УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ВИДЕ СУММ ИЛИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

В. Б. Невзоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Дан обзор имеющихся представлений, которые позволяют выразить такие зависимые упорядоченные величины, как порядковые статистики и рекорды, в виде сумм независимых слагаемых или произведений независимых случайных множителей. Получены некоторые новые соотношения подобного вида, которые таким же образом задают совместные распределения представителей этих двух типов упорядоченных случайных величин. Библиогр. 14 назв.

Ключевые слова: порядковые статистики, рекордные величины, экспоненциальное распределение, равномерное распределение.

1. Введение. Будут рассмотрены два типа упорядоченных случайных величин (с. в.) — порядковые статистики и рекорды. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую непрерывную функцию распределения (ф. р.) $F(x)$. Каждому набору $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствуют порядковые статистики $X_{1,n} \leqslant X_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}$. Рассмотрим также построенные по исходной последовательности случайных величин верхние рекордные моменты $L(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и верхние рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots < X(n) < \ldots$, которые задаются следующим образом:

$$L(1) = 1,\ X(1) = X_1,\ L(n) = \min\{j : X_j > X_{L(n-1)}\},\ X(n) = X_{L(n)},\ n = 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Аналогичным образом (с заменой в (1) знака неравенства на противоположный) определяются и нижние рекорды $x(1) > x(2) > \ldots > x(n) > \ldots$, но будем рассматривать только верхние рекорды, поскольку результаты для нижних рекордных величин сразу получаются из результатов для верхних, если вместо исходных с. в. рассматривать последовательность с. в. $Y_k = -X_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Подробное изложение теории порядковых статистик и теории рекордов можно найти, например, в монографиях [1–6].

Особо важное место в теории упорядоченных величин представляют результаты, полученные в ситуациях, когда с. в. X_1, X_2, ... имеют стандартное $U([0,1])$-равномерное на интервале [0,1] распределение с ф. р. $T(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ или стандартное $E(1)$-экспоненциальное распределение с ф. р.

$$H(x) = \max\{0, 1 - \exp(-x)\},\ -\infty < x < \infty.$$

Введем для этих двух вариантов распределений специальные обозначения.

Пусть $U_1, U_2, \ldots$ и $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательности независимых $U([0,1])$-равномерных и независимых $E(1)$-экспоненциальных с. в. с функциями распределения соответственно $T(x)$ и $H(x)$. Введем обозначения

$$U_{1,n} \leqslant U_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant U_{n,n}, \quad Z_{1,n} \leqslant Z_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant Z_{n,n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для порядковых статистик, а

$$U(1) < U(2) < \ldots \text{ и } Z(1) < Z(2) < \ldots$$

— для рекордных величин, соответствующих этим двум распределениям.

В тексте статьи часто будут встречаться независимые с. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$, также имеющие стандартное $E(1)$-экспоненциальное распределение. Отметим, что символ $\stackrel{d}{=}$ в соотношениях вида $X \stackrel{d}{=} Y$ будет обозначать *равенство по распределению* соответствующих случайных величин или случайных векторов.

Вернемся к порядковым статистикам $X_{1,n} \leqslant X_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}$ и рекордным величинам $X(1) < X(2) < \ldots < X(n) < \ldots$. Знаки неравенств, связывающие наши упорядоченные случайные объекты, подсказывают, что эти величины, в отличие от исходных с. в., теряют важное свойство независимости, позволяющее использовать методы и схемы, хорошо разработанные для последовательностей независимых случайных величин. В то же время следует заметить, что, несмотря на этот упомянутый «недостаток» рекордов и порядковых статистик, эти случайные величины весьма популярны в теории вероятностей и математической статистике. С ними часто приходится иметь дело при решении различных прикладных задач, связанных, например, с метеорологией, гидрологией, страхованием, спортивной статистикой. Поэтому были сделаны многочисленные попытки представить эти заведомо зависимые случайные величины в виде различных сумм или произведений независимых величин. Ниже будет дан обзор таких результатов, а также будут рассмотрены некоторые новые схемы, для которых удалось получить представления подобного рода.

2. Классические представления для порядковых статистик и рекордов. В теории порядковых статистик и в теории рекордов особо важную роль играют результаты для равномерных и экспоненциальных распределений. В частности, равномерное распределение весьма популярно из-за так называемого вероятностного интегрального преобразования, называемого также преобразованием Смирнова, позволяющего с. в. X с любой непрерывной ф. р. $F(x)$ выразить, используя легко проверяемое равенство

$$U \stackrel{d}{=} F(X),$$

через $U([0,1])$-равномерно распределенную с. в. U. Действительно, если $G(s)$ представляет собой функцию, определяемую соотношением

$$G(s) = \inf\{x : F(x) \geqslant s\},$$

то очевидным становится равенство

$$X \stackrel{d}{=} G(U).$$

Поскольку преобразование Смирнова, примененное к с. в. X_1, $X_2, \ldots$, не нарушает порядка этих величин, то этот факт позволяет соответствующие результаты, справедливые для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любой непрерывной ф. р. $F(x)$, сформулировать для порядковых статистик и рекордных величин следующим образом:

$$\{F(X_{1,n}), F(X_{2,n}), \ldots, F(X_{n,n})\} \stackrel{d}{=} \{U_{1,n}, U_{2,n}, \ldots, U_{n,n}\}, \tag{2}$$

$$\{X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}\} \stackrel{d}{=} \{G(U_{1,n}), G(U_{2,n}), \ldots, G(U_{n,n})\}, \tag{3}$$

$$\{F(X(1)), F(X(2)), \dots, F(X(n))\} \stackrel{d}{=} \{U(1), U(2), \dots, U(n)\}, \qquad (4)$$

$$\{X(1), X(2), \dots, X(n)\} \stackrel{d}{=} \{G(U(1)), G(U(2)), \dots, G(U(n))\}. \qquad (5)$$

Приведенные соотношения показывают, что достаточно получить удобные представления для какого-то одного распределения, чтобы затем, используя равенства (2)–(5), перейти к соотношениям (возможно, более громоздким) для произвольных непрерывных распределений. Таким образом, результаты, полученные для равномерных порядковых статистик или для равномерных рекордов, могут послужить основой для их возможных обобщений на случай произвольных распределений.

В этой ситуации кажется естественным заняться получением удобных соотношений именно для равномерных распределений. Выясняется, что, несмотря на свою простоту, семейство равномерных распределений все-таки уступает в некоторых отношениях семейству экспоненциальных распределений. Дело в том, что для любой с. в. η с ф. р. $H_\lambda(x) = 1 - \exp(-x/\lambda), x \geqslant 0, \lambda > 0$, выполняется равенство

$$P\{\eta \geqslant x + y | \eta \geqslant x\} = P\{\eta \geqslant y\}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Это так называемое свойство отсутствия последействия широко используется в теории надежности, в системах массового обслуживания, а также при изучении рекордов и порядковых статистик. Оно позволяет получить простые представления, с которых мы и начнем наш обзор, для экспоненциальных порядковых статистик и экспоненциальных рекордов. Предварительно заметим, что, опираясь на результаты для $E(1)$-экспоненциального распределения, можно будет в дальнейшем для уже произвольных упорядоченных величин использовать соотношения

$$\{X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}\} \stackrel{d}{=} \{G(U_{1,n}), G(U_{2,n}), \dots, G(U_{n,n})\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \{G(1 - \exp(-Z_{1,n})), G(1 - \exp(-Z_{2,n})), \dots, G(1 - \exp(-Z_{n,n}))\},\ n = 1, 2, \dots, \qquad (6)$$

$$\{X(1), X(2), \dots, X(n)\} \stackrel{d}{=} \{G(U(1)), G(U(2)), \dots, G(U(n))\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \{G(1 - \exp(-Z(1))), G(1 - \exp(-Z(2))), \dots, G(1 - \exp(-Z(n)))\}, n = 1, 2, \dots, \qquad (7)$$

и связанные с ними равенства.

Поэтому начнем обзор с двух классических представлений для упорядоченных случайных величин, порожденных последовательностями $E(1)$-распределенных независимых с. в. Z_1, Z_2, $\dots$. Первый из этих результатов был получен в статье [7] почти 80 лет тому назад.

Представление 1. *При любом $n = 1, 2, \dots$ для порядковых статистик $Z_{1,n} \leqslant Z_{2,n} \leqslant \dots \leqslant Z_{n,n}$, соответствующих $E(1)$-экспоненциальному распределению, справедливо соотношение*

$$\{Z_{1,n}, Z_{2,n}, \dots, Z_{n,n}\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \left\{\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_1}{n} + \frac{\xi_2}{n-1}, \dots, \frac{\xi_1}{n} + \frac{\xi_2}{n-1} + \frac{\xi_3}{n-2} + \dots + \frac{\xi_{n-1}}{2} + \xi_n\right\}, \qquad (8)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые $E(1)$-экспоненциально распределенные случайные величины.

Следствие 1. *Поскольку* $E\xi_k = D\xi_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, *из* (8) *следует, что для любых* $n = 1, 2, \dots$ *и* $k = 1, 2, \dots$ *математические ожидания и дисперсии порядковых статистик* $Z_{k,n}$ *задаются равенствами*

$$EZ_{k,n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k+1} \tag{9}$$

и

$$DZ_{k,n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}. \tag{10}$$

Следствие 2. *Справедливы регрессионные соотношения вида*

$$E(Z_{m,n}|Z_{k,n} = x) = x + \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k-1} + \cdots + \frac{1}{n-m+1}, \quad 1 \leqslant k < m \leqslant n. \tag{11}$$

Несколько позже порядковых статистик началось изучение рекордов (см. [8–12]), но и здесь одним из первых и важнейших был следующий результат.

Представление 2. *При любом* $n = 1, 2, \dots$ *для рекордных величин* $Z(1) < Z(2) < \ldots < Z(n)$, *соответствующих стандартному* $E(1)$*-экспоненциальному распределению, справедливо соотношение*

$$\{Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \{\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} + \xi_n\}, \tag{12}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые* $E(1)$*-экспоненциально распределенные случайные величины.*

Вернемся к соотношению (8). Оно вместе с преобразованием Смирнова позволило в статье [13] получить следующий результат для $U([0,1])$-распределений.

Представление 3. *В случае, когда независимые с. в.* $U_1, U_2, \ldots$ *имеют* $U([0,1])$*-равномерное распределение, для любых* $n = 1, 2, \ldots$ *и порядковых статистик* $U_{1,n} \leqslant U_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant U_{n,n}$ *справедливы равенства*

$$\{U_{k,n}\}_{k=1}^n \stackrel{d}{=} \{U_k^{1/k} U_{k+1}^{1/(k+1)} \ldots U_{n-1}^{1/(n-1)} U_n^{1/n}\}_{k=1}^n. \tag{13}$$

Еще в одном соотношении для равномерных порядковых статистик, предложенном в работе [14], непосредственно участвуют случайные $E(1)$-распределенные слагаемые.

Представление 4. *Для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо равенство*

$$\{U_{1,n}, U_{2,n}, \ldots, U_{n,n}\} \stackrel{d}{=} \left\{\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right\}, \tag{14}$$

где $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{k-1} + \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, *представляют собой суммы независимых* $E(1)$*-экспоненциально распределенных слагаемых.*

Замечание 1. Следует отметить, что элементы вектора $\{S_k/S_{n+1}\}_{k=1}^n$ в правой части (14) не зависят от знаменателя S_{n+1}, что позволяет, например, сразу найти начальные моменты равномерных порядковых статистик, пользуясь соотношениями

$$E(S_k)^\alpha = E\left(\frac{S_k}{S_{n+1}}\right)^\alpha E(S_{n+1})^\alpha,$$

из которых следует

$$E(U_{k,n})^\alpha = \frac{E(S_k)^\alpha}{E(S_{n+1})^\alpha}, \tag{15}$$

т. е. нужные моменты равномерных порядковых статистик выражены через моменты гамма-распределенных сумм S_k и S_{n+1}. Для нахождения всевозможных смешанных моментов равномерных порядковых статистик удобнее использовать представление 3.

Например, если $1 \leqslant k < m \leqslant n$, то

$$\begin{aligned} E(U_{k,n})^\alpha (U_{m,n})^\beta &= E(U_k^{\alpha/k} U_{k+1}^{\alpha/(k+1)} \dots U_{m-1}^{\alpha/(m-1)} U_m^{(\alpha+\beta)/m} \dots U_n^{(\alpha+\beta)/n}) = \\ &= E(U_k^{\alpha/k}) E(U_{k+1}^{\alpha/(k+1)}) \dots E(U_{m-1}^{\alpha/(m-1)}) E(U_m^{(\alpha+\beta)/m}) \dots E(U_n^{(\alpha+\beta)/n}) = \\ &= \frac{k}{\alpha+k} \frac{k+1}{\alpha+k+1} \cdots \frac{m-1}{\alpha+m-1} \frac{m}{\alpha+\beta+m} \cdots \frac{n}{\alpha+\beta+n}. \end{aligned} \tag{16}$$

Замечание 2. С помощью представления 4 удобно получать корреляционные соотношения, связывающие равномерные порядковые статистики. Например, если $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} E(U_{k,n} | U_{m,n} = x) &= E\left(\frac{S_k}{S_{n+1}} | \frac{S_m}{S_{n+1}} = x\right) = kE\left(\frac{\xi_1}{S_{n+1}} | \frac{S_m}{S_{n+1}} = x\right) = \\ &= \frac{k}{m} E\left(\frac{S_m}{S_{n+1}} | \frac{S_m}{S_{n+1}} = x\right) = \frac{kx}{m}. \end{aligned} \tag{17}$$

Если $1 \leqslant m < k \leqslant n$, то чуть более сложные выкладки, использующие представление 4, позволяют получить равенство

$$E(U_{k,n} | U_{m,n} = x) = \frac{(n+1-k)x}{n+1-m} + \frac{k-m}{n+1-m}. \tag{18}$$

Отметим, что еще проще для получения соотношения (18) использовать тот факт, что $U([0,1])$-распределение симметрично относительно точки $1/2$. Поэтому можно воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} E(U_{k,n} | U_{m,n} = x) &= E(1 - U_{n-k+1,n} | (1 - U_{n-m+1}) = x) = \\ &= 1 - E(U_{n-k+1,n} | U_{n-m+1} = 1 - x), \end{aligned}$$

и, поскольку теперь $n-k+1 < n-m+1$, можно просто использовать соотношение (17), в котором в качестве k нужно взять $n-k+1$, а вместо m подставить $n-m+1$. В этой ситуации $n-k+1 < n-m+1$. Получим

$$E(U_{k,n} | U_{m,n} = x) = 1 - E(U_{n-k+1,n} | U_{n-m+1,n} = x) = \frac{(n+1-k)x}{n+1-m} + \frac{k-m}{n+1-m}.$$

Замечание 3. Близко к представлению 4 следующее соотношение для рассматриваемых равномерных порядковых статистик, в котором уже фигурируют условные распределения сумм $S_1, S_2, \dots, S_n$ при условии, что зафиксирована сумма S_{n+1}:

$$\{U_{1,n}, U_{2,n}, \dots, U_{n,n}\} \stackrel{d}{=} \{S_1, S_2, \dots, S_n | S_{n+1} = 1\}, n = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Рассмотрим теперь представление 2. Аналогичный метод, связанный с применением преобразования Смирнова, позволяет, учитывая равенство

$$1 - \exp(-\xi) \stackrel{d}{=} U \stackrel{d}{=} 1 - U,$$

получить соответствующий результат в случае исходного $U([0,1])$-равномерного распределения.

Представление 5. *Для рекордных величин $U(1) < U(2) < \ldots < U(n)$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$\{U(1), U(2), \ldots, U(n)\} \stackrel{d}{=} \{1 - V_1, 1 - V_1V_2, \ldots, 1 - V_1V_2 \ldots V_n\}, \tag{20}$$

где $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — независимые случайные величины, также имеющие $U([0,1])$-распределение.

Замечание 4. Правая часть этого представления принимает более простой вид, если его формулировать для нижних рекордов $u(1) > u(2) > \ldots > u(n) > \ldots$, соответствующих $U([0,1])$-распределению. В этом случае получаем

$$\{u(1), u(2), \ldots, u(n)\} \stackrel{d}{=} \{V_1, V_1V_2, \ldots, V_1V_2 \ldots V_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Следствие 3. *Из соотношений* (20) *и* (21) *сразу получаем*

$$E(U(n)) = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad E(u(n)) = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Следствие 4. *Для $n > m$ выполняются равенства*

$$E(U(n)|U(m) = x) = E((1 - V_1V_2 \ldots V_n)|V_1V_2 \ldots V_m = 1 - x) =$$
$$= 1 - (1 - x)E(V_{m+1}V_{m+2} \ldots V_n) = 1 - \frac{1 - x}{2^{n-m}}, \quad 0 < x < 1, \tag{23}$$

и

$$E(u(n)|u(m) = x) = E((V_1V_2 \ldots V_n)|V_1V_2 \ldots V_m = x) = \frac{x}{2^{n-m}}, \quad 0 < x < 1. \tag{24}$$

При изучении рекордных величин полезным является следующий результат (см., например, [3] или [6]).

Теорема 1. *Условное распределение рекордных величин $X(1)$, $X(2), \ldots,$ $X(m-1)$, $X(m+1)$, $X(m+2), \ldots, X(n)$, соответствующих распределению с непрерывной ф. р. $F(x)$, при условии, что зафиксирована рекордная величина $X(m) = z$, совпадает с безусловным распределением вектора*

$$\{Y_{1,m-1}, Y_{2,m-1}, \ldots, Y_{m-1,m-1}, V(1), V(2), \ldots, V(n-m)\},$$

элементами которого являются порядковые статистики $Y_{1,m-1}$, $Y_{2,m-1}, \ldots,$ $Y_{m-1,m-1}$, построенные по исходной ф. р. $R(x,z) = F(y)/F(z)$, $y \leqslant z$, и рекордные величины $V(1) < V(2) < \ldots < V(n-m)$, соответствующие ф. р. $W(x,z) = (F(x) - F(z))/(1 - F(z))$, $x > z$.

Следствие 5. *Условное распределение рекордных величин $U(1) < U(2) < \ldots < U(n-1)$ при условии, что зафиксировано значение $U(n) = x$, совпадает с распределением вектора*

$$\{xU_{1,n-1}, xU_{2,n-1}, \ldots, xU_{n-1,n-1}\},$$

в котором $U_{1,n-1}, U_{2,n-1}, \dots, U_{n-1,n-1}$ — порядковые статистики для $U([0,1])$-равномерного распределения.

Из результата, приведенного в следствии 5, получаем, например, что для любых $1 \leqslant m \leqslant n$ выполняется равенство

$$E(U(m)|U(n)=x) = xE(U_{m,n-1}) = \frac{xm}{n}, \quad 0<x<1. \tag{25}$$

3. Представления, описывающие совместное поведение экспоненциальных порядковых статистик и рекордов. Видим, что представление 1 и следствия из него помогают развить методы работы с достаточно широким классом порядковых статистик для всевозможных непрерывных распределений. С помощью представления 2 удается получить результаты для различных схем, в которых задействованы рекорды. Поскольку порядковые статистики и рекордные величины являются родственными объектами, полезно было бы иметь аналогичные представления, в которых уже бы описывалось совместное поведение этих двух типов упорядоченных случайных величин. Ниже будут приведены для простейших случаев такого рода представления, в которых участвуют экспоненциальные порядковые статистики и экспоненциальные рекордные величины.

Вначале рассмотрим самую простую схему, в которой будет фигурировать порядковая статистика $Z_{1,1} = Z_1$ и набор из n экспоненциальных рекордных величин $Z_1 = Z(1) < Z(2) < \dots < Z(n)$. Для любого $n = 1, 2, \dots$ получаем

$$\{Z_{1,1}, Z(1), Z(2), \dots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \{\xi_1, \xi_1, \xi_1+\xi_2, , \dots, \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_{n-1}+\xi_n\}. \tag{26}$$

Перейдем к набору из величин $Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, Z(1), Z(2), \dots, Z(n)$, построенному по исходной последовательности независимых $E(1)$-распределенных с. в. $Z_1, Z_2, \dots$ Здесь важно соотношение между первыми двумя величинами этой последовательности. Рассмотрим события $Z_1 < Z_2$ и $Z_1 > Z_2$. Равенством $Z_1 = Z_2$, которое имеет место с нулевой вероятностью, можно пренебречь. Пусть υ — индикатор события $Z_1 > Z_2$, т. е. $\upsilon = 1$, если $Z_1 > Z_2$, и $\upsilon = 0$, если $Z_1 < Z_2$. Очевидно, что в данном случае $P\{\upsilon = 1\} = P\{\upsilon = 0\} = 1/2$. Нетрудно убедиться, что условное распределение вектора $\{Z_{1,2}, Z_{2,2}\}$, как при условии $Z_1 < Z_2$, так и при условии $Z_1 > Z_2$, совпадает с безусловным распределением этого вектора и, следовательно,

$$\{Z_{1,2}, Z_{2,2}|\upsilon=0\} \stackrel{d}{=} \{Z_{1,2}, Z_{2,2}|\upsilon=1\} \stackrel{d}{=} \{Z_{1,2}, Z_{2,2}\} \stackrel{d}{=} \left\{\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1}{2}+\xi_2\right\}. \tag{27}$$

В ситуации, когда $Z_1 < Z_2$ и $\upsilon = 0$, получаем, что $Z_{1,1} = Z(1) = Z_1$ совпадают с порядковой статистикой $Z_{1,2}$, для которой в терминах $E(1)$-экспоненциальных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ справедливо представление $Z_{1,2} \stackrel{d}{=} \xi_1/2$. В этом случае $Z(2) = Z_2 = Z_{2,2} \stackrel{d}{=} \xi_1/2 + \xi_2$. При этом соотношении $Z_1 < Z_2$ распределение рекордных величин $Z(3) < Z(4) < \dots < Z(n)$, как это следует из представления 2, совпадает с распределением вектора

$$\{Z(2)+\xi_4, Z(2)+\xi_4+\xi_5, \dots, Z(2)+\xi_4+\xi_5+\dots+\xi_{n+1}\}.$$

Здесь нумерация слагаемых ξ изменена (по сравнению с представлением 2) для удобства формулирования окончательного результата. С учетом $Z(2) \stackrel{d}{=} \xi_1/2 + \xi_2$ получаем, что в условиях, когда выполняется неравенство $Z_1 < Z_2$, которое соответствует также равенству $\upsilon = 0$, справедливо соотношение

$$\{Z(1), Z(2), Z(3), \dots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \xi_4, \dots, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \xi_4 + \ \dots \ + \xi_{n+1} \right\}. \quad (28)$$

Во второй ситуации, когда $\upsilon = 1$, получаем

$$Z_{1,1} = Z(1) = Z_{2,2} \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1}{2} + \xi_2.$$

Тогда распределение остальных рекордов $Z(2), Z(3), \dots, Z(n)$ можно выразить как распределение вектора

$$\{Z(1) + \xi_3, Z(1) + \xi_3 + \xi_4, \dots, Z(1) + \xi_3 + \xi_4 + \ \dots \ + \xi_{n+1}\},$$

т. е. в этом случае будем иметь

$$\{Z(1), Z(2), Z(3), \dots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \xi_3, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \dots, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \ \dots \ + \xi_{n+1} \right\}. \quad (29)$$

Объединяя две ситуации, когда $\upsilon = 0$ и $\upsilon = 1$, получаем следующий результат.

Представление 6. *Для любого $n = 3, 4, \dots$ распределение вектора $\{Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, Z(1), Z(2), Z(3), \dots, Z(n)\}$ совпадает с распределением вектора*

$$\left\{ \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 + \xi_4, \dots, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 + \xi_4 + \ \dots \ + \xi_{n+1} \right\}, \quad (30)$$

в котором $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ — независимые $E(1)$-распределенные случайные величины и индикатор υ не зависит от с. в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$.

Замечание 5. Если $n = 1$, то выполняется

$$\{Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, Z(1)\} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2 \right\}, \quad (31)$$

а при $n = 2$ справедливо соотношение

$$\{Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, Z(1), Z(2)\} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \upsilon\xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 \right\}. \quad (32)$$

Замечание 6. Как уже отмечалось выше, представление Смирнова позволяет результаты, полученные для одного какого-то распределения, переформулировать для другого распределения. Можно использовать тот факт, что имеет место равенство

$$1 - \exp\{-Z_k\} \stackrel{d}{=} U_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $U_1, U_2, \ldots$ — независимые $U([0,1])$-распределенные случайные величины и соответственно
$$1-\exp\{-Z_{k,n}\} \stackrel{d}{=} U_{k,n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n=1,2,\ldots,$$
а
$$1-\exp\{-Z(n)\} \stackrel{d}{=} U(n), \quad n=1,2,\ldots$$
Тогда из равенства (30), применяя к его левой и правой частям указанное преобразование, получаем соотношение, позволяющее совместное распределение порядковых статистик $U_{1,1}, U_{1,2}, U_{2,2}$ и рекордных величин $U(1) < U(2) < \ldots < U(n)$ выразить следующим образом:
$$\begin{aligned}\{U_{1,1}, U_{1,2}, U_{2,2}, U(1), U(2), U(3), \ldots, U(n)\} &\stackrel{d}{=} \\ \stackrel{d}{=} \big\{1-U_1^{1/2}(1-\upsilon+\upsilon U_2), 1-U_1^{1/2}, 1-U_1^{1/2}U_2, 1-U_1^{1/2}(1-\upsilon+\upsilon U_2),& \\ 1-U_1^{1/2}U_2(1-\upsilon+\upsilon U_3), 1-U_1^{1/2}U_2(1-\upsilon+\upsilon U_3)U_4, \ldots,& \\ 1-U_1^{1/2}U_2(1-\upsilon+\upsilon U_3)U_4\ldots U_{n+1}\big\}, \quad n=3,4,\ldots,& \end{aligned} \tag{33}$$
где индикатор υ и с. в. $U_1, U_2, \ldots$ независимы.

Перейдем теперь к существенно более громоздкому построению, в котором наряду с экспоненциальными рекордными величинами $Z(1) < Z(2) < \ldots < Z(n)$ будут участвовать и порядковые статистики $Z_{1,3} \leqslant Z_{2,3} \leqslant Z_{3,3}$. В этом случае придется иметь дело не с двумя $Z_1 < Z_2$ и $Z_1 > Z_2$, а с шестью событиями
$$A_1=\{Z_1<Z_2<Z_3\}, \quad A_2=\{Z_1<Z_3<Z_2\}, \quad A_3=\{Z_2<Z_1<Z_3\},$$
$$A_4=\{Z_2<Z_3<Z_1\}, \quad A_5=\{Z_3<Z_1<Z_2\}, \quad A_6=\{Z_3<Z_2<Z_1\}$$
и с шестью индикаторами $I_k, 1 \leqslant k \leqslant 6$, которые равны единице, если соответствующее событие A_k имеет место, и равны нулю в противном случае. Видим, что выполняется
$$P\{I_k=1\}=1-P\{I_k=0\}=P\{A_k\}=\frac{1}{6}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 6.$$
Отметим также, что $I_1+I_2+\ldots+I_6=1$. Как и в случае с двумя экспоненциальными статистиками, условное распределение вектора $\{Z_{1,3}, Z_{2,3}, Z_{3,3}\}$ при условии, что имеет место любое из событий $A_k, 1 \leqslant k \leqslant 6$, совпадает с безусловным распределением этого вектора. Следовательно, будем иметь
$$\{Z_{1,3}, Z_{2,3}, Z_{3,3}|A_k\} \stackrel{d}{=} \left\{\frac{\xi_1}{3}, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}+\xi_3\right\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 6. \tag{34}$$

Далее нужно подробно рассматривать по отдельности каждое из шести событий A_k. Ограничимся здесь для краткости событиями A_1 и A_6. С остальными четырьмя событиями нужно действовать по той же схеме. Если, например, имеем дело с событием $A_1=\{Z_1<Z_2<Z_3\}$, то в этом случае $Z(1)=Z_{1,3}=Z_1$, $Z(2)=Z_{2,3}$, $Z(3)=Z_{3,3}$. Тогда условное распределение вектора $\{Z(1), Z(2), Z(3), Z(4), \ldots, Z(n)\}$, при условии, что $I_1=1$, совпадает с распределением вектора
$$\left\{\frac{\xi_1}{3}, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}+\xi_3, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}+\xi_3+\xi_6, \ldots, \frac{\xi_1}{3}+\frac{\xi_2}{2}+\xi_3+\xi_6+\ldots+\xi_{n+2}\right\}. \tag{35}$$

Напоминаем, что нумерация независимых $E(1)$-распределенных слагаемых ξ здесь и ниже выбрана так, чтобы было удобно сформулировать окончательный результат. Рассмотрим событие $A_6 = \{Z_3 < Z_2 < Z_1\}$. В этом случае имеем

$$Z_{1,3} = Z_3, \quad Z_{2,3} = Z_2, \quad Z_{3,3} = Z_1 = Z(1) \stackrel{d}{=} \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3,$$

а вектор $Z(2), Z(3), \ldots, Z(n)$ будет иметь такое же распределение, как и вектор

$$\{Z(1) + \xi_4, Z(1) + \xi_4 + \xi_5, \ldots, Z(1) + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \ldots + \xi_{n+2}\}.$$

Следовательно, при условии $I_6 = 1$ получаем, что условное распределение вектора $Z(1), Z(2), Z(3), Z(4), \ldots, Z(n)$ совпадает с безусловным распределением вектора

$$\left\{\frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + \xi_4, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \ldots + \xi_{n+2}\right\}. \quad (36)$$

Соотношения, аналогичные равенствам (35) и (36), таким же образом выписываются для оставшихся событий A_2, A_3, A_4 и A_5. Собирая вместе все шесть подобных равенств, определяемых событиями A_k, $1 \leqslant k \leqslant 6$, приходим к следующему результату.

Представление 7. *Для порядковых статистик $Z_{1,3}, Z_{2,3}, Z_{3,3}$ и рекордных величин $Z(1) < Z(2) < \ldots < Z(n)$ при любом $n = 3, 4, \ldots$ справедливо соотношение*

$$\{Z_{1,3}, Z_{2,3}, Z_{3,3}, Z(1), Z(2), Z(3), \ldots, Z(n)\} \stackrel{d}{=}$$
$$\stackrel{d}{=} \left\{\frac{\xi_1}{3}, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3, \frac{\xi_1}{3} + (I_3 + I_4 + I_5 + I_6)\frac{\xi_2}{2} + (I_4 + I_6)\xi_3, \right.$$
$$\frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + (I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)\xi_3 + (I_4 + I_6)\xi_4,$$
$$\frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + (I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)\xi_4 + (I_4 + I_6)\xi_5, \ldots,$$
$$\left. \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3 + (I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)\xi_4 + (I_4 + I_6)\xi_5 + \xi_6 + \ldots + \xi_{n+2}\right\}, \quad (37)$$

в котором $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ — независимые $E(1)$-распределенные случайные величины, а индикаторы I_2, I_3, I_4, I_5 и I_6 не зависят от с. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$.

Замечание 7. Равенство (37) можно немного упростить, заменив суммы индикаторов $I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ и $I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ величинами $(1 - I_1)$ и $(1 - I_1 - I_2)$ соответственно. В приведенной формулировке эти индикаторы подчеркивают, откуда соответствующее ξ_k попадает в правую часть соотношения (37).

Дополним результат, приведенный выше, еще одним равенством для порядковых статистик $Z_{1,1}$, $Z_{1,2}$, $Z_{2,2}$, $Z_{1,3}$, $Z_{2,3}$ и $Z_{3,3}$, полученным тем же методом.

Представление 8. *Справедливо соотношение*

$$\{Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, Z_{1,3}, Z_{2,3}, Z_{3,3}\} \stackrel{d}{=} \left\{\frac{\xi_1}{3} + (I_3 + I_4 + I_5 + I_6)\frac{\xi_2}{2} + \right.$$

$$+ (I_4 + I_6)\xi_3, \frac{\xi_1}{3} + (I_5 + I_6)\frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + (I_2 + I_4 + I_5 + I_6)\xi_3,$$

$$\left.\frac{\xi_1}{3}, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{2} + \xi_3\right\}. \quad (38)$$

Замечание 8. Отметим, что в представлениях 7 и 8 с. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ не зависят от индикаторов, но сами индикаторы, связанные равенством $I_1 + I_2 + \ldots + I_6 = 1$, представляют собой зависимые случайные величины.

Замечание 9. Приведенные результаты показывают, какие методы нужно использовать, чтобы получить совместные соотношения, связывающие порядковые статистики и рекорды, но становится ясным, что теоремы, в формулировках которых могли бы быть представлены не три, как выше, а четыре экспоненциальные порядковые статистики $Z_{1,4}$, $Z_{2,4}$, $Z_{3,4}$ и $Z_{4,4}$, потребуют рассмотрения уже 24 различных перестановок с. в. Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4. Если же сделать попытку связать с рекордами пять порядковых статистик $Z_{1,5} \leqslant \ldots \leqslant Z_{5,5}$, то необходимо вводить уже $5! = 120$ индикаторов, соответствующих различным перестановкам с. в. Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и Z_5.

Вернемся к приведенным выше результатам. Они, несмотря на свою громоздкость, позволяют достаточно просто получать полезные следствия. Проиллюстрируем это утверждение несколькими простыми примерами.

Пример 1. Из представления 6 можно, например, сразу получить, что ковариация $\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{2,2}, \mathrm{Z}(\mathrm{n}))$ и коэффициент корреляции $\rho(Z_{2,2}, Z(n))$ имеют вид

$$\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{2,2}, \mathrm{Z}(\mathrm{n})) = \mathrm{cov}\left(\frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 + \xi_4 + \ldots + \xi_{\mathrm{n}+1}\right) =$$

$$\mathrm{cov}\left(\frac{\xi_1}{2} + \xi_2, \frac{\xi_1}{2} + \xi_2\right) = \mathrm{D}\left(\frac{\xi_1}{2} + \xi_2\right) = \frac{5}{4},$$

$$\rho(Z_{2,2}, Z(n)) = \left(\frac{5}{4n}\right)^{1/2}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Аналогично получаем

$$\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{2,2}, \mathrm{Z}(1)) = \mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{2,2}, \mathrm{Z}_1) = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Пример 2. Представление 7 позволяет показать справедливость следующих соотношений:

$$\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{3,3}, \mathrm{Z}(1)) = \mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{3,3}, \mathrm{Z}_1) = \frac{11}{18},$$

$$\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{3,3}, \mathrm{Z}(2)) = \frac{43}{36},$$

$$\mathrm{cov}(\mathrm{Z}_{3,3}, \mathrm{Z}(\mathrm{n})) = \frac{49}{36}, \qquad \mathrm{n} = 3, 4, \ldots$$

Учитывая, что $D(Z_{3,3}) = 49/36$, а $D(Z(n)) = n$, $n = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\rho(Z_{3,3}, Z(1)) = \frac{11}{21}, \qquad \rho(Z_{3,3}, Z(2)) = \frac{43}{42\sqrt{2}}$$

и

$$\rho(Z_{3,3}, Z(n)) = \frac{7}{6\sqrt{n}}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Пример 3. Из представления 8 получаем среди прочих следующие моментные характеристики:

$$\rho(Z_{1,3}, Z_1) = \frac{1}{9}, \quad \rho(Z_{2,3}, Z_1) = \frac{5}{18}, \quad \rho(Z_{2,2}, Z_{3,3}) = \frac{37}{7\sqrt{13}}.$$

4. Регрессионные соотношения, связывающие порядковые статистики и рекордные величины. Рассматривая по отдельности порядковые статистики и рекорды, можно было выяснить (см., например, следствия 1, 4, 5 и замечание 2), что порядковые статистики в случае экспоненциального и равномерного распределений связаны различными линейными регрессионными соотношениями, равно как и аналогичные рекордные величины. Поэтому интересно посмотреть, распространяется ли свойство линейности регрессии на совместные взаимоотношения порядковых статистик и рекордов. Предлагаем некоторые простые соотношения подобного вида, которые можно получить, опираясь на приведенные выше представления 6 и 7.

Следствие 6. *Из представления 6 следует, что при $n = 2, 3, \ldots$ и $x > 0$ справедливы равенства*

$$E(Z(n)|Z_{1,2} = x) = E\left(\left(\frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 + \xi_4 + \ \ldots \ + \xi_{n+1}\right) | \frac{\xi_1}{2} = x\right) =$$
$$= x + 1 + \frac{1}{2} + (n-2) = x + n - \frac{1}{2},$$

$$E(Z(n)|Z_{2,2} = x) = E\left(\left(\frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \upsilon\xi_3 + \xi_4 + \ \ldots \ + \xi_{n+1}\right) | \frac{\xi_1}{2} + \xi_2 = x\right) = x + n - \frac{3}{2}.$$

Аналогично, пользуясь представлением 7, получаем для $x > 0$ и $n = 3, 4, \ldots$ следующие (также линейные) регрессионные соотношения:

$$E(Z(n)|Z_{1,3} = x) = x + n - \frac{1}{3}, \quad E(Z(n)|Z_{2,3} = x) = x + n - \frac{5}{6},$$

$$E(Z(n)|Z_{3,3} = x) = x + n - \frac{11}{6}.$$

В качестве примера можно привести еще один результат, получаемый из равенства (33):

$$E(U(n)|U_{2,2} = x) = 1 - \frac{3(1-x)}{2^n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Литература

1. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B.* Order Statistics. Examples and Exercises. New York: Nova Science Publishers, 2005. 236 p.

2. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Shakil M.* An introduction to order statistics. Atlantis Press, 2013. 244 p.

3. *Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N.* Records. New York: John Wiley & Sons, 1998. 312 p.

4. *Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N.* A first course in order statistics. New York: John Wiley & Sons, 1998. 277 p.

5. *David H. A., Nagaraja H. N.* Order statistics. Third edition. New York: John Wiley & Sons, 2003. 458 p.

6. *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000. 244 с.

7. *Sukhatme P. V.* Tests of significance for samples of the χ^2-population with two degrees of freedom // Ann. Eugen. 1937. N 8. P. 52–56.

8. *Chandler K. N.* The distribution and frequency of record values // J. R. Stat. Soc., Ser. B. 1952. Vol. 14. P. 220–228.

9. *Foster F. G., Stuart A.* Distribution free tests in time-series band on the breaking of records // J. Royal Statist. Soc. 1954. B16, N 1. P. 1–22.

10. *Foster F. G., Teichroew D.* A sampling experiment on the powers of the records tests for trend in a time series // J. Royal Statist. Soc. 1955. B17. P. 115–121.

11. *Renyi A.* Theorie des elements saillants d'une suite d'observations. Colloquim on combinatorial methods in probability theory, Math. Inst., Aarhus Univ., Aarhus, Denmark. August 1–10. 1962. P. 104–117; см. также: Selected papers of Alfred Renyi, vol. 3 (1976), Akademiai Kiado, Budapest. P. 50–65.

12. *Stuart A.* The efficiency of the record test for trend in normal regression // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1957. Vol. 19. P. 149–153.

13. *Malmquist S.* On a property of order statistics from a rectangular distribution // Scand. Aktuar. 1950. Vol. 33. P. 214–222.

14. *Lurie D., Hartley H. O.* Machine-Generation of Order Statistics for Monte Carlo Computations // The American Statistician. 1972. Vol. 26, N 1. P. 26–27.

Статья поступила в редакцию 18 апреля 2016 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р е

Невзоров Валерий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор; vanev@mail.ru

REPRESENTATIONS OF ORDERED RANDOM VARIABLES IN THE TERMS OF SUMS OR PRODUCTS OF INDEPENDENT VARIABLES

Valery B. Nevzorov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vanev@mail.ru

The review of the existing presentations, which allow to express such dependent ordered variables as order statistics and records as the sums of independent summands or as the products of independent random multipliers, is given. Some new relations of the analogous form, which express the common distributions of representatives of these two types of ordered random variables, are also obtained. Refs 14.

Keywords: ordered random variables, order statistics, record values, exponential distribution, uniform distribution.

References

1. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., *Order Statistics. Examples and Exercises* (Nova Science Publishers, New York, 2005, 236 p.).

2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Shakil M., *An introduction to order statistics* (Atlantis Press, 2013, 244 p.).

3. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N., *Records* (John Wiley & Sons, New York, 1998, 312 p.).

4. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N., *A first course in order statistics* (John Wiley & Sons, New York, 1998, 277 p.).

5. David H. A., Nagaraja H. N., *Order statistics. Third edition* (John Wiley & Sons, New York, 2003, 458 p.).

6. Nevzorov V. B., *Records. Mathematical theory* (Phasis, Moscow, 2000). English translation in: Translations of Mathematical Monographs, American Math. Society, 2001, **194**.

7. Sukhatme P. V., "Tests of significance for samples of the χ^2-population with two degrees of freedom", *Ann. Eugen.* N 8, 52–56 (1937).

8. Chandler K. N., "The distribution and frequency of record values", *J. R. Stat. Soc., Ser. B* **14**, 220–228 (1952).

9. Foster F. G., Stuart A., "Distribution free tests in time-series band on the breaking of records", *J. Royal Statist. Soc.* B16, N 1, 1–22 (1954).

10. Foster F. G., Teichroew D., "A sampling experiment on the powers of the records tests for trend in a time series", *J. Royal Statist. Soc.* B17, 115–121 (1955).

11. Renyi A., *Theorie des elements saillants d'une suite d'observations. Colloquim on combinatorial methods in probability theory* Math. Inst., Aarhus Univ., Aarhus, Denmark, August 1–10, 104–117 (1962); See also: *Selected papers of Alfred Renyi* **3**, 50–65 (Akademiai Kiado, Budapest, 1976).

12. Stuart A., "The efficiency of the record test for trend in normal regression", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **19**, 149–153 (1957).

13. Malmquist S., "On a property of order statistics from a rectangular distribution", *Scand. Aktuar.* **33**, 214–222 (1950).

14. Lurie D., Hartley H. O., "Machine-Generation of Order Statistics for Monte Carlo Computations", *The American Statistician* **26**(1), 26–27 (1972).

Для цитирования: Невзоров В. Б. Представления упорядоченных случайных величин в виде сумм или произведений независимых величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 627–640. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.412

For citation: Nevzorov V. B. Representations of ordered random variables in the terms of sums or products of independent variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 627–640. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.412