САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Пономаренко Аркадий Кузьмич

МАТЕМАТИКА. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 2016

ISBN 978-5-288-05721-2

УДК 512
ББК 22.1

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. М. Рябов* (С.-Петерб. гос. ун-т), канд. физ.-мат. наук, проф. *А. П. Аксенов* (С.-Петерб. гос. политех. ун-т)

*Рекомендовано учебно-методической комиссией
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

(800 Кб) Пономаренко А. К. **Математика. Кратные интегралы**: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016. — Библиогр. 4 назв. Ил. 36.

Учебное пособие предназначено для студентов нематематических факультетов, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. Рассматриваются двойные и тройные интегралы курсов «Математический анализ» или «Высшая математика». Приведены необходимые для решения задач теоретические сведения. Особое внимание уделено вопросам, которые, как показывает опыт проведения практических занятий, вызывают у студентов наибольшие трудности в понимании. Пособие также содержит контрольные задания для индивидуальной работы.

Подписано к использованию 03.03.2017.
Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11
Тел./факс (812) 328-44-22
E-mail: publishing@spbu.ru publishing.spbu.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов нематематических факультетов, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. Рассматривается тема «Двойные и тройные интегралы» курсов «Математический анализ» или «Высшая математика». Также дано понятие n-кратного интеграла. Необходимые для решения задач теоретические сведения приводятся в каждом разделе.

Пособие содержит подробные решения типовых (и не только) примеров и задач, в конце некоторых разделов дополнительно указаны номера примеров из задачника Г. Н. Бермана [4] для самостоятельной работы. В самом конце учебного пособия приведено 26 вариантов контрольных заданий. Задания составлены с расчетом на индивидуальную работу в пределах группы 25–30 человек.

Материалы пособия в течение нескольких лет использовались при изучении курса «Высшая математика» для направления «Химия» химического факультета СПбГУ.

Настоящее пособие может быть полезно студентам, изучающим указанные курсы или соответствующие темы в других курсах, а также преподавателям.

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Некоторые задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Прежде всего решим *задачу о массе плоской фигуры.*

Пусть на плоскости Oxy имеется фигура (S) (рис. 1). Пусть в каждой точке $M(x, y) \in (S)$ задана поверхностная плотность распределения массы $\mu = f(x, y)$. Разобьем (S) на n частей (ΔS_j) (рис. 2). Обозначим: $d_j = \sup\limits_{P,Q \in (\Delta S_j)} \{|PQ|\}$ — диаметр части (ΔS_j), $\lambda = \max\limits_j \{d_j\}$ — ранг разбиения, ΔS_j — площадь части (ΔS_j).

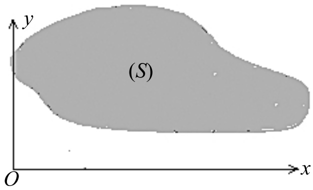

Рис. 1

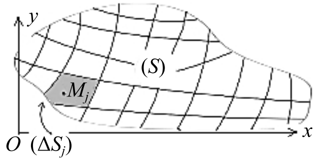

Рис. 2

В каждой частичной области (ΔS_j) возьмем произвольную точку $M_j(x_j, y_j)$. Приближенное значение массы Δm_j части (ΔS_j) выражается равенством $\Delta m_j \cong f(x_j, y_j)\Delta S_j$, а вся масса фигуры (S)

$$m = \sum_{j=1}^{n} \Delta m_j \cong \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\Delta S_j.$$

Последнее равенство тем точнее, чем меньше ранг разбиения λ.

Будем разбивать (S) на все более мелкие части так, чтобы $\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для каждого разбиения будем выбирать точки M_j и составлять суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\Delta S_j$. Точное значение массы будет выражаться формулой

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\Delta S_j. \tag{1}$$

Аналогично рассматривается *задача о величине электрического или магнитного заряда плоской пластины* (S), если поверхностная плотность распределения заряда равна $f(x, y)$. Решение также имеет вид (1).

Точно такое же решение будет в *задаче об объеме цилиндрического бруса.* Имеется пространственная область, ограниченная снизу плоскостью Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью, проходящей через границу фигуры (S), лежащей в плоскости Oxy, с образующими, параллельными оси Oz, сверху — поверхностью с уравнением $z = f(x, y)$ (рис. 3, *а*). Эту пространственную область обычно называют *цилиндрическим брусом.* Требуется найти его объем.

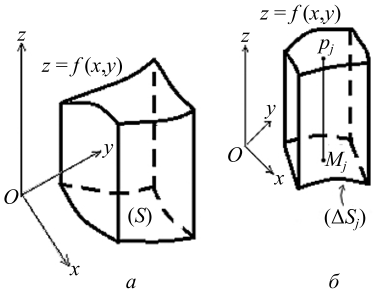

Рис. 3

Разобьем, как и ранее, основание (S) на n частей (ΔS_j), через границу каждой части проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Тогда цилиндрический брус разобьется на n столбиков (рис. 3, *б*). В основании (ΔS_j) j-го столбика, $j = 1, 2, \ldots, n$, возьмем произвольную точку $M_j(x_j, y_j)$ и вычислим $f(x_j, y_j)$. Заменим рассматриваемый столбик цилиндром с тем же основанием (ΔS_j), образующими, параллельными оси Oz, и высотой $h_j = f(x_j, y_j)$. Его объем Δv_j будет равен $h_j \Delta S_j$. Поэтому объем Δv_j изображенной на рис. 3, *б* части цилиндрического бруса дается приближенным равенством $\Delta v_j \cong h_j \Delta S_j$.

Объем всего цилиндрического бруса находится по формуле

$$V = \sum_{j=1}^{n} \Delta v_j \cong \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j) \Delta S_j.$$

Последнее равенство тем точнее, чем меньше ранг разбиения. Поэтому

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j) \Delta S_j. \qquad (2)$$

Существует много других задач, решения которых имеют такой же вид.

1.2. Определение двойного интеграла

Пусть на плоскости Oxy имеется фигура (S) (см. рис. 1). Пусть в каждой точке $M(x, y) \in (S)$ задана функция $f(x, y)$. Разобьем, как и выше, (S) на n частей (ΔS_j) (см. рис. 2). Обозначим: d_j — диаметр частичной области (ΔS_j), λ — ранг разбиения, ΔS_j — площадь части (ΔS_j). В каждой части (ΔS_j) возьмем произвольную точку $M_j(x_j, y_j)$ и составим сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j, y_j) \Delta S_j$. Эта сумма называется *интегральной суммой*, соответствующей взятому разбиению и выбору точек M_j.

Продолжим разбиение фигуры (S) так, чтобы $\lambda \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. При каждом разбиении будем выбирать точки M_j в каждой частичной области и составлять соответствующие интегральные суммы. Предел последовательности интегральных сумм называется *двойным интегралом* от функции f по области (S), если этот предел не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_j:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dxdy \stackrel{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j) \Delta S_j. \qquad (3)$$

Множество (S) называется *областью интегрирования*, f — *подынтегральной функцией*, x, y — *переменными интегрирования*. Если существует $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dxdy$, то функция f называется *интегрируемой по области* (S).

1.3. Основные классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла

1.3.1. Основные классы интегрируемых функций

Приведем без доказательств две теоремы о достаточных условиях интегрируемости функции[1].

Теорема 1. Функция, непрерывная на замкнутом множестве (S), интегрируема по этому множеству.

Теорема 2. Функция, ограниченная и непрерывная на замкнутом множестве (S), исключая конечное множество точек и линий[2] разрыва, интегрируема по этому множеству.

1.3.2. Основные свойства двойного интеграла[3]

1. Свойство линейности. Пусть f, g — интегрируемые по (S) функции, α и β — числа. Имеет место равенство

$$\iint\limits_{(S)} (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\; dxdy=\alpha \iint\limits_{(S)} f(x,y)\, dxdy+\beta \iint\limits_{(S)} g(x,y)\, dxdy.$$

Следствие 1. При $\alpha = \beta = 1$

$$\iint\limits_{(S)} (f(x,y)+g(x,y))\; dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{(S)} g(x,y)\, dxdy,$$

т. е. интеграл суммы интегрируемых функций равен сумме интегралов от каждого слагаемого.

Следствие 2. При $\alpha = 1, \beta = -1$

$$\iint\limits_{(S)} (f(x,y)-g(x,y))\, dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\, dxdy - \iint\limits_{(S)} g(x,y)\, dxdy,$$

т. е. интеграл разности интегрируемых функций равен разности интегралов от уменьшаемого и вычитаемого.

---

[1] Доказательства теорем можно найти в различных учебниках, например в [1].

[2] Все рассматриваемые здесь и далее линии — линии с нулевой площадью, т. е. каждую из них можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади (см., например, [1]).

[3] Приведены только формулировки свойств. Доказательства можно найти в учебниках (см. список литературы в конце пособия).

Следствие 3. При $\beta = 0$

$$\iint\limits_{(S)} \alpha f(x,y)\,dxdy = \alpha \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

Замечание. Свойство 1 и его следствия 1, 2 легко распространить, используя, например, метод математической индукции, на любое конечное множество слагаемых.

2. Свойство аддитивности. Пусть область интегрирования (S) является объединением множеств (S_1) и (S_2), не имеющих общих внутренних точек (рис. 4). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y)\,dxdy.$$

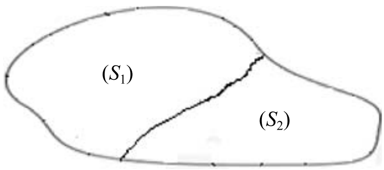

Рис. 4

Замечание. Это свойство распространяется и на большее, чем два, число частей множества (S).

3. Свойство 3 (Интегрирование неравенств). Пусть
а) функции f, g интегрируемы по (S);
б) $\forall (x,y) \in (S)\ f(x,y) \geqslant g(x,y)$.

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy \geqslant \iint\limits_{(S)} g(x,y)\,dxdy.$$

Следствие. Пусть
а) функция f интегрируема по (S);
б) $\forall (x,y) \in (S)\ f(x,y) \geqslant 0$.

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy \geqslant 0.$$

4. Свойство 4 (Теорема о среднем). Пусть f — непрерывная на замкнутом множестве (S) функция. Существует такая точка $M_0(x_0, y_0), M_0 \in (S)$, что выполняется равенство

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S,$$

где S — площадь (S).

5. Свойство 5. Если функция f интегрируема по (S), то функция $|f|$ интегрируема по (S) и имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dxdy.$$

1.4. Вычисление двойного интеграла

Двойной интеграл вычисляется обычно при помощи сведения его к повторному интегралу того или иного вида.

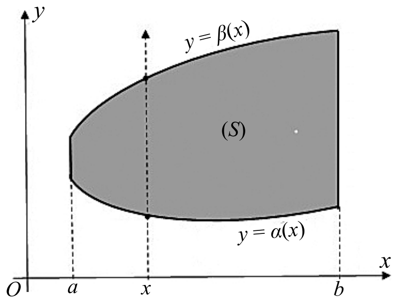

Рис. 5

Теорема 1. Если:

1) область интегрирования (S) ограничена снизу кривой с уравнением $y = \alpha(x)$, сверху $y = \beta(x)$, с боков прямыми $x = a, x = b$, причем функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ (рис. 5);

2) существует $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$;

3) для любого x, $x \in [a,b]$, существует $\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy,$$

где

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \stackrel{def}{=} \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Последний интеграл называется *повторным*. Внутренний интеграл вычисляется при постоянном значении x из $[a,b]$.

Теорема 2. Если:
1) область интегрирования (S) ограничена снизу прямой с уравнением $y = c$, сверху $y = d$, слева кривой с уравнением $x = \mu(y)$, справа $x = \nu(y)$, причем функции μ, ν непрерывны на сегменте $[c,d]$ (рис. 6);

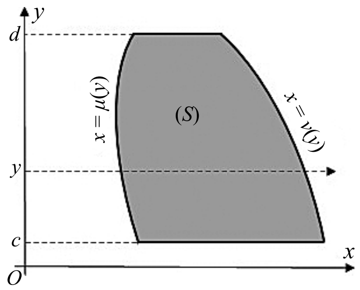

Рис. 6

2) существует $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$;

3) для любого y, $y \in [c,d]$, существует $\int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y)\,dx$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y)\,dx,$$

где
$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y)\,dx \overset{def}{=} \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Интеграл в правой части последнего равенства также называется *повторным*. Внутренний интеграл находится при постоянном значении y из $[c,d]$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(S)} (x+2y)\,dxdy$, где (S) — область, ограниченная линиями с уравнениями $y = x^2$, $y = x$.

Решение. Вычислим интеграл I двумя способами.

1. Сведем рассматриваемый интеграл к повторному, используя теорему 1. Область интегрирования (S) проектируется на ось Ox в сегмент $[0,1]$ (рис. 7). Поэтому пределы интегрирования во внешнем (левом) интеграле повторного интеграла равны 0 и 1.

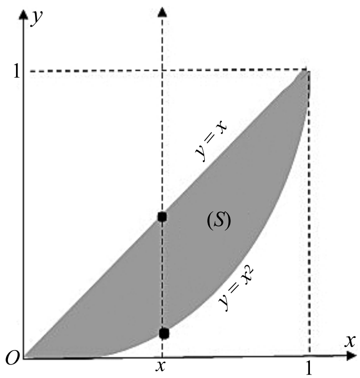

Рис. 7

Внутренний интеграл находится при фиксированном (постоянном) значении x. Возьмем какую-нибудь точку x из сегмента $[0,1]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. Рассмотрим ось, совпадающую с этой прямой и направленную так же, как ось Oy. Эта ось входит в область интегрирования, пересекая параболу $y = x^2$, выходит, пересекая прямую $y = x$ (см. рис. 7). Поэтому пределы внутреннего интеграла равны x^2 и x соответственно. (Это означает, что при фиксированном x переменная y изменяется от $y = x^2$ до $y = x$.)

Имеем

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(x+2y)\,dy=\int\limits_0^1 (xy+y^2)\Big|_{y=x^2}^{y=x}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left((x^2+x^2)-(x^3+x^4)\right)\,dx=\int\limits_0^1(2x^2-x^3-x^4)\,dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}.$$

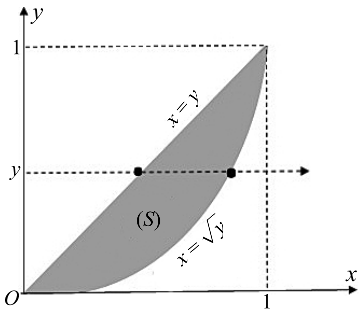

Рис. 8

2. Используем теорему 2. Спроектируем область интегрирования (S) на ось Oy. Получим снова сегмент $[0,1]$. Пределы внешнего интегрирования, как и ранее, равны 0 и 1. Для определения пределов внутреннего интегрирования возьмем точку y из сегмента $[0,1]$ и зафиксируем ее. Ось, проходящая через эту точку и параллельная оси Ox, входит в область интегрирования, пересекая прямую $x=y$, выходит, пересекая ветвь той же параболы (рис. 8) Отсюда

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y}^{\sqrt{y}}(x+2y)\,dx=\int\limits_0^1(0.5x^2+2xy)\Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}y+2y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2-2y^2\right)\,dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{6}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{13}{60}.$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $I = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{1-\sqrt{4x-x^2-3}}^{1} f(x,y)\,dy$.

Решение. Интеграл I — результат сведения к повторному двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$, где (S) определена пределами интегрирования повторного интеграла:

$$(S) = \{(x,y)|\ 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3} \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Уравнение $y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$ — уравнение нижней половины окружности $(x-2)^2+(y-1)^2 = 1$ (рис. 9). Спроектируем область интегрирования (S) на ось Oy (рис. 10). Решим последнее уравнение $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ относительно x: $x = 2 \pm \sqrt{2y - y^2}$.

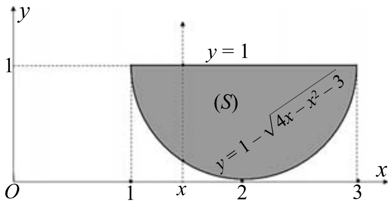

Рис. 9

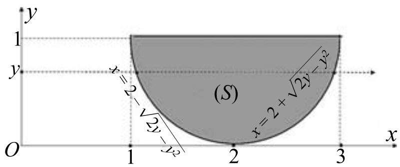

Рис. 10

Теперь применим теорему 2. Получим

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

Решение. Интеграл получен в результате сведения к повторному двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$, где область интегрирования

$$(S) = \{(x,y)|\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \leqslant y \leqslant 2x\}$$

определена пределами интегрирования данного повторного интеграла (рис. 11).

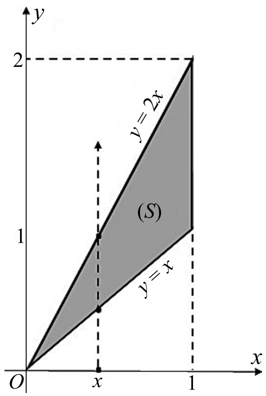

Рис. 11

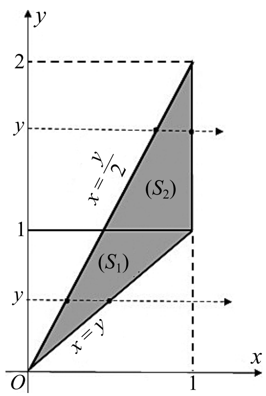

Рис. 12

Спроектируем область интегрирования (S) на ось Oy (рис. 12). Решим уравнения $y = x$, $y = 2x$ относительно x: $x = y$, $x = \dfrac{y}{2}$. Правая граница области интегрирования состоит из отрезков двух прямых $x = y$ и $x = 1$. Одним уравнением эту часть границы записать не удастся.

Введем области $(S_1) = \left\{(x, y)|\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \dfrac{y}{2} \leqslant x \leqslant y\right\}$ и $(S_2) = \left\{(x, y)|\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ \dfrac{y}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$. Так как $(S) = (S_1) \cup (S_2)$, то по свойству аддитивности $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{(S_1)} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{(S_2)} f(x, y)\, dxdy$. Сведя каждый из интегралов в правой части последнего равенства к повторному, имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x, y)\, dx.$$

Замечание. По аналогии с определенным интегралом Римана доказывается утверждение о геометрическом смысле двойного интеграла: двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dxdy$ равен алгебраической сумме объемов тел, ограниченных поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью Oxy и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, проходящей через границу области интегрирования (S); при этом объемы тел, расположенных над плоскостью

Oxy, берутся в этой сумме со знаком «+», под плоскостью Oxy — со знаком «−» (предполагается, что ось Oz направлена снизу вверх).

Это замечание часто удобно использовать при нахождении объемов различных тел.

Задание. Из задачника [4] решить примеры № 3465, 3478, 3481, 3488–3494, 3498–3504, 3506–3510, 3562, 3564, 3565, 3601.

1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных интегрирования в интеграле $\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy$ состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным u и v, связанным со старыми соотношениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{4}$$

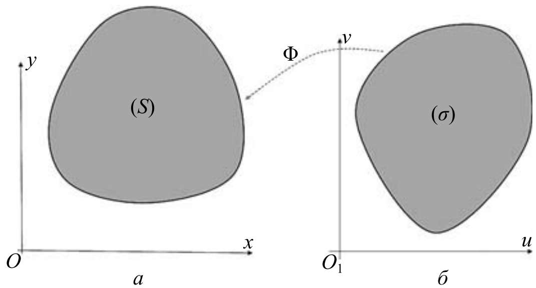

Рис. 13

При этом система (4) представляет собой отображение $\Phi = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ некоторой замкнутой ограниченной области (σ) в плоскости O_1uv на замкнутую ограниченную область (S) в плоскости Oxy (рис. 13). Если выполняются условия:

1) отображение (4) взаимно однозначно;

2) функции $x(u,v), y(u,v)$ в (4) непрерывно дифференцируемы в (σ);

3) якобиан отображения (4)

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{в} \quad (\sigma),$$

то имеет место формула[4]

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\ |J(u,v)|\,dudv. \qquad (5)$$

При этих условиях существует обратное отображение Φ^{-1} : $(S) \longrightarrow (\sigma)$,

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Далее, $\forall N \in (\sigma)$, $N(u,v) \xrightarrow{\Phi} M\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, $M \in (S)$; u, v называются *криволинейными координатами* точки M[5]. Кривые $u(x,y) = \text{const}$, $v(x,y) = \text{const}$ называются *координатными линиями.* Через каждую точку M области (S) проходят две координатные линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. (Аналогично для каждой точки $N \in (\sigma)$.)

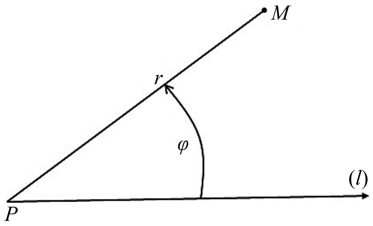

Рис. 14

Во многих задачах в качестве криволинейных координат часто используются полярные координаты r, φ, которые определяются следующим образом (рис. 14). Вводится полярная ось (l) с началом в полюсе (точка P). Из P проводится луч PM в точку M (M — любая точка плоскости, не совпадающая с точкой P). Первая координата r — полярный радиус-вектор точки M — задается равенством $r = PM$, вторая координата φ — угол между вектором $\overrightarrow{PM}$ и осью (l), $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. При $r = 0$ угол φ не определен, для него можно задать любое значение.

[4]Доказательство этого утверждения желательно изучить самостоятельно, используя учебники, например [1].

[5]Криволинейные координаты u, v записывают так же, как и декартовы (в круглых скобках рядом с точкой: $M(u,v)$).

Во многих случаях полярные координаты связывают с декартовыми. Если полярную ось совместить с неотрицательной полуосью Ox прямоугольной декартовой системы координат Oxy так, чтобы полюс P совпал с точкой O, то получим формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Найдем якобиан преобразования:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула (5) запишется в виде

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,drd\varphi. \tag{7}$$

Приведем примеры замены переменных.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(S)} \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 (x^2+2)\,dxdy$, (S) расположена в 1-м координатном квадранте и ограничена линиями с уравнениями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$ (рис. 15).

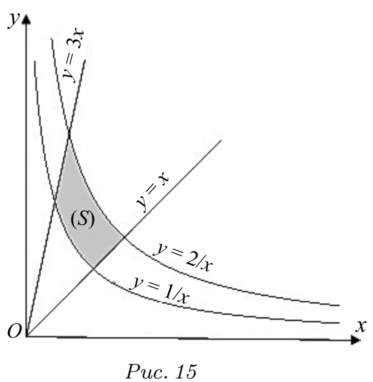

Рис. 15

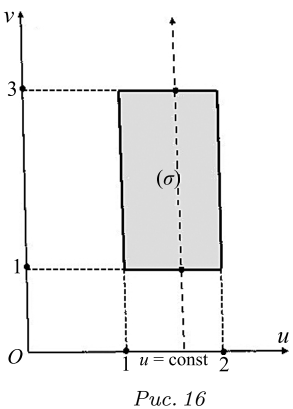

Рис. 16

Решение. Введем новые переменные интегрирования u и v по формулам $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$. Область (S) перейдет в область $(\sigma) = \{(u,v)|\ 1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 3\}$ (рис. 16). Выразим x и y через u и v: $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$. Найдем якобиан преобразования:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

Вычислим далее интеграл I.

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} v^2 \left(\frac{u}{v} + 2\right) \frac{1}{2v}\, dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 du \int\limits_1^3 (u + 2v)dv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (uv + v^2)\Big|_{v=1}^{v=3} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (3u + 9 - u - 1)du = \int\limits_1^2 (u+4)du = \left(\frac{u^2}{2} + 4u\right)\Bigg|_1^2 = \frac{11}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(S)} (x^2 + 3y^2)\, dxdy$, где (S) ограничена частью лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$, лежащей в первом квадранте, и осью Ox (рис. 17).

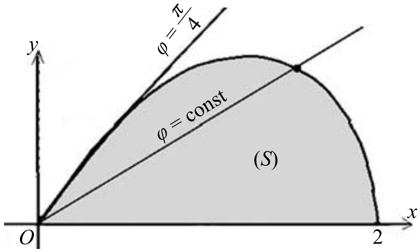

Рис. 17

Решение. Введем полярные координаты r, φ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Уравнение лемнискаты Бернулли запишется в виде $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. Точка (r, φ) находится в области интегрирования (S), если $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. Поэтому

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2(1+2\sin^2\varphi)\cdot r dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2-\cos 2\varphi) d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2-\cos 2\varphi)\; r^4\Big|_{r=0}^{r=2\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2-\cos 2\varphi)\cos^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\varphi) d\varphi - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\varphi d\varphi =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{4} + \sin 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi) =$$

$$= \pi + 0 - 2\cdot 1 + \frac{2}{3}\sin^3 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \frac{4}{3}.$$

Задание. Из задачника [4] решить примеры № 3525–3527, 3530, 3539, 3540, 3602–3605.

2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Как и ранее, начнем изложение с задач, приводящих к понятию тройного интеграла.

2.1. Задача о массе тела

Рассмотрим *задачу о массе тела в пространстве*, аналогичную задаче о массе плоской фигуры.

Пусть в пространстве $Oxyz$ имеется тело (V) (рис. 18). Пусть в каждой точке $M(x, y, z) \in (V)$ задана объемная плотность распределения массы $\mu = f(x, y, z)$.

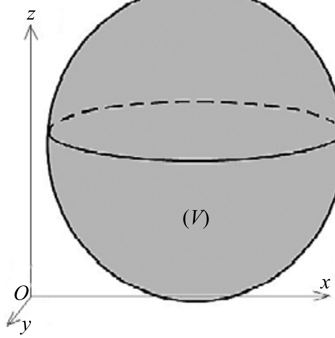

Рис. 18

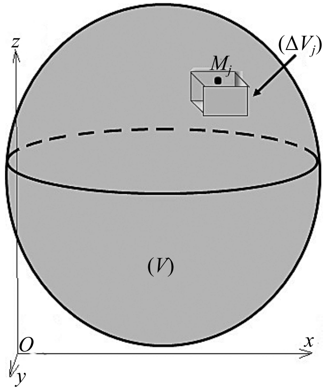

Рис. 19

Разобьем (V) на n частей (ΔV_j) (рис. 19). Обозначим: $d_j = \sup\limits_{P,Q\in(\Delta V_j)}\{|PQ|\}$ — диаметр части (ΔV_j), $\lambda = \max\limits_j\{d_j\}$ — ранг разбиения, ΔV_j — объем части (ΔV_j). В каждой частичной области (ΔV_j) возьмем произвольную точку $M_j(x_j, y_j, z_j)$. Приближенное значение массы Δm_j части (ΔV_j) выражается равенством $\Delta m_j \cong f(x_j, y_j, z_j)\Delta V_j$, а вся масса тела (V)

$$m = \sum_{j=1}^{n} \Delta m_j \cong \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j, z_j)\Delta V_j.$$

Точное значение массы имеет вид

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j, z_j)\Delta V_j. \qquad (8)$$

Аналогично рассматривается *задача о величине электрического или магнитного заряда пространственного тела* (V), если объемная плотность распределения заряда равна $f(x, y, z)$. Ее решение также имеет вид (8). Существует много других задач, решения которых имеют такое же выражение.

2.2. Определение тройного интеграла

Пусть в пространстве $Oxyz$ имеется тело (V) (см. рис. 18). Пусть в каждой точке $M(x, y, z) \in (V)$ задана функция $f(x, y, z)$. Разобьем, как и ранее, (V) на n частей (ΔV_j) (см. рис. 19). Обозначим: d_j — диаметр частичной области (ΔV_j), λ — ранг разбиения, ΔV_j — объем части (ΔV_j). В каждой части (ΔV_j) возьмем произвольную точку $M_j(x_j, y_j, z_j)$ и составим сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j, y_j, z_j)\Delta V_j$. Эта сумма называется *интегральной суммой*, соответствующей взятому разбиению и выбору точек M_j. Продолжим разбиение тела (V) так, чтобы $\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При каждом разбиении будем выбирать точки M_j в каждой частичной области и составлять соответствующие интегральные суммы. Предел последовательности интегральных сумм называется *тройным интегралом* от функции f по (V), если этот предел не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_j:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j, z_j)\Delta V_j. \qquad (9)$$

Множество (V) называется *областью интегрирования*, f — подынтегральной функцией, x, y, z — переменными интегрирования. Если существует $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz$, то функция f называется *интегрируемой по области* (V).

2.3. Основные классы интегрируемых функций. Основные свойства тройного интеграла

2.3.1. Основные классы интегрируемых функций

Приведем без доказательства две теоремы о достаточных условиях интегрируемости функции[6].

Теорема 1. Функция, непрерывная на замкнутом множестве (V), интегрируема по этому множеству.

Теорема 2. Функция, ограниченная и непрерывная на замкнутом множестве (V), исключая конечное множество точек, линий и поверхностей[7] разрыва, интегрируема по этому множеству.

[6] Доказательства можно найти в различных учебниках, например в [1].

[7] Все рассматриваемые здесь и далее линии — линии с нулевой площадью, поверхности — с нулевым объемом (см., например [1]).

2.3.2. Основные свойства тройного интеграла[8]

1. Свойство линейности. Пусть f, g — интегрируемые по (V) функции, α и β — числа. Имеет место равенство

$$\iiint\limits_{(V)} (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\; dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\, dxdydz.$$

Следствие 1. При $\alpha = \beta = 1$

$$\iint\limits_{(V)} (f(x,y,z) + g(x,y,z))\; dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\, dxdydz,$$

т. е. интеграл суммы интегрируемых функций равен сумме интегралов от каждого слагаемого.

Следствие 2. При $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$$\iiint\limits_{(V)} (f(x,y,z) - g(x,y,z))\; dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dxdydz - \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\, dxdydz,$$

т. е. интеграл разности интегрируемых функций равен разности интегралов от уменьшаемого и вычитаемого.

Следствие 3. При $\beta = 0$

$$\iiint\limits_{(V)} \alpha f(x,y,z)\, dxdydz = \alpha \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\, dxdydz,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

[8]Приведем только формулировки свойств. Доказательства можно найти в учебниках (см. список литературы в конце пособия).

Замечание. Свойство 1 и его следствия 1, 2 легко распространить, используя, например, метод математической индукции, на любое конечное множество слагаемых.

2. Свойство аддитивности. Пусть область интегрирования (V) является объединением множеств (V_1) и (V_2), не имеющих общих внутренних точек (рис. 20). Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

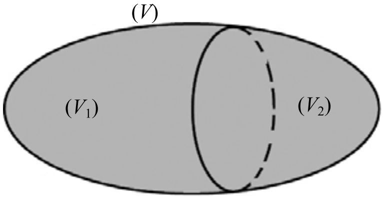

Рис. 20

Замечание. Это свойство распространяется и на большее, чем два, число частей множества (V).

3. Свойство 3 (Интегрирование неравенств). Пусть
а) функции f, g интегрируемы по (V);
б) $\forall (x,y,z) \in (V)\ f(x,y,z) \geqslant g(x,y,z)$.

Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz \geqslant \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Следствие. Пусть
а) функция f интегрируема по (V);
б) $\forall (x,y,z) \in (V)\ f(x,y,z) \geqslant 0$.

Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz \geqslant 0.$$

4. Свойство 4 (Теорема о среднем). Пусть f — непрерывная на замкнутом множестве (V) функция. Существует такая точка $M_0(x_0, y_0, z_0), M_0 \in (V)$, что выполняется равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V,$$

где V — объем (V).

5. Свойство 5. Если функция f интегрируема по (V), то функция $|f|$ интегрируема по (V) и имеет место неравенство

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz\right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f(x, y, z)|\, dxdydz.$$

2.4. Вычисление тройного интеграла

Тройной интеграл вычисляется обычно при помощи сведения его к повторному интегралу.

Теорема 1. Пусть область интегрирования (V) проектируется на плоскость Oxy в область (S). Если:
1) (V) ограничена снизу поверхностью с уравнением $z = \alpha(x, y)$, сверху $z = \beta(x, y)$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz и проходящими через границу области (S) (эта поверхность может и отсутствовать), причем функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ непрерывны на (S) (рис. 21);

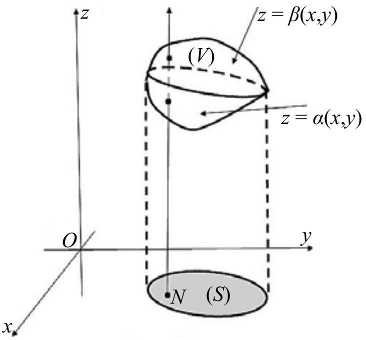

Рис. 21

2) существует $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz$;

3) для любой точки $N(x,y) \in (S)$ существует $\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(S)} dxdy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

где

$$\iint\limits_{(S)} dxdy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \overset{def}{=} \iint\limits_{(S)} \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Внутренний интеграл находится при постоянных значениях x и y $\forall N(x,y) \in (S)$.

Замечание. Для расстановки пределов в повторном интеграле рекомендуется взять произвольную точку $N(x,y) \in (S)$, провести через нее ось, параллельную оси Oz, заметить, что эта ось входит в область интегрирования (V), пересекая поверхность с уравнением $z = \alpha(x,y)$, выходит из области интегрирования при пересечении поверхности с уравнением $z = \beta(x,y)$. Нижний и верхний пределы интегрирования внутреннего интеграла будут соответственно равны $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$.

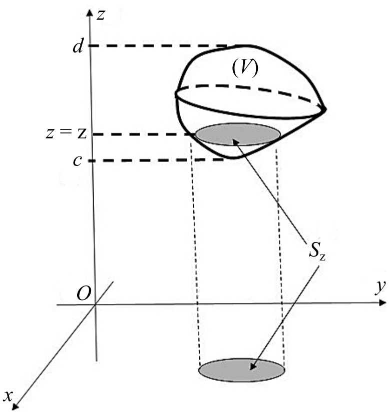

Рис. 22

Теорема 2. Пусть область интегрирования (V) проектируется на ось Oz в сегмент $[c, d]$. Если:
1) (V) ограничена снизу плоскостью с уравнением $z = c$, сверху $z = d$ (см. рис. 22);
2) существует $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz$;
3) для любого $z \in [c, d]$ существует $\iint\limits_{(S_z)} f(x, y, z)\, dxdy$, где (S_z) — сечение области (V) плоскостью $z = \mathrm{z}$, $\mathrm{z} \in [c, d]$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{(S_z)} f(x, y, z)\, dxdy,$$

где

$$\int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{(S_z)} f(x, y, z)\, dxdy \overset{def}{=} \int\limits_{c}^{d} \left(\iint\limits_{(S_z)} f(x, y, z)\, dxdy \right) dz.$$

Внутренний интеграл находится при постоянном значении z из $[c, d]$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(V)} (x + 2y)\, dxdydz$, если область интегрирования (V) ограничена плоскостями $x + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$.

Решение. Найдем значение этого интеграла двумя способами.

1. Используем теорему 1. Область (V) проектируется на плоскость Oxy в прямоугольник (S) (рис. 23, 24). Возьмем любую точку $N \in (S)$, проведем через нее ось, параллельную оси Oz. Согласно теореме 1, имеем

$$I = \iint\limits_{(S)} dxdy \int\limits_{0}^{1-x} (x + 2y)\, dz = \iint\limits_{(S)} (x + 2y) z \Big|_{z=0}^{z=1-x} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (x + 2y)(1 - x)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x - x^2 + 2y(1 - x))\, dy =$$

$$= \int_0^2 \big((x - x^2)y + y^2(1 - x)\big) \Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (4 - 2x - 2x^2)\, dx =$$

$$= (4x - x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1 = 4 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

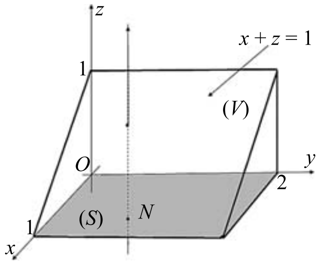

Рис. 23

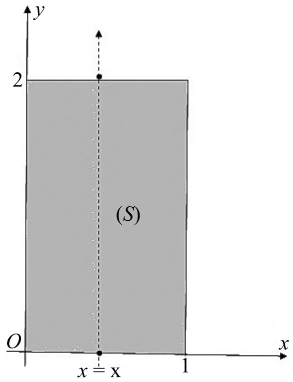

Рис. 24

2. Используем теорему 2. Область (V) проектируется на ось Oz в сегмент $[c, d]$ (рис. 25). Возьмем любую точку $\mathrm{z} \in [c, d]$, проведем через нее плоскость, параллельную плоскости Oxy. Получим в сечении прямоугольник (S_z). Спроектируем его для удобства на плоскость Oxy (рис. 26). По теореме 2 имеем

$$I = \int_0^1 dz \iint\limits_{(S_z)} (x + 2y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} dx \int_0^2 (x + 2y)\, dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (xy + y^2)\Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (2x + 4)\, dx =$$

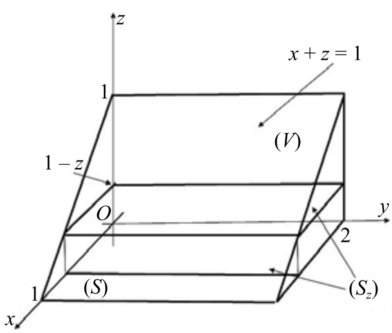

Рис. 25

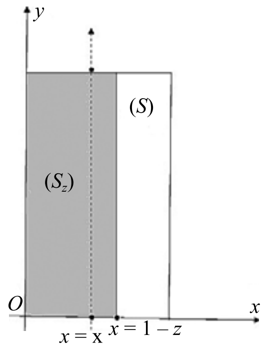

Рис. 26

$$= \int_0^1 (x^2+4x)\Big|_{x=0}^{x=1-z} dz = \int_0^1 \left((1-z)^2 + 4(1-z)\right) dz =$$

$$= \int_0^1 (z^2 - 6z + 5)\, dz = \left(\frac{z^3}{3} - 3z^2 + 5z\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{7}{3}.$$

Задание. Из задачника [4] решить примеры № 3517–3524.

2.5. Замена переменных в тройном интеграле

В интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$ замена переменных интегрирования влечет переход от переменных x, y, z к новым переменным интегрирования u, v, w, связанным со старыми соотношениями

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) представляет собой отображение $\Phi = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$ некоторой замкнутой ограниченной области (ν) в пространстве O_1uvw на замкнутую ограниченную область (V) в пространстве $Oxyz$ (рис. 27).

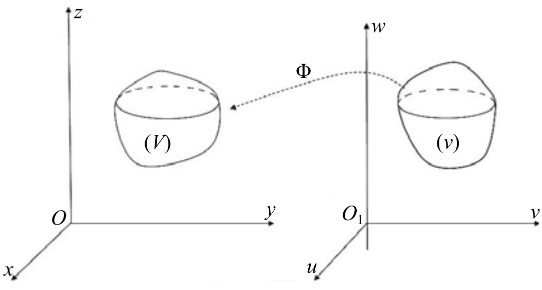

Рис. 27

Если выполняются условия:
1) отображение (10) взаимно однозначно;
2) функции $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ в (10) непрерывно дифференцируемы в (ν);

3) якобиан отображения (10)

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{в} \quad (\nu),$$

то имеет место формула[9]

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_{(\nu)} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)|J(u,v,w)|\,dudvdw. \qquad (11)$$

При этих условиях существует обратное отображение $\Phi^{-1}:(V)\to(\nu)$,

$$\Phi^{-1}=\begin{pmatrix}u(x,y,z)\\ v(x,y,z)\\ w(x,y,z)\end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases}u=u(x,y,z),\\ v=v(x,y,z),\\ w=w(x,y,z).\end{cases} \qquad (12)$$

Далее, $\forall N\in(\nu)$, $N(u,v,w) \xrightarrow{\Phi} M(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$, $M\in(V)$; u,v,w называются *криволинейными координатами* точки M[10].

Поверхности $u(x,y,z)=\text{const}$, $v(x,y,z)=\text{const}$, $w(x,y,z)=\text{const}$ называются *координатными поверхностями*. Через каждую точку M области (V) проходят три координатные поверхности $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$. (Аналогично для каждой точки $N\in(\nu)$.)

Линии

$$\begin{cases}v=\text{const}\\ w=\text{const}\end{cases}, \quad \begin{cases}u=\text{const}\\ w=\text{const}\end{cases}, \quad \begin{cases}u=\text{const}\\ v=\text{const}\end{cases}$$

[9]Доказательство этого утверждения желательно изучить самостоятельно, используя учебники, например [1].

[10]Криволинейные координаты u,v,w записывают так же, как и декартовы (в круглых скобках рядом с точкой: $M(u,v,w)$).

называются *координатными линиями* координат u, v, w соответственно. Через каждую точку M области (V) проходят три координатные линии координат u, v, w. (Аналогично для каждой точки $N \in (\nu)$).

В качестве примеров криволинейных координат приведем цилиндрические и сферические координаты.

2.5.1. Цилиндрические координаты

Пусть в пространстве R^3 введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Возьмем прозвольную точку $M(x, y, z)$. Ее цилиндрические координаты r, φ, z определяются следующим образом: *полярный радиус* r есть растояние точки M от оси Oz, *полярный угол* φ — угол между полуплоскостью, исходящей из оси Oz и проходящей через точку M, и плоскостью Oxz, z — аппликата точки M (рис. 28); $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

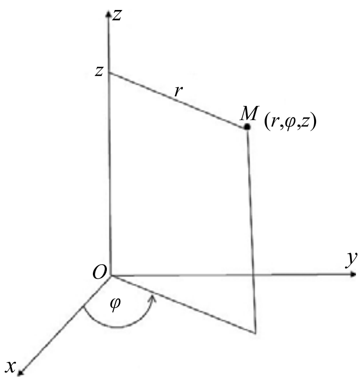

Рис. 28

Связь с прямоугольными декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Координатные поверхности:

1) $r = \text{const}$, $x^2 + y^2 = r^2$ — прямой круговой цилиндр с осью, совпадающей с осью Oz, образующими, паралельными этой оси, радиус цилиндра равен r;

2) $\varphi = \text{const}$ — полуплоскость, исходящая из оси Oz и проходящая через точку M;

3) $z = \text{const}$ — плоскость, параллельная плоскости Oxy и проходящая через точку M.

Координатные линии:

1) $\begin{cases} \varphi = \text{const}, \\ z = \text{const} \end{cases}$ — координатная линия r (полуось, исходящая из оси Oz, проходящая через точку M и параллельная плоскости Oxy);

2) $\begin{cases} r = \text{const}, \\ z = \text{const} \end{cases}$ — координатная линия φ (окружность радиуса r с центром $(0,\ 0,\ z)$, проходящая через точку M);

3) $\begin{cases} r = \text{const}, \\ \varphi = \text{const} \end{cases}$ — координатная линия z (прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку M) (рис. 29).

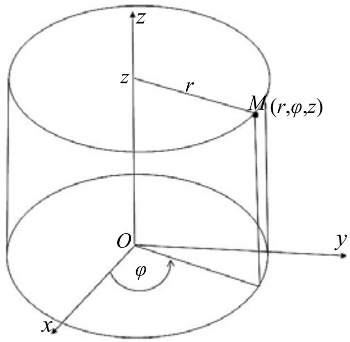

Рис. 29

Найдем якобиан преобразования:

$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Формула (11) запишется в виде

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(\nu)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi\,dz. \qquad (13)$$

Пример. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(V)} x\,dxdydz$, если область интегрирования (V) ограничена поверхностями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=z^2$, $z=0$ (та часть цилиндра, где $0 \leqslant z$, рис. 30).

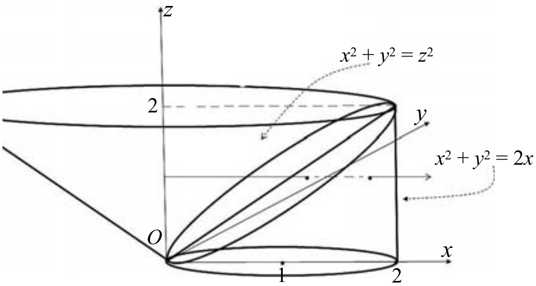

Рис. 30

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра $x^2+y^2=2x$ примет вид $r=2\cos\varphi$, а уравнение конуса $x^2+y^2=z^2$ станет $r=z$. Чтобы найти пределы интегрирования по z, решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ при условии $0 \leqslant x \leqslant 2$. Отсюда $0 \leqslant z \leqslant 2$. Пределы интегрирования по φ и r ясны из рис. 30.

Далее, элемент объема $dxdydz = rdrd\varphi dz$. Исходный интеграл запишется в виде

$$I = \iiint\limits_{(V)} x\,dxdydz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_z^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \;\cdot\; r\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, r^3 \Big|_{r=z}^{r=2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left(8\cos^3\varphi - z^3\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi - \frac{1}{3}\int\limits_0^2 dz \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z^3 \cos\varphi\, d\varphi.$$

$$\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

$$-\frac{z^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = -\frac{2z^3}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = -\frac{2z^3}{3}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2z^3}{3}.$$

$$I = \int\limits_0^2 \left(\pi - \frac{2}{3}z^3\right) dz = \left(\pi z - \frac{2}{3}\cdot\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(3\pi - 4).$$

2.5.2. Сферические координаты

Как и ранее, в пространстве R^3 введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Возьмем прозвольную точку $M(x, y, z)$. Ее сферические координаты ρ, θ, φ определяются следующим образом: ρ есть расстояние точки M от начала координат — точки O, θ — угол между осью OM и осью Oz, φ — угол между полуплоскостью, исходящей из оси Oz и проходящей через точку M, и плоскостью Oxz (рис. 31); $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

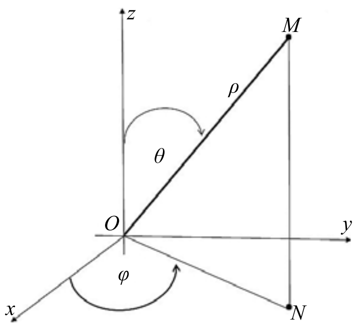

Рис. 31

Связь с прямоугольными декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Координатные поверхности:

1) $\rho = \mathrm{const}$, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ — сфера радиуса ρ с центром в точке O;

2) $\theta = \mathrm{const}$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\theta$ — прямой круговой конус, ось конуса — ось Oz, вершина — точка O;

3) $\varphi = \mathrm{const}$ — полуплоскость, исходящая из оси Oz и проходящая через точку M.

Координатные линии:

1) $\begin{cases} \theta = \mathrm{const}, \\ \varphi = \mathrm{const} \end{cases}$ — координатная линия ρ (полуось, исходящая из начала координат O и проходящая через точку M);

2) $\begin{cases} \rho = \mathrm{const}, \\ \varphi = \mathrm{const} \end{cases}$ — координатная линия θ (полуокружность радиуса ρ с центром в точке O), проходящая через точку M, концы полуокружности находятся на оси Oz);

3) $\begin{cases} \rho = \mathrm{const}, \\ \theta = \mathrm{const} \end{cases}$ — координатная линия φ (окружность с центром на оси Oz, проходящая через точку M, плоскость, в которой расположена окружность, параллельна плоскости Oxy) (рис. 32).

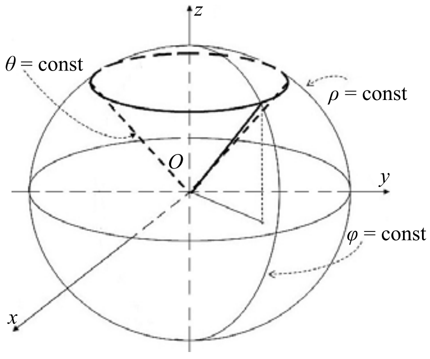

Рис. 32

Якобиан преобразования:

$$J(\rho,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\cos\theta\begin{vmatrix}\rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}+\rho\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta.$$

Элемент объема $dxdydz=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

Формула (11) принимает вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz=$$
$$=\iiint\limits_{(\nu)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi. \qquad (14)$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, заданной уравнением $(x^2+y^2+z^2)^2=z$.

Решение. Установим вначале вид заданной поверхности. Это поверхность вращения вокруг оси Oz кривой с уравнением $(x^2+z^2)^2=z$, расположенной в плоскости Oxz. Чтобы выяснить ее форму, перейдем в исходном уравнении к сферическим координатам ρ,θ,φ: $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$. Получим $\rho=\sqrt[3]{\cos\theta}$. Простые исследования при $y=0$ приводят к кривой на рис. 33. Исходная поверхность изображена на рис. 34.

Обозначим (V) тело, ограниченное данной поверхностью. Искомый объем V выражается интегралом $\iiint\limits_{(V)} dxdydz$. Вычислим его, перейдя к сферическим координатам ρ, θ, φ. Пределы интегриро-

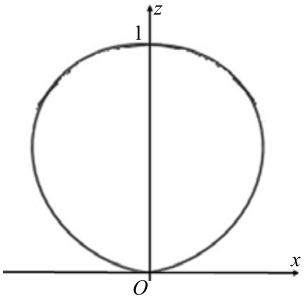

Рис. 33

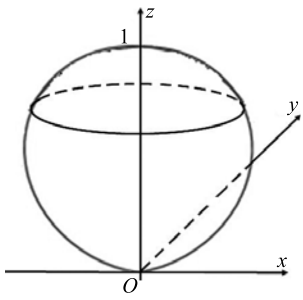

Рис. 34

вания расставим в соответствии с рис. 34:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} d\theta = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \, d(\sin\theta) = \frac{2}{3}\pi \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi.$$

Задание. Из задачника [4] решить примеры № 3552–3558, 3615–3617, 3619, 3623.

3. ПОНЯТИЕ О МНОГОКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Рассмотренные ранее двойной и тройной интегралы являются частными случаями n-кратного интеграла Римана (как и однократный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ тоже (при $n = 1$)).

Общая схема введения таких интегралов следующая: Пусть на некотором ограниченном множестве Ω задана функция $f(A)$, $A \in \Omega$. Разобьем Ω на N частей $\Delta\Omega_j, j = 1, 2, \ldots, N$, обозначим λ ранг разбиения, характеризующий максимальные размеры частичных областей, в каждой части $\Delta\Omega_j$ выберем произвольную точку A_j и составим сумму $\sum\limits_{j=1}^{N} f(A_j)\Delta\sigma_j$, где $\Delta\sigma_j$ — мера (длина, площадь, объем и т. д.) частичной области $\Delta\Omega_j$[11].

Будем разбивать Ω на все более и более мелкие части так, чтобы $\lambda \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Если существует $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{j=1}^{N} f(A_j)\Delta\sigma_j$, не зависящий ни от способа разбиения Ω на части, ни от выбора точек A_j в каждой из этих частей, то он называется *интегралом функции* f по области интегрирования Ω.

Прежде чем вводить n-кратный интеграл, следует определить объем области в пространстве R^n. Прежде всего вводится объем прямоугольного параллелепипеда в R^n.

Прямоугольным параллелепипедом в R^n называется множество

$$D = \{x(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\ a_j, b_j \in R,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Его *объемом* называется произведение $\prod\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$. Объединение прямоугольных параллелепипедов, у каждой пары которых нет общих внутренних точек, имеет объем, равный сумме объемов всех параллелепипедов, входящих в это объединение.

Пусть теперь имеется область $(V) \in R^n$. Впишем в (V) «ступенчатую» фигуру, являющуюся объединением прямоугольных параллелепипедов, «примыкающих» друг к другу своими гранями и не имеющих общих внутренних точек (рис. 35 для $n = 2$).

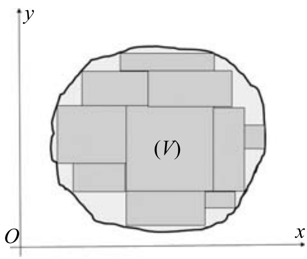

Рис. 35

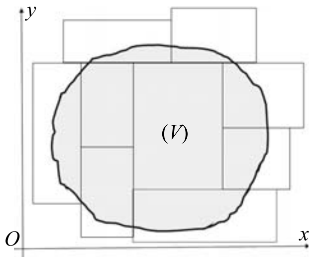

Рис. 36

Обозначим множество объемов всех таких ступенчатых фигур $\{V_i\}$. Обозначим далее $V_* = \sup V_i$. (Супремум берется по объемам

[11] О других мерах можно узнать, например, из книг по теории функций вещественного аргумента, функциональному анализу, в частности из [3].

всевозможных таких вписанных фигур.) V_* называется *внутренним* объемом области (V). Аналогично рассматриваются всевозможные ступенчатые фигуры, «описанные» около (V) (рис. 36 для $n=2$). Множество их объемов обозначим $\{V_e\}$. Далее вводится обозначение $V^* = \inf\{V_e\}$. V^* называется *внешним* объемом области (V). Если $V_* = V^*$, то это число и называют *объемом области* (V).

Теперь можно ввести n-кратный интеграл. Пусть (V) — ограниченная область в пространстве R^n, имеющая объем. Пусть на (V) задана функция $f(x)$, $x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (V)$. Разобьем (V) на N частей $(\Delta V_j), j = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим: $d_j = \sup\limits_{P,Q\in(\Delta V_j)} \{|PQ|\}$ — диаметр части (ΔV_j), $\lambda = \max\limits_j\{d_j\}$ — ранг разбиения, ΔV_j — объем части (ΔV_j). В каждой частичной области (ΔV_j) возьмем произвольную точку $x_j(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{Nj})$ и составим сумму $\sum\limits_{j=1}^{N} f(x_j)\Delta V_j$, где ΔV_j — объем частичной области (ΔV_j).

Будем разбивать (V) на все более и более мелкие части так, чтобы $\lambda \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Если существует $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{j=1}^{N} f(x_j)\Delta V_j$, не зависящий ни от способа разбиения (V) на части, ни от выбора точек x_j в каждой из этих частей, то он называется *интегралом функции* f по области интегрирования (V) и обозначается $\int\limits_{(V)} f(x)\,dx$ или $\underset{(V)}{\iint\cdots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n$.

Итак,

$$\underset{(V)}{\iint\cdots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})\Delta V_j.$$

Из написанного выше следует, что свойства n-кратного интеграла аналогичны свойствам двойного, тройного интегралов. При вычислении n-кратный интеграл сводится к повторному так же, как двойной, тройной интегралы. Так, например, если

$$(V) = \{x(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\, x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1', g_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant h_1(x_1),$$
$$g_2(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant h_2(x_1, x_2), \ldots, g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant x_n \leqslant h_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$
$$x_1^0 \in R, x_1' \in R, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$$

— непрерывные функции, задающие границу $(V)\}$, то

$$\iint\limits_{(V)}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{x_1^0}^{x_1'} dx_1 \int\limits_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{g_2(x_1,x_2)}^{h_2(x_1,x_2)} dx_3 \cdots \int\limits_{g_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n.$$

Пример. Найти $\iint\limits_{(V)}\cdots\int (x_1 + 2x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, если $(V) = \{x(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Решение.

$$\iint\limits_{(V)}\cdots\int (x_1 + 2x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \cdots \int\limits_0^1 dx_{n-1} \int\limits_0^1 (x_1 + 2x_n) dx_n =$$

$$= \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \cdots \int\limits_0^1 (x_1 x_n + x_n^2)\Big|_0^1 dx_{n-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 (x_1 + 1) dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \cdots \int\limits_0^1 dx_{n-1} =$$

$$= \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1\right)\Big|_0^1 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Изменить порядок интегрирования в интеграле.

№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{3/2}}^{3-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$	2	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{3+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
3	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{2/3}}^{3+\sqrt{x(2-x)}} f(x,y)dy$	4	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
5	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{3-x^2} f(x,y)dy$	6	$\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{\lvert x\rvert^{3/2}}^{3-\sqrt{-x(x+2)}} f(x,y)dy$
7	$\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-x^3}^{3+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	8	$\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{\lvert x\rvert^{2/3}}^{3+\sqrt{-x(2+x)}} f(x,y)dy$
9	$\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{\sqrt{-x}}^{3-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	10	$\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x^2}^{3-x^2} f(x,y)dy$
11	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^{3/2}}^{3-\sqrt{(x-3)(1-x)}} f(x,y)dy$	12	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^3}^{3+\sqrt{-x(x-2)}} f(x,y)dy$
13	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^{2/3}}^{3+\sqrt{(3-x)(x-1)}} f(x,y)dy$	14	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\sqrt{x-1}}^{3-\sqrt{x(2-x)}} f(x,y)dy$
15	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{-(1-x)^2+3} f(x,y)dy$	16	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^2}^{2^x} f(x,y)dy$
17	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1+\sqrt{x(2-x)}}^{x^2-2x+2} f(x,y)dy$	18	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1-\sqrt{x(2-x)}}^{x^2+1} f(x,y)dy$

19	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{x^2+2} f(x,y)dy$	20	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^{3/2}-1}^{2^x} f(x,y)dy$
21	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x^2}^{e^{-x}} f(x,y)dy$	22	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1+\sqrt{-(x+2)x}}^{x^2+2x+2} f(x,y)dy$
23	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-\sqrt{-x(x+2)}}^{x^2+1} f(x,y)dy$	24	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-1}^{x^2+3} f(x,y)dy$
25	$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^4-1}^{2^{-x}} f(x,y)dy$	26	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^4-1}^{2^x} f(x,y)dy$

Задание 2. Вычислить интеграл по области (S), где (S) ограничена заданными линиями.

№	Интеграл	Область интегрирования (S)
1	$\iint\limits_{(S)} (x^2+2y)dxdy$	$y = x^2 - 1,\ y = x + 1$
2	$\iint\limits_{(S)} (x^2+2y)dxdy$	$y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$
3	$\iint\limits_{(S)} (2x+y^2)dxdy$	$x - y^2 + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
4	$\iint\limits_{(S)} (2x+y^2)dxdy$	$x - y^2 + 1 = 0,\ x + y - 1 = 0$
5	$\iint\limits_{(S)} (x^2-2y)dxdy$	$y = 1 - x^2,\ y = -x - 1$
6	$\iint\limits_{(S)} (x^2-2y)dxdy$	$y = 1 - x^2,\ y = x - 1$
7	$\iint\limits_{(S)} (2x-y^2)dxdy$	$x + y^2 - 1 = 0,\ y = x + 1$
8	$\iint\limits_{(S)} (2x-y^2)dxdy$	$x + y^2 - 1 = 0,\ x + y + 1 = 0$
9	$\iint\limits_{(S)} (2x+3y)dxdy$	$x = 0,\ y = x,\ y = 4 - x$
10	$\iint\limits_{(S)} (2x+3y)dxdy$	$y = x,\ y = 4 - x,\ y = 0$

11	$\iint\limits_{(S)}(x+2y)dxdy$	$y=-x,\ y=4+x,\ x=0$
12	$\iint\limits_{(S)}(x+2y)dxdy$	$y=-x,\ y=4+x,\ y=0$
13	$\iint\limits_{(S)}(2x-3y)dxdy$	$y=x,\ y=-4-x,\ x=0$
14	$\iint\limits_{(S)}(2x-3y)dxdy$	$y=x,\ y=-4-x,\ y=0$
15	$\iint\limits_{(S)}(3x-2y)dxdy$	$y=-x,\ y=x-4,\ x=0$
16	$\iint\limits_{(S)}(3x-2y)dxdy$	$y=-x,\ y=x-4,\ y=0$
17	$\iint\limits_{(S)}(x+y-2)dxdy$	$y=x^2,\ y=x+2$
18	$\iint\limits_{(S)}(x+y-2)dxdy$	$y=x^2,\ y=2-x$
19	$\iint\limits_{(S)}(x-2y+1)dxdy$	$y=-x^2,\ y=x-2$
20	$\iint\limits_{(S)}(x-2y+1)dxdy$	$y=-x^2,\ y=-x-2$
21	$\iint\limits_{(S)}(2x-y-1)dxdy$	$x=y^2,\ y=x-2$
22	$\iint\limits_{(S)}(x+2y+1)dxdy$	$x=-y^2,\ x+y+2=0$
23	$\iint\limits_{(S)}(2x-y+1)dxdy$	$x=y^2,\ x+y-2=0$
24	$\iint\limits_{(S)}(x+2y+1)dxdy$	$x=-y^2,\ x-y+2=0$
25	$\iint\limits_{(S)}(2x-y+1)dxdy$	$y=x+1,\ y=5-x,\ x=0$
26	$\iint\limits_{(S)}(2x+y-1)dxdy$	$y=1-x,\ y=x+5,\ x=0$

Задание 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$, где область интегрирования (S) ограничена прямыми $y=k_1x$, $y=k_2x$, $ax+by=q_1$, $ax+by=q_2$, $k_1,k_2,a,b,q_1,q_2 \in R$, $f(x,y)=\left(a+b\cdot\dfrac{y}{x}\right)^2$.

№	k_1	k_2	a	b	q_1	q_2
1	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	2	3
3	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
5	1	2	3	4	1	3
6	2	3	2	1	1	2
7	2	3	1	2	2	3
8	2	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
9	2	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
10	2	3	3	4	1	3
11	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1	1	2
12	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	2	2	3
13	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1	3	4
14	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	2	1	3
15	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4	3	2	4
16	-2	-1	1	-2	-2	-1
17	-2	-1	1	-2	-3	-1
18	-2	-1	2	-1	-4	-2
19	-2	-1	3	-1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
20	-2	-1	2	-3	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$
21	-3	-1	2	-1	-2	-1
22	-3	-1	1	-2	-3	-2

23	-3	-1	3	-1	-4	-1
24	-3	-1	1	-3	$-\frac{3}{2}$	-1
25	-3	-1	2	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
26	1	4	1	2	1	3

Задание 4. Вычислить интеграл, где область интегрирования (S) ограничена заданными линиями.

№	Интеграл	Область интегрирования (S)
1	$\iint\limits_{(S)} x dx dy$	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0$, если $0 \leqslant y$
2	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0$, если $y \leqslant 0$
3	$\iint\limits_{(S)} (x+y) dx dy$	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=-x$, если $-x \leqslant y \leqslant x$
4	$\iint\limits_{(S)} x dx dy$	$x^2+y^2=-2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0$, если $0 \leqslant y$
5	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	$x^2+y^2=-2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0$, если $y \leqslant 0$
6	$\iint\limits_{(S)} (x+2y) dx dy$	$x^2+y^2=-2x$, $x^2+y^2=4x$, $\|x\|=\|y\|$, если $x \leqslant y \leqslant -x$
7	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x=0$, если $0 \leqslant x$
8	$\iint\limits_{(S)} x dx dy$	$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x=0$, если $x \leqslant 0$
9	$\iint\limits_{(S)} (2x+y) dx dy$	$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x^2=y^2$, если $-y \leqslant x \leqslant y$
10	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	$x^2+y^2=-2y$, $x^2+y^2=-4y$, $x=0$, если $0 \leqslant x$
11	$\iint\limits_{(S)} x dx dy$	$x^2+y^2=-2y$, $x^2+y^2=-4y$, $x=0$, если $x \leqslant 0$
12	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	$x^2+y^2=-2y$, $x^2+y^2=-4y$, $x=y$, $x=-y$, если $y \leqslant x \leqslant -y$
13	$\iint\limits_{(S)} x dx dy$	сверху $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$, снизу $y=0$, если $x^2+y^2 \geqslant 2y$
14	$\iint\limits_{(S)} y dx dy$	справа $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$, слева $x=0$, если $x^2+y^2 \geqslant 2x$

15	$\iint\limits_{(S)}(x+2y)dxdy$	$x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=2y,$ если точка $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\in\sigma$
16	$\iint\limits_{(S)} ydxdy$	сверху $x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=2y,$ снизу $y=0$, если $2y\leqslant x^2+y^2$
17	$\iint\limits_{(S)} xdxdy$	слева $x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=2y,$ справа $x=0$, если $x^2+y^2\geqslant -2x$
18	$\iint\limits_{(S)}(2x+y)dxdy$	$x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=2y,$ если точка $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\in\sigma$
19	$\iint\limits_{(S)} xdxdy$	снизу $x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=-2y,$ сверху $y=0$, если $-2y\leqslant x^2+y^2$
20	$\iint\limits_{(S)} ydxdy$	слева $x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=-2y,$ справа $x=0$, если $-2x\leqslant x^2+y^2$
21	$\iint\limits_{(S)}(x+2y)dxdy$	$x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2=-2y,$ если точка $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\in\sigma$
22	$\iint\limits_{(S)} ydxdy$	снизу $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=-2y,$ сверху $y=0$, если $-2y\leqslant x^2+y^2$
23	$\iint\limits_{(S)} xdxdy$	справа $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=-2y,$ слева $x=0$, если $2x\leqslant x^2+y^2$
24	$\iint\limits_{(S)}(3x+y)dxdy$	$x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=-2y,$ если точка $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\in\sigma$
25	$\iint\limits_{(S)}(x+y)dxdy$	$x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=6x$
26	$\iint\limits_{(S)}(x-y)dxdy$	$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y$

Задание 5. Вычислить интеграл, если область интегрирования (V) ограничена поверхностями, заданными уравнениями.

№	Интеграл	Область интегрирования (V)
1	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$y = x,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y + z = 4,\ z = 0$
2	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x + y = 0,\ x - y + 4 = 0,\ x = 0,\ y + z = 4,$ $z = 0$
3	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x + y = 0,\ x - y - 4 = 0,\ x = 0,$ $y - z + 4 = 0,\ z = 0$
4	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$y = x,\ x + y + 4 = 0,\ x = 0,\ y - z + 4 = 0,$ $z = 0$
5	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$y = x,\ x + y = 4,\ y = 0,\ y + z = 4,\ z = 0$
6	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x + y = 0,\ x - y + 4 = 0,\ y = 0,\ y + z = 4,$ $z = 0$
7	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x + y = 0,\ x - y - 4 = 0,\ y = 0,$ $y - z + 4 = 0,\ z = 0$
8	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$y = x,\ x + y + 4 = 0,\ y = 0,\ y - z + 4 = 0,$ $z = 0$
9	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$y = x^2 - 1,\ y = x + 1,\ y + z = 3,\ z = 0$
10	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$y = x^2 - 1,\ y = 1 - x,\ y + z = 3,\ z = 0$
11	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x - y^2 + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0,\ x + z = 3,$ $z = 0$
12	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x - y^2 + 1 = 0,\ x + y - 1 = 0,\ x + z = 3,$ $z = 0$
13	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x + y^2 - 1 = 0,\ x - y + 1 = 0,\ z = x + 3,$ $z = 0$
14	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x + y^2 - 1 = 0,\ x + y + 1 = 0,\ z = x + 3,$ $z = 0$
15	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x^2 + y - 1 = 0,\ x + y + 1 = 0,\ z = y + 3,$ $z = 0$
16	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x^2 + y - 1 = 0,\ x - y - 1 = 0,\ z = y + 3,$ $z = 0$
17	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x = y^2,\ y = x - 2,\ x + z = 4,\ z = 0$
18	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x = y^2,\ x + y - 2 = 0,\ x + z = 4,\ z = 0$
19	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x + y^2 = 0,\ x + y + 2 = 0,\ x - z + 4 = 0,$ $z = 0$

20	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x+y^2=0,\ x-y+2=0,\ x-z+4=0,$ $z=0$
21	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$y=x^2,\ y=x+2,\ y+z-4=0,\ z=0$
22	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x^2-y=0,\ x+y-2=0,\ y+z-4=0,$ $z=0$
23	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x^2+y=0,\ y=x-2,\ y-z+4=0,\ z=0$
24	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x^2+y=0,\ x+y+2=0,\ y-z+4=0,$ $z=0$
25	$\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$	$x-y-1=0,\ x+y-5=0,\ y=0,$ $x+z-5=0,\ z=0$
26	$\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz$	$x-y-1=0,\ x+y-5=0,\ x=0,$ $x+z-5=0,\ z=0$

Задание 6. Используя цилиндрическую систему координат, вычислить интеграл, если область интегрирования (V) ограничена поверхностями, заданными уравнениями.

№	Интеграл	Область интегрирования (V)
1	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2x,\ z=x^2+y^2,\ z=0$ при $x^2+y^2\leqslant 2x$
2	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2+z=0,$ $z=-4$ при $x^2+y^2\leqslant 2x$
3	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=-2x,\ z=x^2+y^2,\ z=0$ при $x^2+y^2\leqslant -2x$
4	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=-2x,\ x^2+y^2+z=0,$ $z=-4$ при $x^2+y^2\leqslant -2x$
5	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2y,\ z=x^2+y^2,\ z=0$ при $x^2+y^2\leqslant 2y$
6	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2+z=0,$ $z=-4$ при $x^2+y^2\leqslant 2y$
7	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2+2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$ при $x^2+y^2\leqslant -2y$
8	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2+2y=0,\ x^2+y^2+z=0,$ $z=-4$ при $x^2+y^2\leqslant -2y$
9	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2x,\ 4-z=x^2+y^2,\ z=4$ при $x^2+y^2\leqslant 2x$
10	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$	$x^2+y^2=2x,\ z-4=x^2+y^2,\ z=0$ при $x^2+y^2\leqslant 2x$

11	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2=-2x$, $4-z=x^2+y^2$, $z=4$ при $x^2+y^2\leqslant -2x$
12	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2=-2x$, $z-4=x^2+y^2$, $z=0$ при $x^2+y^2\leqslant -2x$
13	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2=2y$, $4-z=x^2+y^2$, $z=4$ при $x^2+y^2\leqslant 2y$
14	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2=2y$, $z-4=x^2+y^2$, $z=0$ при $x^2+y^2\leqslant 2y$
15	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2+2y=0$, $4-z=x^2+y^2$, $z=4$ при $x^2+y^2\leqslant -2y$
16	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$x^2+y^2+2y=0$, $z-4=x^2+y^2$, $z=0$ при $x^2+y^2\leqslant -2y$
17	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $0\leqslant x$
18	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $0\leqslant x$, $y\leqslant 0$
19	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$
20	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$
21	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $0\leqslant x$, $y\geqslant 0$
22	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$
23	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$
24	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right) dxdydz$	$(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$, если $0\leqslant x$, $y\leqslant 0$
25	$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} dxdydz$	$x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4z$, $z=0$, если $0\leqslant z$
26	$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$	$\left(x^2+y^2\right)^2=4xy$, $x^2+y^2=2z$, $z=0$, если $0\leqslant x, 0\leqslant y$

Задание 7. Вычислить интеграл, если область интегрирования (V) ограничена поверхностями с заданными уравнениями.

№	Интеграл	Область интегрирования (V)
1	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = x,\ y=0,\ z=0$ при $0 \leqslant y,\ 0 \leqslant z$
2	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = x,\ y=0,\ z=0$ при $0 \leqslant y,\ z \leqslant 0$
3	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = x,\ y=0,\ z=0$ при $y \leqslant 0,\ 0 \leqslant z$
4	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = x,\ y=0,\ z=0$ при $y \leqslant 0,\ z \leqslant 0$
5	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -x,\ y=0,\ z=0$ при $0 \leqslant y,\ 0 \leqslant z$
6	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -x,\ y=0,\ z=0$ при $0 \leqslant y,\ z \leqslant 0$
7	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -x,\ y=0,\ z=0$ при $y \leqslant 0,\ 0 \leqslant z$
8	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -x,\ y=0,\ z=0$ при $y \leqslant 0,\ z \leqslant 0$
9	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = y,\ x=0,\ z=0$ при $0 \leqslant x,\ 0 \leqslant z$
10	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = y,\ x=0,\ z=0$ при $0 \leqslant x,\ z \leqslant 0$
11	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = y,\ x=0,\ z=0$ при $x \leqslant 0,\ 0 \leqslant z$
12	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = y,\ x=0,\ z=0$ при $x \leqslant 0,\ z \leqslant 0$
13	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = y,\ x=0,\ z=0$ при $x \leqslant 0,\ z \leqslant 0$
14	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -y,\ x=0,\ z=0$ при $0 \leqslant x,\ z \leqslant 0$
15	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -y,\ x=0,\ z=0$ при $x \leqslant 0,\ z \geqslant 0$
16	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -y,\ x=0,\ z=0$ при $x \leqslant 0,\ z \leqslant 0$
17	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = z,\ x=0,\ y=0$ при $0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y$
18	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = z,\ x=0,\ y=0$ при $0 \leqslant x,\ y \leqslant 0$

19	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = z,\ x=0,\ y=0$ при $x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y$
20	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = z,\ x=0,\ y=0$ при $x \leqslant 0,\ y \leqslant 0$
21	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -z,\ x=0,\ y=0$ при $0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y$
22	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -z,\ x=0,\ y=0$ при $0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y$
23	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -z,\ x=0,\ y=0$ при $x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y$
24	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = -z,\ x=0,\ y=0$ при $x \leqslant 0,\ y \leqslant 0$
25	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = 8x,\ z=0$ при $z \geqslant 0$
26	$\iiint\limits_{(V)} z^3 dxdydz$	$(x^2+y^2+z^2)^2 = 4x,\ z=0$ при $z \leqslant 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1968. 440 с.; Т. 2. СПб.: Лань, 2005. 464 с.

2. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 400 с.; Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 424 с.

3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

4. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Профессия, 2001. 432 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е