In Russian)
7. Birkhoff G. D. *Dynamical systems*. Providence, R. I., American Mathematical Society, 1966, 305 p. (Russ. ed.: Birkhoff G. D. *Dinamicheskie sistemy*. Izhevsk, Udmurtskii University Publ., 1999, 408 p.)

8. Gantmaher F. R. *Lektsii po analiticheskoi mekhanike [Lectures on the analytical mechanics]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 264 p. (In Russian)

For citation: Maliavkin G. P., Shmyrov V. A., Shmyrov A. S. Design of the stabilizing control of the orbital motion using the analytical representation of an invariant manifold in the vicinity of a collinear libration point. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2017, volume 13, issue 1, pp. 102–112. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.110

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 27 июля 2016 г.

Статья принята к печати 19 января 2017 г.