ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА СЧЕТНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ОТРЕЗКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. 1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

О. В. Сильванович¹, Н. А. Широков²

¹ Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

² Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Вопрос о приближении функций, непрерывных на подмножествах вещественной оси целыми функциями имеет долгую историю, начиная с теоремы Джексона—Бернштейна о приближении 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами, которые естественно трактовать как целые функции экспоненциального типа. В настоящей статье мы занимаемся задачей, относящейся к концепции этой теоремы, описывающей классы функциональных пространств скоростью их возможного приближения целыми функциями. В качестве ключевых примеров укажем теорему С. Н. Бернштейна об описании класса ограниченных функций из классов Гёльдера на всей оси функциями экспоненциального типа. Принципиальным моментом является то, что скорость приближения в окрестности концов отрезков оказывается выше в той шкале, которая впервые появилась в теории приближения полиномами функций из классов Гёльдера на отрезке и позволила согласовать так называемые «прямые» и «обратные» теоремы для этого случая, т. е. восстанавливать гёльдеровскую гладкость по скорости приближения полиномами в этой шкале. В данной статье мы представим формулировку «прямой» теоремы о возможности приближения функций из классов Гёльдера на счетном объединении отрезков целыми функциями с определенной скоростью. Ранее такие приближения не рассматривались. Также мы дадим общие определения и приведем важнейшие леммы, используемые для дальнейшего построения приближающих функций. Во второй части работы мы представим доказательство «прямой» теоремы. В последующих работах, для получения конструктивного описания класса гладкости с помощью скорости приближения, мы сформулируем и докажем «обратную» теорему для этого случая. При выводе таких утверждений требуется, как правило, факт, аналогичный теореме С. Н. Бернштейна об оценке нормы производной целой функции через норму самой функции. В нашем случае будет необходимо утверждение, аналогичное теореме Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина об оценке целой функции на всей оси через ее значение на подмножестве оси. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: классы Гёльдера, целые функции экспоненциального типа, аппроксимация на подмножестве вещественной оси.

1. Дадим определения и формулировки. Для $\rho > 1$ через $E_\rho([-1, 1])$ обозначим образ окружности $\xi : |\xi| = \rho$ при отображении функцией Жуковского:

$$E_\rho = \left\{ z : z = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right), |\xi| = \rho \right\}, \quad (1)$$

для $a < b$ положим

$$E_\rho([a, b]) = \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2} \right) E_\rho, \quad (2)$$

при $z \in \mathbb{C}$ обозначим

$$d_\rho(z; [a, b]) = \text{dist}(z, E_\rho([a, b])). \quad (3)$$

Определим теперь промежутки I_n , составляющие множество $E : I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{Z}, b_n < a_{n+1}, E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$. Далее, пусть $J_n = [b_n, a_{n+1}]$. Предположим, что существуют числа $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ такие, что выполняются неравенства

$$0 < \alpha_0 \leq \frac{|I_n|}{|I_m|} \leq \beta_0, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{|J_n|}{|J_m|} \leq \beta_1, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

и пусть

$$\frac{|J_0|}{|I_0|} = \gamma.$$

Для $z \in \mathbb{C}, \rho > 1$ обозначим

$$d_\rho(z, E) = \min_{n \in \mathbb{Z}} d_\rho(z, [a_n, b_n]). \quad (6)$$

Пусть ω — модуль непрерывности. Тогда через $\Lambda^{r+\omega}([a, b])$ обозначим множество комплекснозначных функций f , заданных на $[a, b]$, таких, что для $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнена оценка

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq c_f \omega(|x_2 - x_1|) \quad (7)$$

с нормой

$$\|f\|_{\Lambda^{r+\omega}([a, b])} = \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \dots + \left| f^{(r)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \sup_{x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2} \frac{|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)|}{\omega(|x_2 - x_1|)}. \quad (8)$$

Пусть $\Lambda_M^{r+\omega}(E)$ — множество комплекснозначных функций f , заданных на E , таких, что $|f(x)| \leq M$ при $x \in E$, $f \in \Lambda^{r+\omega}([a_n, b_n])$ для $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\|f\|_{\Lambda^{r+\omega}(E)} = \sup_n \|f\|_{\Lambda^{r+\omega}([a_n, b_n])} < \infty. \quad (9)$$

Обозначим через T_σ множество целых функций F экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на вещественной оси, т. е. для $F \in T_\sigma$ существует постоянная $C_F \geq 0$, такая что при $z = x + iy$ справедливо неравенство $|F(z)| \leq C_F \exp \sigma |y|$.

Сформулируем основной результат данной работы. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ и

$$H_M^\alpha(E) = \Lambda_M^{\omega_\alpha(t)}(E). \quad (10)$$

Теорема. Пусть $f \in H_M^\alpha(E)$, где множество E удовлетворяет условиям (3) и (4), $d_\rho(z, E)$ определено в (6). Тогда для $\sigma \geq 1$ найдется функция $F_\sigma \in T_\sigma$ такая, что при $x \in E$ справедлива оценка

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leq c \cdot d_{1+1/\sigma}^\alpha(x, E), \quad (11)$$

где постоянная c зависит лишь от $\|f\|_{H_M^\alpha(E)}$ и чисел $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma$.

Нам понадобятся вспомогательные геометрические построения.

Пусть $l = |I_0| = b_0 - a_0$, положим $a'_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n$, $b'_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} I'_n &= \left\{ x : a'_n - \frac{1}{8}|I_n| \leq x \leq a'_n + \frac{1}{8}|I_n| \right\}, \\ I''_n &= \left\{ x : b'_n - \frac{1}{8}|I_n| \leq x \leq b'_n + \frac{1}{8}|I_n| \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для $x''_n \in I''_n$, $x'_n \in I'_n$ обозначим через $s(x''_{n-1}, x'_n)$ объединение отрезков $\tau(x''_{n-1})$, $\tau(x'_n)$ и $t(x''_{n-1}, x'_n)$, где

$$\tau(x) = [x, x - il], \quad t(x_1, x_2) = [x_1 - il, x_2 - il].$$

Выберем теперь произвольно точки $x'_n \in I'_n$, $x''_n \in I''_n$, $n \in \mathbb{Z}$ и положим $X' = \{x'_n\}$, $X'' = \{x''_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(X', X'') = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} s(x''_{n-1}, x'_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [x'_n, x''_n]. \quad (13)$$

Обозначим далее через D_+ область, для которой $\partial D_+ = \Gamma(X', X'')$ и $i \in D_+$, и пусть $D_- = \mathbb{C} \setminus \bar{D}_+$.

Теперь выберем и зафиксируем $\rho_0 = \rho_0(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma)$ так, чтобы внутренние области эллипсов $E_{\rho_0}([a_n, b_n])$ не пересекались и выполнялось неравенство

$$\text{dist}(E_{\rho_0}([a_n, b_n]), E_{\rho_0}([a_{n+1}, b_{n+1}])) \geq \frac{1}{2}(a_{n+1} - b_n) = \frac{1}{2}|J_n|, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Нам понадобится специальное продолжение заданной на множестве E функции f на внутренние области всех эллипсов $E_{\rho_0}([a_n, b_n])$, которые будем обозначать через $\text{int}E_{\rho_0}([a_n, b_n])$. Прежде всего продолжим функцию f на внутренние области всех эллипсов $E_{\rho_0/2}(I_n) = E_{\rho_0/2}([a_n, b_n])$ по методу Е. М. Дынькина [1, 2] так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_0 \in C(\text{int}E_{\rho_0/2}(I_n)), \quad f_0|_{I_n} = f, \quad (14)$$

$$f_0 \in C^1(\text{int}E_{\rho_0/2}(I_n) \setminus I_n), \quad (15)$$

$$|f'_{0\bar{z}}| \leq c \text{dist}^{r-1}(z, I_n) \omega(\text{dist}(z, I_n)), \quad (16)$$

$$f_0(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{int}E_{\rho_0/2}(I_n). \quad (17)$$

При применении метода Е. М. Дынькина [1, 2] постоянная c в соотношении (16) зависит от f, I_n, ρ_0 . Предположения (4) и (5) влекут зависимость c лишь от $f, \alpha_i, \beta_i, \gamma$.

Далее, продолжение f_0 таково, что справедливо неравенство

$$\int_{\text{int}E_{\rho_0/2}(I_n)} |f'_{0\bar{z}}| dm_2 \leq c_1 |I_n| \leq c_1 \alpha_1 |I_0|, \quad (18)$$

где c_1 также зависит лишь от $f, \alpha_i, \beta_i, \gamma$.

Определим теперь функцию $\varphi_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\varphi \in C^1(\mathbb{C}), \quad \text{supp} \varphi_n \subset \text{int} E_{\rho_0}(I_n) \setminus \text{int} E_{\rho_0/2}(I_n), \quad 0 \leq \varphi_n(z) \leq 1.$$

Тогда с некоторыми постоянными $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, зависящими лишь от α_i , β_i , γ , выполняется

$$c_2 \leq \left| \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_n)} \varphi'_{n\bar{z}} dm_2 \right| \leq \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_n)} |\varphi'_{n\bar{z}}| dm_2 \leq c_3. \quad (19)$$

Определим $\varkappa_n$ соотношениями

$$\int_{\partial E_{\rho_0}(I_n)} f'_{0\bar{z}} dm_2 + \varkappa_n \int_{\partial E_{\rho_0}(I_n)} \varphi'_{n\bar{z}} dm_2 = 0. \quad (20)$$

Если сопоставить (18) и (19), получится $|\varkappa_n| \leq c_1 \alpha_1 |I_n| / c_2 = c_4$. Теперь положим

$$f_1(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in E_{\rho_0/2}(I_n), \\ \varkappa_n \varphi_n(z), & z \in E_{\rho_0}(I_n) \setminus E_{\rho_0/2}(I_n), \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n). \end{cases} \quad (21)$$

Из (2) и (21) следует

$$\int_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}} dm_2 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Получим теперь интегральное представление, а именно формулу Грина для $f(x)$, $x \in I_{n_0}$. Обозначим через $Q(m, A)$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат:

$$[\beta_{-m} - iA, \beta_{-m} + iA], [\beta_{-m} + iA, \beta_m + iA], [\beta_m - iA, \beta_m + iA], [\beta_{-m} - iA, \beta_m - iA],$$

где $A > \sup |\text{Im} z|$ при $z \in E_{\rho}(I_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, β_{-m} — середина промежутка $\mathbb{R}$ между $E_{\rho_0}(I_{n_0-m})$ и $E_{\rho_0}(I_{n_0-m-1})$, β_m — середина промежутка $\mathbb{R}$ между $E_{\rho_0}(I_{n_0+m})$ и $E_{\rho_0}(I_{n_0+m+1})$.

По построению $f_1(z) = 0$ при $z \in \partial Q(m, A)$, поэтому справедливо соотношение

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{Q(m, A)} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z-x} dm_2(z) = -\sum_{\nu=-m}^m \frac{1}{\pi} \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z-x} dm_2(z). \quad (23)$$

В силу (22) при $\nu \neq 0$ имеем

$$\int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{x_{n_0+\nu} - x} dm_2(z) = 0, \quad (24)$$

если $x_n = (a_n + b_n)/2$. Поэтому, с учетом (5), (18) и (24), получим

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{\pi} \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z-x} dm_2(z) \right| &= \left| -\frac{1}{\pi} \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} f'_{1\bar{z}}(z) \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{x_{n_0+\nu}-x} \right) dm_2(z) \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{\pi} \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} f'_{1\bar{z}}(z) \cdot \frac{x_{n_0+\nu}-z}{(z-x)(x_{n_0+\nu}-x)} dm_2(z) \right| \leq c_5 \cdot \frac{1}{\nu^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда из (23) и (25) находим

$$f(x) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int_{\text{int} E_{\rho_0}(I_n)} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z-x} dm_2(z). \quad (26)$$

3. Определим конформные отображения, которые будем использовать при построении приближения.

Пусть функция $\psi_+(\xi)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\xi : \text{Im} \xi > 0\}$ на область D_+ так, что выполняются условия

$$\psi_+(\infty) = \infty, \quad \frac{\psi_+(i\xi)}{i\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 1,$$

а функция ψ_- отображает нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_- = \{\xi : \text{Im} \xi < 0\}$ на область D_- так, что выполняются условия

$$\psi_-(\infty) = \infty, \quad \frac{\psi_-(i\xi)}{i\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 1,$$

и пусть $\varphi_+(z)$ — обратное к ψ_+ отображение, $\varphi_-(z)$ — обратное к ψ_- .

Наконец, определим для $s \in \mathbb{R}$ и $\xi > 0$ отображения

$$z_{\xi,s}^+ = z_{\xi,s}^+(z) = \psi_+(\varphi_+(z) + s + i\xi), \quad z \in D_+, \quad (27)$$

$$z_{\xi,s}^- = z_{\xi,s}^-(z) = \psi_-(\varphi_-(z) + s - i\xi), \quad z \in D_-. \quad (28)$$

Приведем важное свойство функций $z_{\xi,s}^\pm$, которое аналогично леммам 4 и 6 из [3] и доказывается переписыванием леммы 4 из [3] для полуплоскости вместо внешней области единичного круга.

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная c_0 такая, что при $x_+ \in \partial D_+$, $z_+ \in D_+$ или при $x_- \in \partial D_-$, $z_- \in D_-$ справедливы оценки*

$$|z_{\xi,s}^+(z_+) - x_+| \leq c_0 \left(\frac{|s|}{\xi} + 1 \right)^4 |z_{\xi,0}^+(z_+) - x_+|, \quad (29)$$

$$|z_{\xi,s}^-(z_-) - x_-| \leq c_0 \left(\frac{|s|}{\xi} + 1 \right)^4 |z_{\xi,0}^-(z_-) - x_-|. \quad (30)$$

Далее, через $A_0, A_1, \dots$ будем обозначать постоянные, которые зависят лишь от $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma$. Из леммы 1 можно получить, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $|\xi_2 - \xi_1| = I_0$, выполнены соотношения

$$A_0 |I_0| \leq |\psi_+(\xi_2) - \psi_+(\xi_1)| \leq A_1 |I_0|, \quad (31)$$

$$A_2 |I_0| \leq |\psi_-(\xi_2) - \psi_-(\xi_1)| \leq A_3 |I_0|. \quad (32)$$

Поскольку внутренние по отношению к областям D_+ и D_- углы равны $\pi/2$, $3/2\pi$, или 2π , то, подобно тому, как в работе [4] для отображения внешней области единичного круга, для отображений ψ_+ и ψ_- справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Существуют такие постоянные A_4 и A_5 , что для $z'_+, z''_+ \in D_+$, $\xi > 0$ имеем*

$$\left| z_{\xi,0}^+(z''_+) - z''_+ \right| \leq A_4 \left| z_{\xi,0}^+(z'_+) - z'_+ \right|^{1/2} \left(|z''_+ - z'_+| + |z_{\xi,0}^+(z'_+) - z'_+| \right)^{1/2} \quad (33)$$

и для $z'_-, z''_- \in D_-$, $\xi > 0$ имеем

$$\left| z_{\xi,0}^-(z''_-) - z''_- \right| \leq A_5 \left| z_{\xi,0}^-(z'_-) - z'_- \right|^{1/2} \left(|z''_- - z'_-| + |z_{\xi,0}^-(z'_-) - z'_-| \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Подобным образом соотношения (31) и (32) вместе с тем обстоятельством, что $\tau(x'_n)$, $\tau(x''_n)$ перпендикулярны I_n , при $|z - x'_n| < \frac{1}{16}|I_n|$ или при $|z - x''_n| < \frac{1}{16}|I_n|$ влекут справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Если $z \in D_+$, $\text{Im} z < 0$ или $z \in D_-$, то при $0 < \xi < A_6|I_0|$ имеем*

$$\left| z_{\xi,0}^+(z) - z \right| \leq A_7 \frac{\xi}{|z - x'_n| + \sqrt{\xi}}, \quad (35)$$

соответственно

$$\left| z_{\xi,0}^-(z) - z \right| \leq A_8 \frac{\xi}{|z - x'_n| + \sqrt{\xi}}, \quad (36)$$

и аналогичные неравенства с A_9, A_{10} справедливы в окрестности x''_n при тех же ограничениях на ξ и z :

$$\left| z_{\xi,0}^+(z) - z \right| \leq A_9 \frac{\xi}{|z - x''_n| + \sqrt{\xi}}, \quad (37)$$

соответственно

$$\left| z_{\xi,0}^-(z) - z \right| \leq A_{10} \frac{\xi}{|z - x''_n| + \sqrt{\xi}}. \quad (38)$$

Важно отметить, что все постоянные в оценках (33)–(38) не зависят от выбора последовательностей $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x'_n \in I'_n$ и $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x_n \in \mathbb{Z}$.

Для $z \in \mathbb{R}$ при $|z - x'_n| \geq |I_n|/16$ и при $|z - x''_n| \geq 1/16$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, при $0 < \xi < A_6|I_n|$, если при этом также $z \in (x'_{n_0}, x''_{n_0})$ при некотором $n_0 \in \mathbb{Z}$, то справедливо соотношение

$$\left| z_{\xi,0}^\pm(z) - z \right| \leq A_{11}\xi. \quad (39)$$

А если в неравенстве (38) при некотором n_1 выполнено $z \in (x''_{n_1}, x'_{n_1})$, то $z \in \bar{D}_+$ и при $0 < \xi < A_6|I_0|$ имеем оценку

$$\left| z_{\xi,0}^+(z) - z \right| \leq A_{12}\xi \left(\xi^2 + \min(|z - b_{n_1}|, |z - a_{n_1+1}|)^2 \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Литература

1. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115, N 2. P. 33–58.
2. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

3. Бельй В. И. Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сборник. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 331–361.

4. Лебедев Н. А., Широков Н. А. О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами // Известия АН АрмССР. 1971. Т. 6, № 4. С. 311–341.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2016 г.

Сведения об авторах

Сильванович Ольга Васильевна — кандидат физико-математических наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор; nikolai.shirokov@gmail.com

APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS ON A COUNTABLE UNION OF SEGMENTS ON THE REAL AXIS

Olga V. Silvanovich¹, Nikolai A. Shirokov²

¹ St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Kronverkskii pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; olamamik@gmail.com

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nikolai.shirokov@gmail.com

We state in the present paper a theorem about approximation of a function defined on a countable union of segments of the real line by means of entire functions of exponential type. The approximating function is supposed to belong to a Holder class α , $0 < \alpha < 1$, and the rate of approximation turns out to be better in a vicinity of ends of segments similiary to the case of case of polynomial approximation of a function on one segment.

Now, we consider a set $E \subset \mathbb{R}$ consisting of disjonct segments $[a_n, b_n]$, $-\infty < n < +\infty$ such that $b_n - a_n \asymp b_k - a_k$ for any n and k and $a_{n+1} - b_n \asymp b_n - a_n$ for any n . The function f defined on E supposed to be bounded by a constant M on all of segments $[a_n, b_n]$ and satisfying the condition $|f(x) - f(y)| \leq c_0|x - y|^\alpha$, $x, y \in [a_n, b_n]$, $0 < \alpha < 1$. For $\sigma \geq 1$, $\xi = \frac{1}{\sigma}$, $x \in [a_n, b_n]$ we define a scale of approximation $d_{1+\xi}(x, [a_n, b_n])$ such that $d_{1+\xi}(x, [a_n, b_n]) \asymp \xi(\xi^2 + \min(x - a_n)^2, (b_n - x)^2)^{\frac{1}{2}}$. Then the main theorem states that there exists a constant c_1 depending only on f and E such that we can find a function F_σ of exponential type $\leq \sigma$ which approximate a function f in a following way:

$$|F_\sigma(x) - f(x)| \leq c_1 d_{1+\xi}^\alpha(x, [a_n, b_n]), \quad x \in [a_n, b_n].$$

Refs 4.

Keywords: Holder classe σ , entire function of exponential type, approximation on subsets of real line.

References

1. Dyn'kin E. M., "Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale", *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**(2), 33–58 (1980).
2. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extensions", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).
3. Belyi V. I., "Conformal mappings and approximation of functions in regions with quasiconform boundary", *Mathematics of the USSR-Sbornik* **31**(3), 289–317 (1977).
4. Lebedev N. A., Shirokov N. A., "Uniform approximation of functions on closed sets with finite number of corner points with non-zero exterior angles", *Izvestia AN ArmSSR* **6**(4), 311–341 (1971) [in Russian].

Для цитирования: Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 644–650. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.414

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 644–650. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.414