МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О «ПАРКОВКЕ»

С. М. Ананьевский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В известной задаче о «парковке» венгерского математика Реньи, изучается асимптотика математического ожидания числа открытых единичных интервалов, случайным образом заполняющих отрезок большой длины. При этом длина заполняемого отрезка неограниченно возрастает.

В настоящей работе рассматриваются обобщения данной задачи в двух направлениях. Первое направление — это случай, когда длина размещаемых интервалов имеет случайный характер. В отличие от оригинальной постановки задачи, в работе изучается как поведение математического ожидания числа размещенных интервалов, так и поведение математического ожидания меры заполненной части большого отрезка. Второе направление относится к случаю, когда распределение местоположения размещаемых интервалов единичной длины отлично от равномерного, что предполагается в классической задаче о «парковке». Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: случайное заполнение, задача о «парковке», асимптотика математического ожидания.

Введение. Задача случайного заполнения отрезка интервалами (первоначальное название — задача о «парковке») впервые была рассмотрена А. Реньи [1]. В задаче рассматривается следующий процесс. На улице длины x случайным образом располагается автомобиль длины 1. Если $x < 1$, процесс парковки заканчивается, если же $x \geq 1$, первый автомобиль занимает место $(t, t+1)$, разбивая улицу на два свободных участка $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Случайная величина t имеет равномерный закон распределения на отрезке $[0, x-1]$. После постановки первого автомобиля образовавшиеся свободные участки $[0, t]$ и $[t+1, x]$ заполняются по тому же правилу независимо друг от друга. Общее число расположившихся автомобилей после окончания процесса заполнения улицы обозначим через N_x. Реньи показал [1], что математическое ожидание числа разместившихся автомобилей удовлетворяет соотношению

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}) \qquad (x \to \infty) \tag{1}$$

при любом $n \geq 1$.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.401

При этом им была вычислена константа

$$\lambda = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right\}dt \approx 0.748.$$

Позднее, в работах П. Нея [2], Дворецкого и Роббинса [3], изучались моменты более старших порядков величины N_x.

В данной работе рассматриваются обобщения классической задачи о «парковке» в двух направлениях.

(I) Рассматривается задача о «парковке», когда длина размещаемых автомобилей является случайной величиной (в настоящее время существует довольно большое разнообразие автомобилей по длине), при этом закон размещения равномерный. Такой постановке задачи можно придать следующую интерпретацию: на линейном носителе записывается приходящая информация, каждый кусок которой занимает случайное место и имеет случайную длину.

(II) Рассматривается задача о «парковке», когда размещаемые автомобили попрежнему имеют единичную длину, а закон их случайного расположения отличен от равномерного.

Основные результаты. Рассмотрим эти два направления.

(I) На отрезок $[0, x]$ случайным образом будем размещать интервалы длины l, где l является случайной величиной. Будем предполагать, что существуют такие числа a и b ($0 < a < b < \infty$), что $P(a \le l \le b) = 1$. Если длина первого интервала l больше x, то процесс размещения на этом отрезке заканчивается, если же длина первого интервала l меньше или равна x, то на отрезке $[0, x-l]$ выбираем точку t, где t — случайная величина с равномерным законом распределения на $[0, x-l]$, и размещаемый интервал занимает место $(t, t+l)$. Свободными для дальнейшего заполнения будут отрезки $[0, t]$ и $[t+l, x]$, которые заполняются по такому же правилу независимо друг от друга.

Поскольку $P(l \ge a > 0) = 1$, процесс заполнения обязательно закончится. Нас будут интересовать две величины: N_x — число разместившихся интервалов на отрезке $[0, x]$ и M_x — мера заполненного множества на том же отрезке. Заметим, что в случае $P(l = 1) = 1$ эти величины совпадают. В работе будем интересоваться математическими ожиданиями EN_x и EM_x, а именно их асимптотическим поведением при неограниченном увеличении отрезка $[0, x]$. В частности, нам важно получить значения констант в асимптотике. Отметим, что случай двухточечного распределения случайной длины размещаемых интервалов рассмотрен в работах [4] и [5].

Теорема 1. *Для описанного выше процесса заполнения справедливы соотношения*

$$EN_x = \lambda E\frac{1}{l}x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{2}$$

$$EM_x = \lambda x + \lambda El - El + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{3}$$

где c — некоторая константа, зависящая от El, а λ — константа Реньи, присутствующая в (1).

(II) Рассмотрим несколько задач, связанных со случайным заполнением отрезка большой длины единичными интервалами в случаях, когда закон расположения интервалов отличен от равномерного.

Общая постановка задачи следующая. На отрезок $[0, x]$, если $x \geq 1$, в соответствии с законом распределения F_x помещаем интервал длины 1, который занимает место $(t, t+1)$. Этот интервал разбивает отрезок на 2 части $[0, t]$ и $[t+1, x]$, которые в дальнейшем заполняются независимо друг от друга согласно законам F_t и F_{x-t-1} соответственно. Если же $x < 1$, процесс заполнения будет закончен. Как и прежде, N_x будет обозначать общее число разместившихся интервалов на отрезке $[0, x]$. Мы, в частности, будем интересоваться существованием величины

$$\lim_{x\to\infty} \frac{EN_x}{x}$$

и, в случае существования, ее значением. Следует отметить, что данный предел не всегда существует, что показывает пример с законом распределения F_x, при котором размещаемый интервал всегда располагается в середине отрезка. В этом случае существуют

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{EN_x}{x} = \frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad \limsup_{x\to\infty} \frac{EN_x}{x} = 1.$$

(IIa) Рассмотрим следующую задачу. Введем семейство функций $\{p_x\}(x \geq 0)$, являющихся плотностями вероятностных распределений, удовлетворяющих условиям

$$p_1(t) + p_1(1-t) = 2 \quad \text{при} \quad t \in [0,1] \quad \text{и} \quad p_1(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin [0,1].$$

Положим

$$p_x(t) = \frac{1}{x} p_1\left(\frac{t}{x}\right) \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{и} \quad p_0(0) = 1.$$

Далее на отрезок $[0, x+1]$ поместим интервал $(t, t+1)$, где t — случайная величина, имеющая плотность распределения p_x, удовлетворяющую равенствам

$$p_x(u) + p_x(x-u) = \frac{2}{x} \quad \text{при} \quad u \in [0,x] \quad \text{и} \quad p_x(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \notin [0,x].$$

Таким образом, закон распределения F_{x+1} будет иметь плотность p_x. Этот случай включает в себя все ситуации, когда плотность p_x является линейной функцией на отрезке $[0, x]$ и, в частности, классическую постановку задачи, рассмотренную Реньи. Заметим, что в качестве функции p_x можно выбрать любую функцию, удовлетворяющую введенным условиям, график которой центрально-симметричен относительно точки $(0; 1/x)$.

Теорема 2. *При сделанных предположениях на закон распределения F_x выполняется равенство*

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{4}$$

где λ — константа из (1).

(IIb) В следующей задаче закон распределения F_x будет иметь плотность распределения

$$q_x(u) = \frac{1}{(x-1-2\varepsilon)} \quad \text{для} \quad u \in [\varepsilon, x-1-\varepsilon] \quad \text{и} \quad q_x = 0 \quad \text{для} \quad u \notin [\varepsilon, x-1-\varepsilon]$$

при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$.

На языке задачи о «парковке» это означает, что автомобили располагаются на расстоянии друг от друга не ближе, чем ε.

Теорема 3. *В вышеописанном случае для любого* $n \geq 1$ *справедливо соотношение*

$$EN_x = \frac{\lambda}{1+\varepsilon}x + \lambda - \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} + o(x^{-n}) \qquad (x \to \infty). \tag{5}$$

Здесь, так же как и раньше, λ *— константа из* (1).

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Докажем вначале соотношение (2). Пусть первым появился интервал длины l и его левый конец находится в точке t. Обозначив через $N_{x+l} \mid l, t$ число разместившихся интервалов на отрезке $[0, x+l]$ при условии, что первый интервал имеет длину l и занимает место $(t, t+l)$, можем составить равенство

$$N_{x+l} \mid l, t = N_t \mid l + N_{x-t} \mid l.$$

Тогда будем иметь

$$EN_{x+l} \mid l = \frac{1}{x}\int\limits_0^x EN_t \mid l dt + \frac{1}{x}\int\limits_0^x EN_{x-t} \mid l dt + 1,$$

где $N_x \mid l$ обозначает число разместившихся интервалов на отрезке $[0, x]$ при условии, что длина первого интервала равна l. Введем обозначение $n(x) = EN_x \mid l$ и получим равенство

$$n(x+l) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x n(t)dt + \frac{1}{x}\int\limits_0^x n(x-t)dt + 1 = \frac{2}{x}\int\limits_0^x n(t)dt + 1.$$

Функция $n(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$n(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < l \quad \text{и} \quad n(l) = 1; \tag{6}$$

$$n(x+l) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x n(t)dt + 1. \tag{7}$$

Введем новую функцию $\nu(x) = n(lx) + 1$, для которой равенство (7) перепишется в виде

$$\nu(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x \nu(t)dt, \tag{8}$$

а начальные условия (6) примут вид

$$\nu(x) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{и} \quad \nu(1) = 2. \tag{9}$$

Для дальнейшего доказательства воспользуемся результатом, являющимся частным случаем теоремы 1 из [3], который сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geq 0$ следующим образом:*

$$f(x) = 1 \quad \textit{при} \quad 0 \leq x < 1 \quad \textit{и} \quad f(1) = 2; \tag{10}$$

$$f(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \quad \textit{для} \quad x > 0. \tag{11}$$

Тогда будет выполняться равенство

$$f(x) = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty), \tag{12}$$

где c — любая константа, удовлетворяющая неравенству $c \geq 2e$, а λ — константа из (1).

Продолжая доказательство теоремы, замечаем, что для функции $\nu(x)$ выполнены условия леммы, следовательно, будем иметь

$$\nu(x) = \lambda x + \lambda + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Отсюда следует

$$n(x) = \lambda\frac{1}{l}x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{cl}{x}\right)^{\frac{x}{l}-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

учитывая $P(a \leq l \leq b) = 1$ и $EN_x = E(EN_x \mid l) = En(x)$, получаем утверждение (2).

Далее покажем справедливость утверждения (3).

Введем обозначение $M_x \mid l, t$ — лебегова мера занятой части отрезка $[0, x]$ по окончании процесса заполнения при условии, что первый размещаемый интервал имел длину l и занимал место $(t, t+l)$. Тогда справедливо равенство

$$M_{x+l} \mid l, t = M_t \mid l + M_{x-t} \mid l + l,$$

из которого следует

$$EM_{x+l} \mid l = \frac{1}{x}\int\limits_0^x EM_t \mid ldt + \frac{1}{x}\int\limits_0^x EM_{x-t} \mid ldt + l.$$

Введя обозначение $m(x) = EM_x \mid l$, получим для функции $m(x)$ равенство

$$m(x+l) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x m(t)dt + \frac{1}{x}\int\limits_0^x m(x-t)dt + 1 = \frac{2}{x}\int\limits_0^x m(t)dt + l$$

с начальными условиями

$$m(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < l \quad \text{и} \quad m(l) = l.$$

Далее введем в рассмотрение функцию $\mu(x) = \frac{1}{l}m(lx) + 1$, удовлетворяющую равенствам

$$\mu(x) = 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \leq x < 1, \qquad \mu(1) = 2$$

и

$$\mu(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x \mu(t)dt,$$

которые совпадают с равенствами (10) и (11). Применяя лемму к функции μ, получаем

$$\mu(x) = \lambda x + \lambda + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Выражая функцию $m(x)$ через $\mu(x)$ и вычисляя математическое ожидание, имеем

$$EM_x = \lambda x + \lambda El - El + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

что совпадает с (3).

Доказательство теоремы 2. Пусть $N_x \mid t$ обозначает число разместившихся интервалов единичной длины на отрезке $[0, x]$ при условии, что левый конец первого интервала находится в точке t. Тогда верно равенство

$$N_{x+1} \mid t = N_t + N_{x-t} + 1.$$

Обозначив через $n(x)$ математическое ожидание общего количества разместившихся интервалов на отрезке $[0, x]$, можем написать

$$n(x+1) = EN_{x+1} = EE(N_{x+1} \mid t) = \int\limits_0^x n(t)p_x(t)dt + \int\limits_0^x n(x-t)p_x(t)dt + 1 =$$
$$= \int\limits_0^x n(t)(p_x(t) + p_x(x-t))dt + 1 = \frac{2}{x}\int\limits_0^x n(t)dt + 1.$$

Применяя обозначение $\nu(x) = n(x) + 1$ и проверяя начальные условия, получаем

$$\nu(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x \nu(t)dt \qquad \text{при} \qquad x > 0,$$

а также

$$\nu(x) = 1 \qquad \text{для} \qquad 0 \le x < 1 \qquad \text{и} \qquad \nu(1) = 2.$$

Это полностью совпадает с условиями (10) и (11) леммы и позволяет заключить

$$\nu(x) = \lambda x + \lambda + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Окончательно получаем

$$n(x) = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Доказательство теоремы 3. Пусть, как и прежде, $N_x \mid t$ обозначает число разместившихся интервалов единичной длины на отрезке $[0, x]$ при условии, что левый конец первого интервала при последовательном размещении находится в точке t;

$n(x)$ — математическое ожидание общего количества разместившихся интервалов на отрезке $[0,x]$, то есть $n(x) = EN_x$. Тогда будем иметь

$$N_{x+1} \mid t = N_t + N_{x-t} + 1$$

и, следовательно, выполняется

$$n(x+1) = EE(N_{x+1} \mid t) = \frac{1}{x-2\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon}^{x-\varepsilon} n(t)dt + \frac{1}{x-2\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon}^{x-\varepsilon} n(x-t)dt + 1 = \frac{2}{x-2\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon}^{x-\varepsilon} n(t)dt + 1.$$

Вводим новое обозначение $\varphi(x) = n((1+\varepsilon)x + \varepsilon) + 1$. Тогда для функции $\varphi(x)$ будет справедливо равенство

$$\varphi(x+1) = \frac{2}{x} \int\limits_{0}^{x} \varphi(t)dt \quad \text{для} \quad x > 0,$$

причем $\varphi(x) = 1$ при $0 \le x < 1$ и $\varphi(1) = 2$.

Применяя лемму к функции φ, получаем равенство

$$\varphi(x) = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

из которого следует утверждение теоремы 3:

$$n(x) = \frac{\lambda}{1+\varepsilon} x + \lambda - \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} + O\left(\left(\frac{c(1+\varepsilon)}{x-\varepsilon}\right)^{\frac{x-\varepsilon}{1+\varepsilon}-\frac{3}{2}}\right) = \frac{\lambda}{1+\varepsilon} x + \lambda - \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} + o(x^{-n}) \quad (x \to \infty)$$

при любом $n \ge 1$.

Заключение. В работе рассмотрено несколько задач, которые являются обобщениями задачи случайного заполнения интервалами отрезка большой длины. Удалось получить новые результаты об асимптотике математического ожидания количества размещенных интервалов и асимптотике математического ожидания меры заполненной части отрезка в случае, когда длина размещаемого интервала является случайной величиной. При этом закон распределения расположения размещаемых интервалов, как и в классической задаче, предполагался равномерным. В этом случае получены точные значения констант в асимптотических выражениях и выявлена их зависимость от закона распределения длины размещаемых интервалов.

Рассмотрено обобщение классической задачи для случая, когда закон распределения расположения размещаемых интервалов единичной длины отличен от равномерного. В этом случае также получены новые результаты об асимптотике математического ожидания количества размещенных интервалов. Кроме того, в этом направлении обобщения классической задачи показано, что для одного достаточно широкого класса распределений положения размещаемых интервалов асимптотика математического ожидания числа поместившихся интервалов такая же, как и в задаче Реньи.

Литература

1. *Renji A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. Vol. 3. 1958. P. 109–127.

2. *Ney P. E.* A random interval filling problem // Annals of Math. Statist. Vol. 33. 1962. P. 702–718.

3. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the «parking» problem // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. Vol. 9. 1964. P. 209–226.

4. *Ananjevskii S. M.* The «parking» problem for segments of different length // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93. P. 259–264.

5. *Ананьевский С. М., Шульгина Е. А.* О мере заполненной части отрезка в задаче «парковки» // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 4. С. 3–12.

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2016 г.

Сведения об авторе

Ананьевский Сергей Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент; st003603@spbu.ru

SOME GENERALIZATIONS OF “PARKING” PROBLEM

Sergey M. Ananjevskii

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; st003603@spbu.ru

In the original Renyi statement of the “parking” problem open intervals of unit length fill a segment of large size. The asymptotic behaviour of the mean of the number of placed intervals is studied.

We study two generalizations of “parking” problem. The first generalization is the case where the length of placed intervals is a random value. In this case both the asymptotic behaviour of the mean of the number of placed intervals and the asymptotic behaviour of the mean of the measure of occupied part of large segment are studied. The second generalization is the case where a random position of unit interval is a random variable with not uniform distribution. Two different problems are studied in the second generalization. Refs 5.

Keywords: random filling, “parking” problem, asymptotic behaviour of the mean.

References

1. Renji A., “On a one-dimensional problem concerning space-filling”, *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Ney P. E., “A random interval filling problem”, *Annals of Math. Statist.* **33**, 702–718 (1962).

3. Dvoretzky A., Robbins H., “On the “parking” problem”, *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

4. Ananjevskii S. M., “The “parking” problem for segments of different length”, *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999).

5. Ananjevskii S. M., Shulgina E. A., “On the measure of the occupied part of a segment in the “parking” problem”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, Issue 4, 3–12 (2013) [in Russian].

Для цитирования: Ананьевский С. М. Некоторые обобщения задачи о «парковке» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.401

For citation: Ananjevskii S. M. Some generalizations of “parking” problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 525–532. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.401