УДК 519.6 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2017. Т. 13. Вып. 1

В. В. Карелин , В. М. Буре, М. В. Свиркин

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В данной статье предлагается модель, которая является обобщением классической модели Маки—Томпсона и стохастической модели Дэйли—Кендалла. Вводится новый параметр для оценки вероятности распространения слухов. Обобщенная модель формулируется и рассматривается в непрерывном времени. Процесс распространения слухов описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Строится общее решение для динамики распространения слухов. Приводятся численные примеры. Библиогр. 13 назв. Ил. 2. Табл. 2.

Ключевые слова: информационные сети, дифференциальные уравнения, вероятность, распространение слухов.

V. V. Karelin, V. M. Bure, M. V. Svirkin

GENERALIZED MODEL OF INFORMATION SPREADING IN CONTINUOUS TIME

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The diffusion of information or spreading of rumours is a social phenomenon and plays a significant role in a daily life. Rumours play a very important role in social life and have existed as a social fact since ancient times. The rumour model explains the spread of rumours and serves as a tool for understanding this social phenomenon. Rumours in economics have become more intensively discussed and investigated in recent decades. There are examples of rumour dynamics based on communication and exchange at auctions, in the stock markets and during trading. These backgrounds and motivations give the basis for a mathematical model of the diffusion of information or the spreading of rumours. We give a model that is a generalization of the classical Maki—Thompson model and the stochastic Daley—Kendall model of rumour spreading using the probability approach. A new parameter is suggested for the probability of rumour spreading. The generalized model is formulated and is considered in continuous time. The process of spreading rumours is described by a system of linear differential equations. The general solution for dynamics of spreading of rumours is constructed. Refs 13. Figs 2. Tables 2.

Keywords: information networks, differential equations, probability, spreading rumors.

Карелин Владимир Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; vlkarelin@mail.ru

Буре Владимир Мансурович — доктор технических наук, профессор; vlb310154@gmail.com

Свиркин Михаил Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; smv01_01@mail.ru

Karelin Vladimir Vitalievich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; vlkarelin@mail.ru

Bure Vladimir Mansurovich — doctor of technical sciences, professor; vlb310154@gmail.com

Svirkin Mihail Vladimirovich – PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; smv01_01@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.38.205.2014).

 DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.107

Введение. Интерес к проблематике, связанной с распространением информации в социальных сетях, с каждым годом возрастает, и связано это в первую очередь с тем, что они вовлекают в свою сферу огромное количество пользователей. В фундаментальной работе [1] исследуются математические модели социальных сетей и модели информационного влияния внутри этих сетей. Участники социальной сети имеют определенную репутацию, обмениваются информацией, объединяются в группы, решают задачи, связанные с достижением различных целей. В рамках указанной проблематики естественным образом возникают задачи исследования информационных конфликтов, в отдельных случаях речь может идти даже об "информационных войнах". По существу, близкий круг вопросов рассматривался ранее в проблематике, которая получила название "model of rumor spreading" — модели распространения слухов, например в [2–7]. Ученые из Гарвардского университета — Гордон У. Оллпорт и Лео Постман в 1947 г. в книге «Психология слухов» одними из первых разработали математические модели распространения слухов. По их определению, слух — это информационное сообщение, которое распространяется между людьми, как правило, в устной форме, без предоставления доказательств его достоверности. Главный признак слуха заключается в том, что он получает широкое распространение при отсутствии доказательств его достоверности. В этом состоит основное отличие слухов от новостей и фактов. Было отмечено, что люди порождают слухи в попытке осмыслить неоднозначные, неопределенные или запутанные ситуации [2–5]. Слухи играют очень важную роль в социальной жизни общества и существуют как социальный феномен с древних времен. Слухи в экономике стали более интенсивно обсуждаться и исследоваться в последние десятилетия [2]. В ряде экономических сфер слухи играют ключевую роль, например, динамика цен на аукционах, на фондовых рынках во многом определяется ими. Перечисленные причины дали основание для создания математических моделей распространения слухов [2, 6, 7]. Модель Маки—Томпсона [6] и стохастическая модель Дэйли—Кендалла [7] представляют собой классические модели распространения слухов. Модель Маки—Томпсона была рассмотрена в непрерывном времени и новое общее решение было получено для динамики распространения слухов [2]. В настоящей статье предложено обобщение модели Маки—Томпсона и стохастической модели Дэйли—Кендалла на основе использования вероятностного подхода. Она продолжает исследование нетрадиционных задач теории управления, опубликованных ранее в работах [8–11]. Проблематика исследования близка к проблемам, изучаемым в теории сетевых игр [12].

Основные результаты и обобщенная модель распространения слухов в непрерывном времени. Следуя подходу и обозначениям из [2], будем рассматривать три подгруппы населения: "ignorants" — лица, которые прежде не были проинформированы о слухе, "spreaders" — лица, активно распространяющие слух среди населения, "stiflers" — лица, которые были проинформированы о слухе, но в силу каких-то причин отказываются его распространять. В табл. 1 приведены схема распространения слуха и динамика изменения численности подгрупп населения при информационном общении их представителей: I — подгруппа "ignorants", S — подгруппа "spreaders", R — подгруппа "stiflers".

Обобщенная модель распространения слуха определяется по схеме вероятностей перехода. В табл. 2 присутствует ключевой для обобщенной схемы распространения слухов параметр: p — вероятность того, что в данном взаимодействии реализуется модель Маки—Томпсона, $(1 - p)$ — вероятность того, что в конкретном взаимодействии

Таблица 1. **Взаимодействие представителей подгрупп в процессе распространения слуха**

S → I	Модель Дэйли—Кендалла	Модель Маки—Томпсона	S → R
$i_k = i_{k-1} - 1$	$i_k = i_{k-1}$	$i_k = i_{k-1}$	$i_k = i_{k-1}$
$s_k = s_{k-1} + 1$	$s_k = s_{k-1} - 2$	$s_k = s_{k-1} - 1$	$s_k = s_{k-1} - 1$
$r_k = r_{k-1}$	$r_k = r_{k-1} + 2$	$r_k = r_{k-1} + 1$	$r_k = r_{k-1} + 1$
$\triangle i_k = i_k - i_{k-1} = -1$	$\triangle i_k = 0$	$\triangle i_k = 0$	$\triangle i_k = 0$
$\triangle s_k = s_k - s_{k-1} = 1$	$\triangle s_k = -2$	$\triangle s_k = -1$	$\triangle s_k = -1$
$\triangle r_k = 0$	$\triangle r_k = 2$	$\triangle r_k = 1$	$\triangle r_k = 1$

реализуется схема Дэйли—Кендалла. Именно наличие введенного параметра p является главным отличием от работы [2], в которой был предложен подход к перенесению процесса распространения слухов на случай непрерывного времени, там же были получены дифференциальные уравнения описанных ниже типов, но рассмотрение ограничивалось только моделью Маки—Томпсона. Введение параметра p и усложнение схемы взаимодействия позволяют рассматривать более общую модель, включающую модели Маки—Томпсона и Дэйли—Кендалла как частные случаи: при $p = 1$ получаем модель Маки—Томпсона для непрерывного времени, а при $p = 0$ — соответственно модель Дэйли—Кендалла. Следует отметить, что при информационном общении двух представителей подгруппы “ignorants” изменение численности происходить не может. Схема информационного взаимодействия, содержащаяся в табл. 2, является непосредственным обобщением классических схем из моделей Маки—Томпсона и Дэйли—Кендалла для непрерывного времени.

Таблица 2. **Схема вероятностей перехода слухов при информационном общении населения**

Взаимодействия	Переходы	Переходы вероятности
$S \to I$	$(i-1, s+1, r)$	i/n
$S \to S$	$\{(i, s-1, r+1), p\,\frac{s-1}{n}\} \bigvee \{(i, s-2, r+2), (1-p)\frac{s-1}{n}\}$ Модель Маки—Томпсона Модель Дэйли—Кендалла	$(s-1)/n$
$S \to R$	$(i, s-1, r+1)$	r/n

Общая численность населения представляет собой сумму численностей подгрупп

$$i + s + r = n + 1 = N. \tag{1}$$

Введем начальные условия

$$i(0) = \alpha \cdot n, \quad s(0) = \beta \cdot n, \quad r(0) = \gamma \cdot n, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0, 1), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \beta \cdot n \geqslant 1.$$

Условное ожидаемое изменение численности подгруппы “ignorants”, в соответствии со схемой из табл. 1, оценивается как

$$\triangle i_k = (-1)\frac{i_{k-1}}{n}\triangle t \Rightarrow \frac{\triangle i_k}{\triangle t} = (-1)\frac{i_{k-1}}{n}.$$

Переходя к пределам при $\triangle t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n} \Rightarrow i(t) = Ce^{-\frac{t}{n}},$$

$$C = i(0) = \alpha \cdot n, \quad i(t) = \alpha \cdot n \cdot e^{-\frac{t}{n}}.$$

Условное ожидаемое изменение численности подгруппы “spreaders” с учетом соотношения (1) для $p \in [0; 1]$ равно

$$\frac{\triangle s_k}{\triangle t} = \frac{i_{k-1}}{n} - \frac{n - i_{k-1}}{n} - (1-p) \cdot \frac{s_{k-1} - 1}{n}, \quad \triangle t \to 0.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\frac{ds}{dt} = 2\frac{i(t)}{n} - \frac{1-p}{n} \cdot s(t) + \frac{1-p-n}{n},$$

или

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1-p}{n} \cdot s(t) = 2 \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{t}{n}} + \frac{1-p-n}{n}. \tag{2}$$

Условное ожидаемое изменение численности подгруппы “stiflers” с учетом соотношения (1) для $p \in [0;1]$ оценивается как

$$\triangle r_k = (1-p)\frac{s_{k-1} - 1}{n}\triangle t + \frac{s_{k-1} + r_{k-1} - 1}{n}\triangle t, \quad \triangle t \to 0.$$

Следовательно, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n} + (1-p) \cdot \frac{s(t) - 1}{n} + 1.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n}, \\ \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \frac{i(t)}{n} - \frac{1-p}{n} \cdot s(t) + \frac{1-p-n}{n}, \\ \frac{dr}{dt} = (-1)\frac{i(t)}{n} + (1-p) \cdot \frac{s(t)-1}{n} + 1. \end{cases} \tag{3}$$

Будем решать уравнение (2) методом Бернулли [13], сделаем замену переменной:

$$s = u \cdot \nu, \quad \dot{s} = \dot{u} \cdot \nu + u \cdot \dot{\nu}.$$

У нас есть система уравнений

$$\dot{\nu} + \frac{1-p}{n} \cdot \nu = 0,$$

$$\dot{u} \cdot \nu = 2 \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{t}{n}} + \frac{1-p-n}{n}.$$

Из первого уравнения находим функцию ν

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{1-p}{n} \cdot \nu \to \int \frac{d\nu}{\nu} = -\frac{(1-p)}{n} \int dt \to \ln|\nu| = -\frac{1-p}{n} \cdot t \to \nu = \exp(-\frac{(1-p) \cdot t}{n}),$$

из второго получаем

$$\frac{du}{dt} = 2 \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{pt}{n}} + \frac{1-p-n}{n} \cdot e^{\frac{(1-p) \cdot t}{n}}.$$

Отсюда

$$u = \frac{(1-p-n)}{(1-p)} \cdot e^{\frac{(1-p) \cdot t}{n}} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot n}{p} \cdot e^{-\frac{pt}{n}} + C.$$

Общее решение для $s(t)$ имеет вид
при $p \in (0,1)$

$$s(t) = \frac{(1-p-n)}{(1-p)} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot n}{p} \cdot e^{-\frac{t}{n}} + \left(\beta \cdot n - \frac{(1-p-n)}{(1-p)} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot n}{p}\right) \cdot e^{-\frac{(1-p) \cdot t}{n}},$$

при $p=0$

$$s(t)=(1-n)-[2\cdot\alpha\cdot t-1-n(\beta-1)]\cdot e^{-\frac{t}{n}},$$

при $p=1$

$$s(t)=(\beta+2\cdot\alpha)\cdot n-2\cdot\alpha\cdot n\cdot e^{-\frac{t}{n}}-t.$$

Общее решение для $r(t)$ имеет вид
при $p\in(0,1)$

$$r(t)=\gamma\cdot n+n\cdot\left[\frac{(1-p-n)}{n}-\frac{2\cdot\alpha\cdot(1-p)}{p}-\alpha\right]+n\cdot\left(\beta-\frac{(1-p-n)}{(1-p)\cdot n}+\frac{2\cdot\alpha}{p}\right)-$$

$$-\,n\cdot\left[\frac{(1-p-n)}{n}-\frac{2\cdot\alpha\cdot(1-p)}{p}-\alpha\right]\cdot e^{-\frac{t}{n}}-n\cdot\left(\beta-\frac{(1-p-n)}{(1-p)\cdot n}+\frac{2\cdot\alpha}{p}\right)\times$$

$$\times\, e^{-\frac{(1-p)\cdot t}{n}}-\frac{1-p-n}{n}\cdot t,$$

при $p=0$

$$r(t)=2\cdot\alpha\cdot n\cdot e^{-\frac{t}{n}}\left(\frac{t}{n}+1\right)+\left[\frac{1-n(\beta-1)}{n}-\alpha\right]\cdot n\cdot e^{-\frac{t}{n}}-$$

$$-\left[\frac{1-n(\beta-1)}{n}-\alpha\right]\cdot n-2\cdot\alpha\cdot n+\gamma\cdot n,$$

при $p=1$

$$r(t)=t+\alpha\cdot n\cdot e^{-\frac{t}{n}}-\alpha\cdot n+\gamma\cdot n.$$

Рассмотрим несколько вариантов поведения $s(t)$ в зависимости от $p\in(0,1)$ (рис. 1). Точка T, в которой $s(T)=0$, представляет собой момент времени, когда

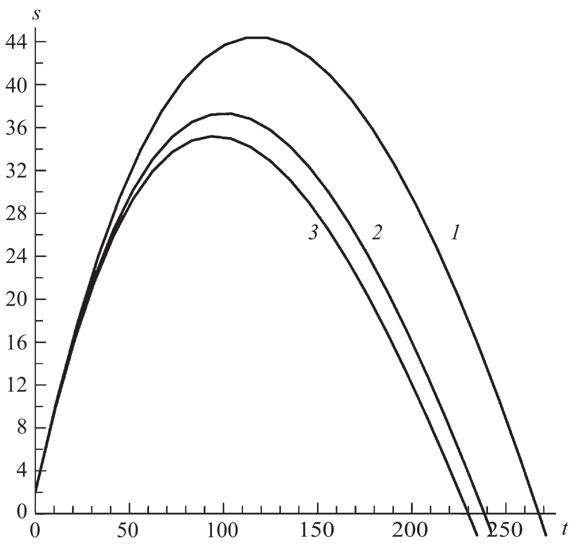

Рис. 1. Изменение функции $s(t)$ от величины $p=0.3$ (*1*), 0.5 (*2*) и 0.9 (*3*) при $n=200,\ \alpha=0.9,\ \beta=0.1$

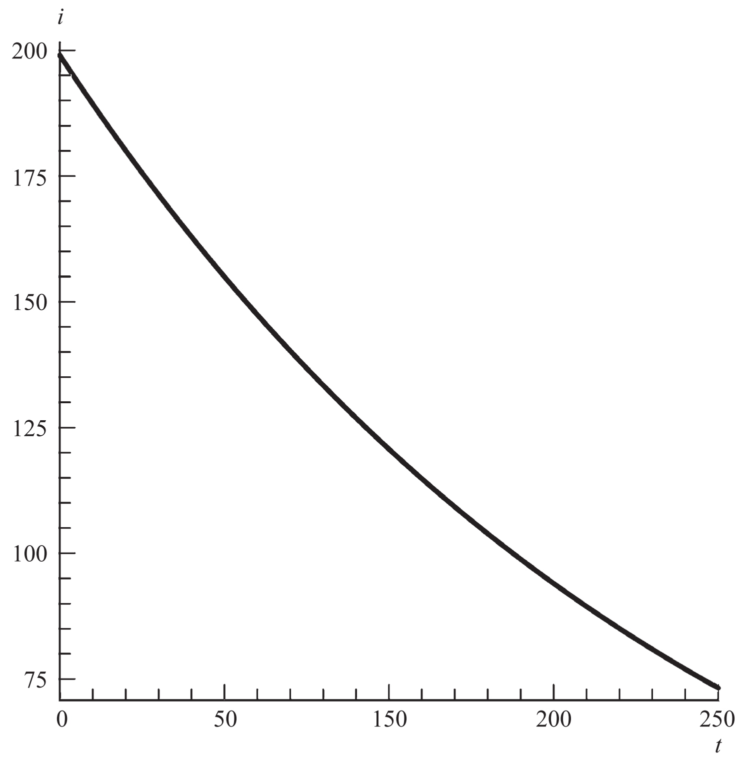

Рис. 2. График функции $i(t)$

заканчивается процесс распространения слуха. Этот процесс можно рассматривать на интервале времени $(0, T)$.

Динамика изменения численности подгруппы “ignorants” показана на рис. 2.

Заключение. В работе сформулирована и исследована модель распространения слухов в непрерывном времени, обобщающая классические модели распространения слухов Маки—Томпсона и Дэйли—Кендалла.

Литература

1. *Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. 228 с.

2. *Belen S., Kropat E., Weber G.-W.* On the classical Maki—Thompson rumour model in continuous time // Central European Journal of Operations Researches. 2011. Vol. 19. P. 1–17.

3. *Rosnow R. L.* Psychology of rumor reconsidered // Psychol. Bull. 1980. Vol. 87, N 3. P. 578–591.

4. *Rosnow R. L.* Inside rumor: a personal journey // Amer. Psychol. 1991. Vol. 46, N 5. P. 484–496.

5. *Difonzo N., Bordia P.* Rumor and prediction: making sense (but losing dollars) in the stock market // Organ. Behav. Hum. Decis. Process. 1997. Vol. 71, N 3. P. 329–353.

6. *Maki D. P., Thompson M.* Mathematical models and applications. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1973. 274 p.

7. *Daley D. J., Kendall D. G.* Stochastic rumours // J. Inst. Math. Appl. 1965. Vol. 1. P. 42–55.

8. *Karelin V. V., Bure V. M., Polyakova L. N., Elfimov A. N.* Control problem of a deterministic queuing system // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, N 21–24. P. 1023–1030.

9. *Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N.* Probabilistic model of terminal services // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, N 39. P. 1945–1952.

10. *Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N.* The problem of resource allocation between the protection system and constructing redundant components // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, N 93–96. P. 4771–4779.

11. *Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M., Parilina E. M.* Soil acidity adaptive control problem // Stochastic enviromental research and risk assessment. 2015. Vol. 29, N 6. P. 1671–1677 (see also URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00477-014-0965-5, дата обращения: 15.10.2016).

12. *Bure V., Parilina E., Sedakov A.* Consensus in social networks with heterogeneous agents and two centers of influence // Intern. conference “Stability and control processes” in memory of V. I. Zubov (SCP) joined with 21st Intern. workshop on beam dynamics and optimization (BDO). Saint Petersburg, 05–09 Oct. 2015. Saint Petersburg, 2015. P. 233–235.

13. *Kamke E.* Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen, I, Gewohnliche Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1959. 668 p.

Для цитирования: Карелин В. В., Буре В. М., Свиркин М. В. Обобщенная модель распространения информации в непрерывном времени // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 74–80. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.107

References

1. Gubanov D. A. , Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Socialnye seti: modeli informacionnogo vliyaniya upravleniya i protivoborstva* [*Social networks: models of informational influence, control and confrontation*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 228 p. (In Russian)

2. Belen S., Kropat E., Weber G.-W. On the classical Maki—Thompson rumour model in continuous time. *Central European Journal of Operations Researches*, 2011, vol. 19, pp. 1–17.

3. Rosnow R. L. Psychology of rumor reconsidered. *Psychol. Bull.*, 1980, vol. 87, no. 3, pp. 578–591.

4. Rosnow R. L. Inside rumor: a personal journey. *Amer. Psychol.*, 1991, vol. 46, no. 5, pp. 484–496.

5. Difonzo N., Bordia P. Rumor and prediction: making sense (but losing dollars) in the stock market. *Organ. Behav. Hum. Decis. Process*, 1997, vol. 71, no. 3, pp. 329–353.

6. Maki D. P., Thompson M. *Mathematical models and applications.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973, 274 p.

7. Daley D. J., Kendall D. G. Stochastic rumours. *J. Inst. Math. Appl.*, 1965, vol. 1, pp. 42–55.

8. Karelin V. V., Bure V. M., Polyakova L. N., Elfimov A. N. Control problem of a deterministic queuing system. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 21–24, pp. 1023–1030.

9. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 39, pp. 1945–1952.

10. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. The problem of resource allocation between the protection system and constructing redundant components. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 93–96, pp. 4771–4779.

11. Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M., Parilina E. M. Soil acidity adaptive control problem. *Stochastic enviromental research and risk assessment*, 2015, vol. 29, no. 6, pp. 1671–1677. Available at: http://dx.doi.org/10.1007/s00477-014-0965-5 (accessed: 15.10.2016).

12. Bure V., Parilina E., Sedakov A. Consensus in social networks with heterogeneous agents and two centers of influence. *Intern. conference “Stability and control processes” in memory of V. I. Zubov* (SCP) *joined with 21st intern. workshop on beam dynamics and optimization* (BDO), Saint Petersburg (2015/05–09/10). Saint Petersburg, 2015, pp. 233–235. (In Germany)

13. Kamke E. *Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen, I, Gewohnliche Differentialgleichungen.* Leipzig, Teubner Publ., 1959, 668 p.

For citation: Karelin V. V., Bure V. M., Svirkin M. V. Generalized model of information spreading in continuous time. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2017, volume 13, issue 1, pp. 74–80. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.107

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2016 г.

Статья принята к печати 19 января 2017 г.