УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С ДВОЙНЫМ МАЯТНИКОМ С ПОМОЩЬЮ УПРАВЛЕНИЯ ЕЕ УСКОРЕНИЕМ

С. А. Зегжда, *Е. А. Шатров, М. П. Юшков*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Задача о переводе за заданное время механической системы из одного фазового состояния в другое является одной из важнейших проблем теории управления. Модельной задачей в этом случае является нахождение оптимальной управляющей силы, переводящей горизонтально движущуюся тележку с маятниками, например, из состояния покоя за заданное время на заданное расстояние в новое состояние покоя. В предыдущих работах авторов было показано, что при решении такой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина с минимизацией функционала от квадрата управляющей силы автоматически выполняется связь высокого порядка (например, связь восьмого порядка при движении тележки с двумя маятниками). Поэтому для решения этой же задачи был использован обобщенный принцип Гаусса, что позволило найти управляющую силу в виде полинома. В настоящей статье с помощью того же принципа решается задача о гашении колебаний тележки с двойным маятником. Предлагается предварительно вместо силы искать в качестве управления ускорение тележки, а затем по найденному закону изменения оптимального ускорения тележки отыскивать непосредственно управляющую силу и движение всей механической системы. Библиогр. 4 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: управление движением, управляющая сила, принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса.

Постановка задачи и размерные уравнения движения. Одной из важнейших задач теории управления является задача о переводе механической системы за заданное время из одного фазового состояния в другое. Весьма часто для решения таких задач применяются метод динамического программирования [1] и метод, опирающийся на использование принципа максимума Понтрягина [2]. Модельной задачей среди подобных задач можно считать нахождение горизонтальной оптимальной управляющей силы, гасящей колебания тележки с маятниками при переводе этой механической системы за заданное время из одного состояния покоя в другое. В ряде предыдущих работ авторов (см., например, [3]) при решении таких задач с помощью принципа максимума Понтрягина с минимизацией функционала от квадрата управляющей силы [4] показывалось, что при этом движение механической системы оказывается подчиненным выполнению неголономной связи высокого порядка (при движении тележки с двумя маятниками выполняется связь восьмого порядка). Поэтому для решения той же задачи о гашении колебаний было предложено использовать обобщенный принцип Гаусса, свойственный движению неголономных систем со связями высокого порядка. Это позволило найти управляющую силу в виде полинома, при этом движение системы оказалось более плавным, чем движение, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина.

В предлагаемой статье развиваются идеи применения обобщенного принципа Гаусса для гашения колебаний. Рассматривается система, состоящая из тележки с двойным маятником, причем используется новый подход для отыскания управляющей силы путем предварительного определения оптимального управляющего ускорения тележки.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.418

Итак, ставится следующая задача теории управления.

Рассмотрим горизонтальное движение тележки массы m вдоль оси x. К тележке прикреплена ось двойного маятника с длинами l_σ и массами m_σ, $\sigma = 1, 2$ (рис. 1). Требуется сформировать такую оптимальную горизонтальную силу F, приложенную к тележке, которая за заданное время $\widetilde{T}$ переместит тележку на расстояние S, причем вся механическая система должна перейти из первоначального состояния покоя в новое состояние равновесия.

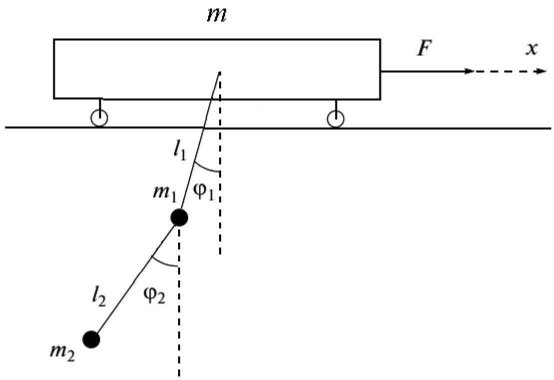

Рис. 1. Движение тележки с двойным маятником

Обозначим углы отклонений маятников от вертикали через φ_1 и φ_2. Тогда при малых колебаниях уравнения Лагранжа второго рода запишутся следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(m_1 + m_2 + m)\,\ddot{x} - (m_1 + m_2)\,l_1\ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = F\,, \\
m_1 l_1(l_1\ddot{\varphi}_1 - \ddot{x}) + m_2 l_1(l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}) = -(m_1 + m_2)\,\mathrm{g} l_1 \varphi_1\,, \\
m_2 l_2(l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1\ddot{\varphi}_1 - \ddot{x}) = -m_2 l_2 \mathrm{g} \varphi_2\,.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Из второго и третьего уравнений системы (1) следует, что определение силы F, при которой осуществляется переход системы из состояния покоя в новое состояние покоя, сводится к определению ускорения тележки, так как затем, используя первое уравнение, можно определить и силу F. Ниже покажем, что задача об определении ускорения тележки с двойным маятником сводится к задаче об определении ускорения тележки с двумя независимыми математическими маятниками. Этот переход осуществляется на основе определения собственных форм и собственных частот колебаний двойного маятника.

Определение собственных частот и собственных форм колебаний двойного маятника. Введем обозначения

$$
M = m_1 + m_2 + m\,, \quad \mathrm{k}^2 = \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,,
$$

а также безразмерное перемещение тележки

$$
\bar{x} = \frac{x}{l_1}\,.
$$

Тогда второе и третье уравнения системы (1) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \alpha\beta\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_1 = \ddot{\bar{x}}\,, \\ \ddot{\varphi}_1 + \alpha\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_2 = \ddot{\bar{x}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь α и β таковы:

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1}\,, \quad \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Определим собственные частоты и собственные формы колебаний двойного маятника. Решение однородной системы, соответствующей системе неоднородных дифференциальных уравнений (2), будем искать в виде

$$\varphi_\sigma = D_\sigma \sin(\Omega t + \delta)\,, \quad \sigma = 1, 2\,,$$

где Ω — искомая размерная собственная частота. Теперь для определения постоянных D_1 и D_2 получим систему

$$\begin{gathered} (1 - \lambda^2)\, D_1 - \alpha\beta\lambda^2\, D_2 = 0\,, \\ -\lambda^2\, D_1 + (1 - \alpha\lambda^2)\, D_2 = 0\,, \\ \lambda^2 = \frac{\Omega^2}{\mathrm{k}^2}\,. \end{gathered}$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, находим собственные частоты механической системы:

$$\Omega_\nu^2 = \lambda_\nu^2 \mathrm{k}^2\,, \quad \lambda_\nu^2 = \frac{1 + \alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha\beta + 1}}{2(\alpha - \alpha\beta)}\,, \quad \nu = 1, 2\,.$$

Постоянные $D_\sigma,\ \sigma = 1, 2$, соответствующие собственному значению $\lambda_\nu^2,\ \nu = 1, 2$, обозначим как $D_{\nu\sigma}$. Как известно, они пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов последней линейно зависимой строки определителя, когда в него подставлена величина λ_ν^2. Их значения вычисляются по формулам

$$\Delta_{\nu 1} = \alpha\beta\lambda_\nu^2\,, \quad \Delta_{\nu 2} = (1 - \lambda_\nu^2)\,, \quad \nu = 1, 2\,. \tag{3}$$

Переход от системы с двойным маятником к системе с двумя независимыми маятниками. Согласно общей теории малых колебаний, собственные векторы, задаваемые выражениями (3), позволяют связать координаты φ_1 и φ_2 с главными координатами ξ_1 и ξ_2 следующим образом:

$$\varphi_\sigma = \sum_{\nu=1}^{2} \Delta_{\nu\sigma}\xi_\nu\,, \quad \sigma = 1, 2\,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнения (2), придем к следующей системе уравнений относительно $\xi_1,\ \xi_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\Delta_{\nu 1}}{\lambda_\nu^2}\,(\ddot{\xi}_\nu + \Omega_\nu^2\xi_\nu) = \ddot{\bar{x}}\,, \\ \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\Delta_{\nu 2}}{\lambda_\nu^2}\,(\ddot{\xi}_\nu + \Omega_\nu^2\xi_\nu) = \ddot{\bar{x}}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассматривая (5) как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $y = \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2 \xi_1$ и $z = \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2 \xi_2$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2 \xi_1 &= A_1 \,\ddot{\bar{x}}\,, \\ \ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2 \xi_2 &= A_2 \,\ddot{\bar{x}}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda_1^2(\Delta_{22} - \Delta_{21})}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}\,, \quad A_2 = \frac{\lambda_2^2(\Delta_{11} - \Delta_{12})}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}\,.$$

Перепишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1^2 \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,\xi_1 &= A_1 \,\ddot{\bar{x}}\,, \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_2^2 \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,\xi_2 &= A_2 \,\ddot{\bar{x}}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножим уравнения системы (7) соответственно на $1/A_1$ и $1/A_2$ и введем новые переменные $\psi_1,\ \psi_2$ по формулам

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1^2}{A_1}\,\xi_1\,, \quad \psi_2 = \frac{\lambda_2^2}{A_2}\,\xi_2\,. \tag{8}$$

Тогда система (7) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1^2}\,\ddot{\psi}_1 + \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,\psi_1 &= \ddot{\bar{x}}\,, \\ \frac{1}{\lambda_2^2}\,\ddot{\psi}_2 + \frac{\mathrm{g}}{l_1}\,\psi_2 &= \ddot{\bar{x}}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть теперь к той же самой тележке подвешен не двойной маятник, а два независимых маятника, имеющих длины l_1^* и l_2^*. Углы отклонения этих маятников обозначим соответственно через ψ_1 и ψ_2. Тогда, если перемещение тележки характеризуется координатой x, эти углы будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} l_1^*\,\ddot{\psi}_1 + \mathrm{g}\,\psi_1 &= \ddot{x}\,, \\ l_2^*\,\ddot{\psi}_2 + \mathrm{g}\,\psi_2 &= \ddot{x}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Видим, что при выполнении соотношений

$$l_\sigma^* = \frac{l_1}{\lambda_\sigma^2}\,, \quad \sigma = 1, 2\,,$$

система (9) совпадает с системой (10).

Таким образом, задача об определении ускорения тележки с двойным маятником, которое входит во второе и третье уравнения системы (1), эквивалентна задаче об определении ускорения, входящего в систему (10).

Как следует из выражений (4) и (8), искомые углы $\varphi_1,\ \varphi_2$ двойного маятника связаны с координатами $\psi_1,\ \psi_2$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Delta_{11}\xi_1 + \Delta_{21}\xi_2 = \alpha\beta A_1\psi_1 + \alpha\beta A_2\psi_2\,, \\ \varphi_2 &= \Delta_{12}\xi_1 + \Delta_{22}\xi_2 = \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - 1\right) A_1\psi_1 + \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - 1\right) A_2\psi_2\,. \end{aligned} \tag{11}$$

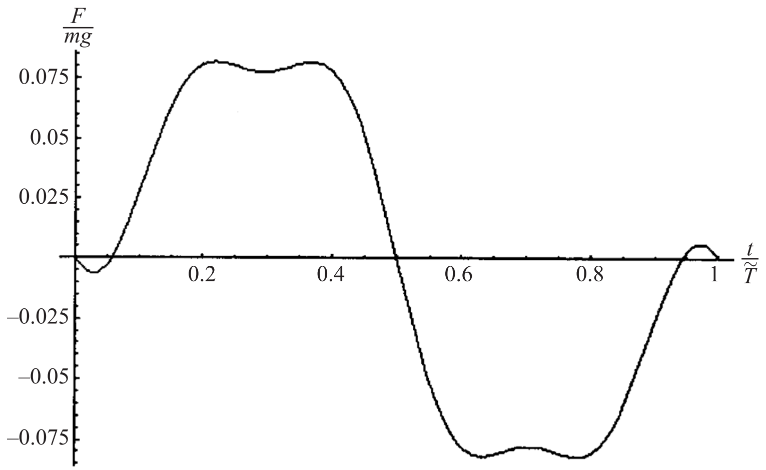

Рис. 2. Управляющая сила для движения тележки с двойным маятником

Как и в статье [3], размерное управление U (в нашем случае управлением является ускорение $\ddot{x}$), входящее в систему (10), в соответствии с применением обобщенного принципа Гаусса будем искать в виде полинома, зависящего от времени. Однако этот полином по предложению П. Е. Товстика будем представлять в виде

$$U \equiv \ddot{x} = \sum_{k=1}^{6} B_k t^k (\widetilde{T} - t)\,, \qquad (12)$$

где $\widetilde{T}$ — время перемещения тележки на расстояние S из начального состояния покоя в конечное состояние покоя. Постоянные B_k определяются из граничных условий

$$x(\widetilde{T}) = S\,, \quad \dot{x}(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \psi_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \dot{\psi}_\sigma(\widetilde{T}) = 0\,, \quad \sigma = 1, 2\,.$$

Интегрируя систему (10) при найденном управлении (12), получим углы ψ_1 и ψ_2 как функции времени. Затем по формулам (11) найдем и углы φ_1 и φ_2 как функции времени. В результате, используя первое уравнение системы (1), найдем силу F, обеспечивающую переход системы из состояния покоя в новое состояние покоя при перемещении тележки за время $\widetilde{T}$ на расстояние S. На рис. 2 приведена зависимость силы F, выраженной в долях mg, от безразмерного времени $\tau = t/\widetilde{T}$. Исходные параметры двойного маятника таковы: $m_1 = m_2 = m,\ l_1 = l_2$. Расчеты соответствуют перемещению тележки на расстояние $S = l_1$ за время $\widetilde{T} = 1.5\,(2\pi/\Omega_1)$, где $\Omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{\mathrm{g}/l_1}$.

Литература

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

3. *Юшков М. П., Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Пашкина А. А.* О связи теории управления с неголономной механикой // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1(59). Вып. 4. С. 15–23.

4. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.

Статья поступила в редакцию 30 января 2016 г.

Сведения об авторах

$\boxed{\textit{Зегжда Сергей Андреевич}}$ — доктор физико-математических наук, профессор (1935–2015)

Шатров Егор Александрович — аспирант; egorshatroff@yandex.ru

Юшков Михаил Петрович — доктор физико-математических наук, профессор; yushkovmp@mail.ru

SUPPRESSION OF OSCILLATION OF A TROLLEY WITH A DOUBLE PENDULUM BY MEANS OF CONTROL OF ITS ACCELERATION

Sergey A. Zegzhda†*, Egor A. Shatrov, Mikhail P. Yushkov*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; egorshatroff@yandex.ru, yushkovmp@mail.ru

The problem of transition of a mechanical system from one phase state to another is one of the most important problems of the control theory. In this case, a model problem consists in finding the optimal control force which transports the trolley with pendulums moving horizontally, for example, from a state of rest to a new state of rest over a given distance during the fixed time. In their previous papers the authors have shown that when solving such a problem with the help of the Pontryagin maximum principle with minimization of the functional of the control force squared, a high-order constraint is realized automatically (for instance, an eighth-order constraint for the motion of a trolley with two pendulums). That is why, for solving the same problem the generalized Gauss principle has been used that made it possible to find the control force as a polynomial. In the present paper the problem of suppression of oscillation of a trolley with a double pendulum is solved by means of the same principle. It is offered first to find the acceleration of the trolley as a control instead of the force, and then to seek immediately the control force by the obtained law of variation of the optimal acceleration of the trolley. Refs 4. Figs 2.

Keywords: control of motion, control force, Pontryagin maximum principle, generalized Gauss principle.

References

1. Bellman R., *Dynamic programming* (Princeton Univ. Press, 2010, 392 p.).

2. Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., *Mathematical theory of optimal processes* (Nauka, Moscow, 1983, 392 p.) [in Russian].

3. Yushkov M. P., Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Pashkina A. A., "On relationship between the control theory and nonholonomic mechanics", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**, issue 4, 181–188 (2014).

4. Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N., *Control of oscillation* (Nauka, Moscow, 1980, 384 p.) [in Russian].

Для цитирования: Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П. Гашение колебаний тележки с двойным маятником с помощью управления ее ускорением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 683–688. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.418

For citation: Zegzhda S. A., Shatrov E. A., Yushkov M. P. Suppression of oscillation of a trolley with a double pendulum by means of control of its acceleration. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 683–688. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.418