

В. М. Мальков, Ю. В. Малькова, Р. Р. Петрухин

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОТВЕРСТИЯ С МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Задачи теории упругости для композитных материалов с отверстиями и включениями имеют большое практическое значение для механики, физики и других областей науки. В работе получено аналитическое решение плоской задачи (плоская деформация или плоское напряженное состояние) для неоднородной пластины с эллиптическим отверстием. Пластина образована соединением двух полуплоскостей из разных материалов, отверстие расположено целиком в нижней полуплоскости. На бесконечности пластины известны напряжения и углы поворота, на границе отверстия задана внешняя нагрузка. Для решения задачи использованы методы комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили, конформных отображений и суперпозиции. Близость отверстия к границе раздела сред оказывает существенное влияние на величину напряжений как в окрестности отверстия, так и на линии раздела. Для инженерных приложений важно знать поля напряжений и перемещений, чтобы оценить влияние отверстия на прочность соединения материалов. Из общего решения рассмотренной задачи вытекают как частные случаи решения задач об эллиптическом отверстии в полуплоскости, о наклонной трещине в двухкомпонентной плоскости и полуплоскости и ряд других. Выполнены расчеты напряжений на линии раздела для различных параметров упругости полуплоскостей, исследовано влияние близости отверстия на величину этих напряжений. Библиогр. 19 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: кусочно неоднородная пластина, плоская задача упругости, эллиптическое отверстие, метод комплексных функций.

V. M. Malkov, Yu. V. Malkova, R. R. Petrukhin

INTERACTION OF AN ELLIPTIC HOLE WITH AN INTERFACE OF TWO BONDED HALF-PLANES

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The problems of elasticity for composite materials with the holes and inclusions have a great practical significance for mechanics, physics and other fields of science. The analytic solution of a plane problem (plane strain or plane stress) for a bi-material plate with elliptic hole is obtained. A hole is located entirely in the lower half-plane. The stresses and the angles of rotation are given at infinity, on the boundary of the hole where an external load is applied. The methods of Kolosov–Muskhelishvili complex potentials, conformal mapping and superposition were used for solution to the problem. The affinity of a hole to an interface makes essential influence

Мальков Вениамин Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; v.malkov@spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — кандидат физико-математических наук, доцент; y.malkova@spbu.ru

Петрухин Руслан Романович — студент; prr1612@gmail.com

Malkov Venyamin Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; v.malkov@spbu.ru

Malkova Yulia Venyaminovna — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; y.malkova@spbu.ru

Petrukhin Ruslan Romanovich — student; prr1612@gmail.com

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00065).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

on value of stresses in a vicinity of a hole and also on value of stresses at an interface. For engineering applications it is important to know the fields of the stresses and displacements so as to estimate influence of a hole on strength of bonding. Special cases of these problems follow the solutions of problems on an elliptic hole in a half-plane, about an inclined crack in a bi-material plane and half-plane and a some others. Refs 19. Figs 2.

Keywords: bi-material plate, plane problem elasticity, elliptic hole, method of complex functions.

Введение. Проблемам отверстий и включений в неоднородную плоскость и полуплоскость уделено значительное внимание в литературе. Во многих работах широко и успешно используются методы функций комплексных переменных для нахождения точных решений плоских задач теории упругости. Ортоотропные упругие композиты, содержащие эллиптические отверстия и подвергнутые постоянным напряжениям на бесконечности, рассмотрены в [1]. При помощи техники конформного отображения и комплексных потенциалов решение проблемы найдено в компактной и элементарной форме. Когда малая полость эллиптического отверстия стремится к нулю, т. е. отверстие становится разрезом, потенциалы сводятся к форме задачи о трещине Римана–Гильберта. Взаимодействие точечной дислокации с эллиптическим отверстием на межфазной границе двух соединенных полуплоскостей изучалось в работе [2]. Комплексные потенциалы напряжений найдены методами комплексных функций и конформных отображений. Для двух соединенных полуплоскостей применена рациональная функция, отображающая полуплоскость с полуэллиптическим вырезом на единичный круг. Метод комплексных граничных интегральных уравнений в комбинации с техникой разложения в ряды описан в [3–5] для проблемы бесконечной упругой плоскости и полуплоскости, содержащих множество круговых отверстий. Нагрузка приложена на бесконечности или на границах отверстий. Рассмотрено несколько численных примеров, чтобы показать эффективность подхода. В работах [6–8] представлены аналитические решения задач для упругой полуплоскости с круговым туннелем или полостью. Решение использует комплексные переменные и конформное отображение на кольцо. Коэффициенты в разложении функций напряжений в ряды Лорана определяются сочетанием аналитических и численных методов.

В горной индустрии интерес к проблеме этого типа возникает главным образом из-за перемещений, которые случаются на поверхности почвы и могут вызвать значительные разрушения. Сравнение решений по двум компьютерным пакетам FLAC 2D и PLAXIS подтверждает, что взаимодействие круглых отверстий действительно вызывает увеличение смещений. Проблема точечной дислокации при изгибе соединенных полубесконечных пластин с эллиптическим отверстием на межфазной границе посвящена работа [9]. Основываясь на методе аналитического продолжения и технике отображения рациональной функцией, проблему получения функций напряжений в верхней и нижней полуплоскостях развязали и свели к двум задачам Римана–Гильберта. Построена замкнутая форма решения. Взаимодействие напряжений, благодаря присутствию трещины или эллиптического отверстия около прямоугольного выреза в бесконечной пластине, подвергнутой постоянным напряжениям на бесконечности, изучено в статье [10]. Эта проблема важна в пассажирских самолетах, когда трещина находится в окрестности двери. Коэффициенты концентрации напряжений около отверстия или коэффициенты интенсивности напряжений около конца трещины оцениваются для разных длин трещин и расстояния трещины от отверстия. Две комплексные функции напряжений найдены с помощью метода последовательных приближений Шварца. Пластина, состоящая из двух различных упругих полуплоскостей, каждая из которых имеет полуэллиптический вырез, подвергнутая

постоянным растягивающим усилиям по нормали к межфазной границе, анализируется в [11]. Анализ напряжений проводится с помощью метода конформных отображений рациональной функцией и комплексной функцией напряжений. Выражение для энергии найдено с помощью теоремы о вычетах для контурного интеграла, записанного через комплексную функцию напряжений. Показано распределение напряжений вокруг кругового отверстия и межфазной линии. Даны выражения для коэффициентов концентрации напряжений, которые исследованы для различных овальных форм, параметров материалов и длины области отслоения. Включения произвольной формы в полуплоскость с фиксированной и жесткой границей без трения изучены в работе [12] методом функций комплексной переменной и конформных отображений. Показано, что для жесткой безфрикционной границы средние термальные напряжения включения остаются постоянными и исчезают снаружи, что не имеет места для фиксированной границы.

1. Постановка задачи. Метод суперпозиции. Рассматривается плоскость S , состоящая из двух полуплоскостей S_1 и S_2 , выполненных из разных материалов. В декартовых координатах (x_1, x_2) прямая $x_2 = 0$ является линией раздела полуплоскостей. Предполагаем, что отверстие расположено целиком в нижней полуплоскости S_1 . С эллипсом L свяжем другую систему декартовых координат (ξ_1, ξ_2) плоскости S с началом в центре эллипса. Оси координат (ξ_1, ξ_2) направлены вдоль осей эллипса и образуют угол α с осями (x_1, x_2) (рис. 1).

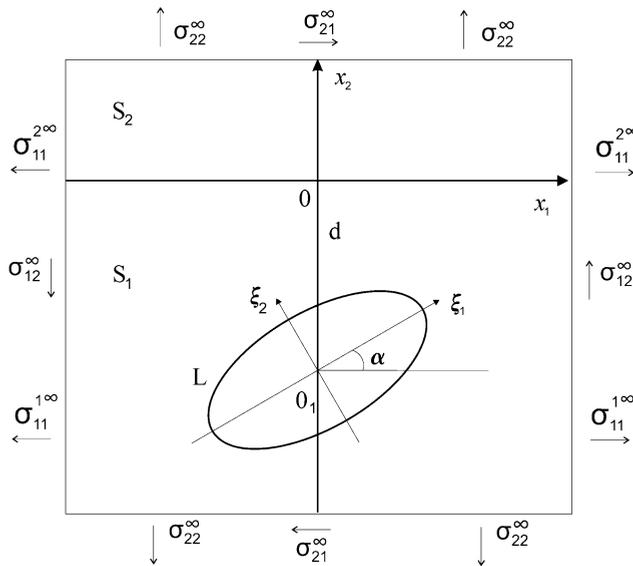


Рис. 1. Двухкомпонентная плоскость с эллиптическим отверстием

Для комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ имеем зависимости

$$z = \xi e^{i\alpha} - id, \quad \xi = (z + id) e^{-i\alpha}, \quad (1)$$

в которых d — расстояние до центра эллипса от оси x_1 ; предполагается, что $d \geq c > 0$, где c — некоторая константа. Последнее неравенство означает, что эллипс находится строго ниже линии раздела полуплоскостей.

В декартовых координатах (x_1, x_2) компоненты напряжений и перемещений обозначим σ_{ij} и u_i ($i, j = 1, 2$) соответственно, а в декартовых координатах (ξ_1, ξ_2) — s_{ij} и v_i . Имеют место зависимости

$$\begin{aligned} s_{11} + s_{22} &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \\ s_{22} - s_{11} + 2i s_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12}) e^{2i\alpha}, \\ v_1 + iv_2 &= (u_1 + iu_2) e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Граничные условия задачи. На бесконечности при $|z| \rightarrow \infty$ заданы напряжения и углы поворота (свой для каждой полуплоскости S_k , $k = 1, 2$)

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^{k\infty}, \quad \omega \rightarrow \omega^{k\infty}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

причем

$$\sigma_{12}^{1\infty} = \sigma_{12}^{2\infty} = \sigma_{12}^\infty, \quad \sigma_{22}^{1\infty} = \sigma_{22}^{2\infty} = \sigma_{22}^\infty, \quad \sigma_{11}^{1\infty} \neq \sigma_{11}^{2\infty}.$$

На линии сопряжения полуплоскостей $x_2 = 0$ имеем условия непрерывности напряжений и производных перемещений

$$\begin{aligned} [\sigma_{22} - i\sigma_{21}]^+(x_1) &= [\sigma_{22} - i\sigma_{21}]^-(x_1), \\ [u'_1 + iu'_2]^+(x_1) &= [u'_1 + iu'_2]^-(x_1), \end{aligned} \quad (3)$$

штрих означает производную по переменной x_1 .

На контуре эллипса L задана внешняя нагрузка

$$[s_{nn} + is_{nt}]^+(t) = p(t), \quad (4)$$

где s_{nn} и s_{nt} — компоненты тензора напряжений в базисе нормали и касательной к контуру отверстия; t — значение координаты ξ на L . Внешнюю нагрузку считаем самоуравновешенной на контуре. Функция $p(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера.

Отметим, что напряжения и углы поворота на бесконечности нельзя задавать независимо, в работе [13] получены условия, которым должны удовлетворять эти величины:

$$\begin{aligned} \omega^{1\infty} + \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{12}^\infty &= \omega^{2\infty} + \frac{1}{2\mu_2} \sigma_{12}^\infty, \\ \frac{1 + \varkappa_1}{\mu_1} (\sigma_{11}^{1\infty} + \sigma_{22}^\infty) - \frac{4}{\mu_1} \sigma_{22}^\infty &= \frac{1 + \varkappa_2}{\mu_2} (\sigma_{11}^{2\infty} + \sigma_{22}^\infty) - \frac{4}{\mu_2} \sigma_{22}^\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\varkappa_k = 3 - 4\nu_k$ при плоской деформации и $\varkappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$ при плоском напряженном состоянии. Параметры упругости: μ_k — модуль сдвига и ν_k — коэффициент Пуассона, свой для каждой полуплоскости S_k , $k = 1, 2$. Поясним физический смысл уравнений (5). Из второго уравнения (3) следуют равенства

$$[e_{11}]^+(x_1) = [e_{11}]^-(x_1), \quad [e_{12} + \omega]^+(x_1) = [e_{12} + \omega]^-(x_1).$$

Если компоненты деформации e_{11} , e_{12} выразить через напряжения по закону Гука и перейти к пределу при $|x_1| \rightarrow \infty$, то придем к соотношениям (5). Для однородной пластины эти уравнения удовлетворяются тождественно.

Метод суперпозиции. Для решения краевой задачи используется метод комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили [14] в сочетании с методом суперпозиции [15]. Решение задачи строится в виде суммы решений двух частных задач: первой является задача для двухкомпонентной плоскости со скачками напряжений и перемещений на линии сопряжения полуплоскостей и заданными условиями (2) на бесконечности, второй — задача для однородной плоскости с эллиптическим отверстием, нагруженным на контуре, напряжения на бесконечности во второй задаче отсутствуют.

Основная сложность решения задачи с помощью метода суперпозиции состоит в том, что скачки напряжений и перемещений первой вспомогательной задачи и поверхностная нагрузка на контуре отверстия второй являются неизвестными функциями.

Напряжения и перемещения представим следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_1 + (\sigma_{ij})_2, & u_i &= (u_i)_1 + (u_i)_2, & z &\in S_1, \\ \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_1, & u_i &= (u_i)_1, & z &\in S_2,\end{aligned}\tag{6}$$

индексами 1 и 2 отмечены решения первой и второй частных задач соответственно. Из формул (6) видно, что в нижней полуплоскости S_1 решение основной задачи складывается из решений первой и второй частных задач, для верхней полуплоскости S_2 используется решение только первой задачи.

Для первой задачи на линии сопряжения полуплоскостей имеем условия

$$\begin{aligned}[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^+ - [(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^- &= \Delta \sigma(x_1), \\ [(u'_1 + iu'_2)_1]^+ - [(u'_1 + iu'_2)_1]^- &= \Delta u'(x_1),\end{aligned}\tag{7}$$

где $\Delta \sigma(x_1)$ и $\Delta u'(x_1)$ — неизвестные функции скачков. На бесконечности при $|z| \rightarrow \infty$ заданы условия (2).

Во второй задаче напряжения на бесконечности отсутствуют, на контуре эллипса выполняется условие

$$[(s_{nn} + is_{nt})_2]^+ = q(t),\tag{8}$$

в котором $q(t)$ — неизвестная функция, имеющая смысл внешней нагрузки. Так как нагрузка $p(t)$ самоуравновешена на контуре эллипса, то и нагрузка $q(t)$ будет самоуравновешенной.

С учетом формул (6) граничные условия (3), (4) примут вид

$$\begin{aligned}[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^+(x_1) &= [(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1 + (\sigma_{22} - i\sigma_{21})_2]^-(x_1), \\ [(u'_1 + iu'_2)_1]^+(x_1) &= [(u'_1 + iu'_2)_1 + (u'_1 + iu'_2)_2]^-(x_1), \\ [(s_{nn} + is_{nt})_1 + (s_{nn} + is_{nt})_2]^+(t) &= p(t).\end{aligned}$$

Преобразованием граничных условий (3), (4), (7), (8) получим следующую систему трех уравнений для нахождения трех неизвестных функций, каковыми являются функции скачков напряжений и производных перемещений $\Delta \sigma(x_1)$, $\Delta u'(x_1)$ на линии сопряжения полуплоскостей первой задачи, и функция внешней нагрузки $q(t)$ на контуре эллипса второй задачи:

$$[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_2]^- = \Delta \sigma(x_1), \quad [(u'_1 + iu'_2)_2]^- = \Delta u'(x_1),\tag{9}$$

$$[(s_{nn} + is_{nt})_1]^+ = p(t) - q(t). \quad (10)$$

Левые части уравнений (9) зависят только от функции $q(t)$ и не зависят от функций скачков, левая часть уравнения (10) — только от функций скачков и не связана с нагрузкой $q(t)$ второй задачи. Дальнейший путь решения задачи состоит в том, что из уравнений (9) функции скачков подставляем в уравнение (10). Полученное уравнение будет содержать только одну неизвестную функцию $q(t)$.

Задача 1. Решение первой задачи имеется в работах [13, 16], здесь приведем некоторые формулы, которые будут использованы дальше. Напряжения и производные перемещений запишем через комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили [13, 14]

$$\begin{aligned} (\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1 &= \Phi_k(z) + \Omega_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_k(z)}, \\ (\sigma_{11} + i\sigma_{12})_1 &= \Phi_k(z) + 2\overline{\Phi_k(z)} - \Omega_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_k(z)}, \\ 2\mu_k(u'_1 + iu'_2)_1 &= \varkappa_k\Phi_k(z) - \Omega_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_k(z)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В формулах (11) введена функция $\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi'}(z) + \overline{\Psi}(z)$.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$ и $\Omega_k(z)$ выразим через две функции $h(z)$ и $r(z)$, аналитические во всей плоскости, кроме линии раздела [13, 16]:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{\mu_2 h(z) + r(z)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, & \Omega_1(z) &= -\frac{\mu_1 \varkappa_2 h(z) - r(z)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, & z \in S_2, \\ \Phi_1(z) &= \frac{\mu_1 h(z) + r(z)}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, & \Omega_2(z) &= -\frac{\mu_2 \varkappa_1 h(z) - r(z)}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, & z \in S_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции $h(z)$ и $r(z)$ являются решениями граничных задач Римана–Гильберта для скачков напряжений и производных перемещений

$$\begin{aligned} h^+(x_1) - h^-(x_1) &= \Delta\sigma(x_1), & r^+(x_1) - r^-(x_1) &= 2\mu_1\mu_2\Delta u'(x_1), \\ h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\sigma(x_1) dx_1}{x_1 - z} + h(\infty), & r(z) &= \frac{\mu_1\mu_2}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta u'(x_1) dx_1}{x_1 - z} + r(\infty). \end{aligned} \quad (13)$$

Постоянные $h(\infty)$ и $r(\infty)$ находятся из условий на бесконечности (2), их значения приведены в [13, 16].

Задача 2. Рассматривается однородная плоскость с эллиптическим отверстием, на контуре которого задана внешняя нагрузка. Напряжения на бесконечности отсутствуют.

С помощью конформного преобразования

$$\xi = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}), \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1, \quad (14)$$

бесконечную область с эллиптическим отверстием отобразим на внешность круга единичного радиуса. Полуоси эллипса: $a = R(1 + m)$, $b = R(1 - m)$.

Положим $\zeta = re^{i\theta}$, переменные (r, θ) образуют систему ортогональных криволинейных координат в плоскости ξ с векторным базисом $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Линии $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ являются софокусными эллипсами и гиперболами соответственно. Для сил и перемещений имеют место соотношения [14]

$$f_1 + if_2 = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \quad (15)$$

$$2\mu(v_1 + iv_2) = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \quad (16)$$

Комплексные потенциалы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ определяются из граничного условия на единичной окружности для выражения (15)

$$\varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)}\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = (f_1 + if_2)(t) = f(t), \quad t = e^{i\theta}. \quad (17)$$

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ голоморфны во всей плоскости, включая бесконечную точку. Решение граничной задачи (17) при отсутствии напряжений на бесконечности и главного вектора сил на контуре отверстия таково [14]:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)dt}{t-\zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)dt}{t-\zeta} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \varphi'(\zeta) + \psi(\infty). \quad (18)$$

Постоянная $\psi(\infty)$ не влияет на распределение напряжений

$$\psi(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f(t)} \frac{dt}{t}.$$

Напряжения в криволинейных координатах (r, θ) находятся по формулам

$$\begin{aligned} s_{rr} + is_{r\theta} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - G(\zeta), \\ s_{\theta\theta} - is_{r\theta} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + G(\zeta), \\ G(\zeta) &= \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{-2i\gamma}, \quad e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta)}}{\zeta\omega'(\zeta)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Комплексные потенциалы $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ можно получить из (18) и равенств

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta), \quad \omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta). \quad (20)$$

2. Вывод интегрального уравнения. На контуре эллипса напряжения $s_{nn} = s_{rr}$, $s_{nt} = s_{r\theta}$. В граничные условия (9) входят напряжения и производная перемещений второй задачи, записанные в базисе декартовых координат (x_1, x_2) . Преобразуем уравнения (9):

$$\Delta\sigma(x_1) = (\sigma_{22} - i\sigma_{21})_2 = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{2i\alpha}, \quad (21)$$

$$2\mu_1 \Delta u'(x_1) = 2\mu_1 (u'_1 + iu'_2)_2 = \varkappa_1 \Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{2i\alpha}.$$

Переменную ζ в формулах (21) вычисляем на линии сопряжения полуплоскостей $\zeta = \zeta(x_1)$, используя формулы (1).

В уравнение (10) входят напряжения первой задачи в базисе координат (r, θ)

$$\begin{aligned} (s_{rr} + is_{r\theta})_1 &= 0.5(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 0.5(\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-2i(\alpha+\gamma)} = \\ &= \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + [\overline{\Phi_1(z)} - \Omega_1(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_1(z)}]e^{-2i(\alpha+\gamma)} = p(t) - q(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим выражения (21) в формулы (13) и вычислим интегралы типа Коши

$$\begin{aligned} h(z) - h(\infty) &= \Phi(\zeta), \quad r(z) - r(\infty) = \mu_2 \varkappa_1 \Phi(\zeta), \quad z \in S_2, \\ h(z) - h(\infty) &= -\overline{\Phi(\zeta_1)} - \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta_1)} \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right] e^{2i\alpha}, \quad z \in S_1, \\ r(z) - r(\infty) &= \mu_2 \overline{\Phi(\zeta_1)} + \mu_2 \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta_1)} \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right] e^{2i\alpha}, \quad z \in S_1, \end{aligned} \quad (23)$$

где комплексные переменные ζ и ζ_1 являются соответственно корнями уравнений

$$\omega(\zeta) = (z + id)e^{-i\alpha}, \quad \omega(\zeta_1) = (\bar{z} + id)e^{-i\alpha}.$$

Используя (23), преобразуем формулы для комплексных потенциалов (12)

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \Phi_1(\infty) + a_1[h(z) - h(\infty)], \quad \Omega_2(z) = \Omega_2(\infty) - (1 - a_1)[h(z) - h(\infty)], \quad z \in S_1, \\ \Phi_2(z) &= \Phi_2(\infty) + (1 + a_2)\Phi(\zeta), \quad \Omega_1(z) = \Omega_1(\infty) + a_2\Phi(\zeta), \quad z \in S_2, \end{aligned} \quad (24)$$

функция $h(z) - h(\infty)$ дается второй формулой (23),

$$a_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, \quad a_2 = \frac{\mu_2 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}.$$

В уравнении (22) заменим потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ выражениями (24)

$$\begin{aligned} &a_1[h(z) - h(\infty)] + a_1[\overline{h(z)} - \overline{h(\infty)}] + \\ &+ \left(a_1[\overline{h(z)} - \overline{h(\infty)}] - a_2\Phi(\zeta_1) - (z - \bar{z})a_1\overline{h'(z)} \right) e^{-2i(\alpha+\gamma)} = \\ &= p(t) - q(t) - 0.5(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) + 0.5(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} - 2i\sigma_{21}^{\infty})e^{-2i(\alpha+\gamma)}, \end{aligned} \quad (25)$$

здесь $z = \omega(t)e^{i\alpha} - id$, $t = e^{i\theta}$. Правая и левая части этого уравнения содержат одну неизвестную функцию $q(t)$.

Подставим в (25) для функции $h(z) - h(\infty)$ значение (23)

$$\begin{aligned} &a_1(g + \bar{g}) + [a_1g + a_2\Phi(\zeta_1)]e^{-2i(\alpha+\gamma)} - a_1(z - \bar{z})\frac{e^{-i\alpha}}{\omega'(\zeta_1)} \left(\Phi'(\zeta_1) + \frac{\partial g}{\partial \zeta_1} \right) e^{-2i(\alpha+\gamma)} = \\ &= q(t) - p(t) + 0.5(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) - 0.5(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} - 2i\sigma_{21}^{\infty})e^{-2i(\alpha+\gamma)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$g = -[\overline{h(z)} - \overline{h(\infty)}] = \Phi(\zeta_1) + \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta_1)} \Phi'(\zeta_1) + \Psi(\zeta_1) \right] e^{-2i\alpha}.$$

Если оси эллипса параллельны декартовым осям (x_1, x_2) , то угол $\alpha = 0$ и уравнение (26) несколько упрощается.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ в уравнении (26) определяются с помощью формул (18) и (20)

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint q(t)\omega'(t)\frac{dt}{t - \zeta}, \quad (27)$$

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{q(t)\omega'(t)} dt}{t^2(t-\zeta)} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi'(\zeta) + \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi(\zeta).$$

Таким образом, задача об эллиптическом отверстии в неоднородной плоскости сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (26) для функции $q(t)$ на окружности единичного радиуса.

3. Метод решения интегрального уравнения. Решение интегрального уравнения (26) представим в виде тригонометрического ряда Фурье, неизвестные коэффициенты которого ищутся методом коллокации. Создана программа в среде MATLAB для реализации этого метода. Положим

$$\omega'(t)q(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{-n}, \quad t = e^{i\theta}. \quad (28)$$

Главный вектор сил на контуре отверстия находится по формуле

$$F = i \oint (\sigma_{n1} + i\sigma_{n2}) ds = \oint q(t)\omega'(t) dt.$$

Подставив в нее (28), получим $F = 2\pi i b_1$. Поскольку главный вектор по условию равен нулю, то коэффициент $b_1 = 0$.

По первой формуле (27) найдем комплексный потенциал $\Phi(\zeta)$

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{-k}. \quad (29)$$

Используя выражение

$$\overline{\omega'(t)q(t)} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n t^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n t^n, \quad t = e^{i\theta},$$

по второй формуле (27) найдем комплексный потенциал $\Psi(\zeta)$

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta) = -\bar{a}_0 \frac{1}{\zeta^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \zeta^{-k-2} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi'(\zeta) + \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi(\zeta). \quad (30)$$

При вычислении интегралов область $|\zeta| > 1$ остается справа при обходе контура.

Функции $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)$ должны быть голоморфны в области $|\zeta| > 1$, выражения (29), (30) этим условиям удовлетворяют.

Неизвестные коэффициенты разложения (28) определялись из интегрального уравнения (26) с помощью метода коллокации. Оставив в разложении (28) конечное число членов $n = \overline{1, m}$, получим $2m$ неизвестных комплексных постоянных a_n , b_n . После подстановки разложений в выражение (26) запишем его в виде

$$\sum_{n=0}^m [A_n(t)a_n + A'_n(t)\bar{a}_n + B_n(t)b_n + B'_n(t)\bar{b}_n] = F(t), \quad t = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Берем нужное количество точек θ_i на промежутке $[0, 2\pi]$ так, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных постоянных, и вычисляем в этих точках значения функций в коэффициентах уравнения. Задача сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Чтобы получить решение задачи для полуплоскости с эллиптическим отверстием, нужно в уравнениях для двухкомпонентной плоскости положить $\mu_2 = 0$ (рассматривается нижняя полуплоскость S_1). Постоянные в уравнениях (25), (26) будут такими: $a_1 = 1, a_2 = -1$.

Значение параметра $m = 1$ в конформном отображении (14) соответствует двухкомпонентной плоскости с прямолинейной наклонной трещиной (разрезом) на отрезке $[-2R, 2R]$ оси ξ_1 . Решение первой задачи будет прежним, решение второй задачи изменится, поскольку интегралы типа Коши (18) будут вычисляться не на окружности, а на отрезке. Напряжения второй задачи будут иметь корневую особенность у концов трещины. Решение указанной задачи для разных видов граничных условий на берегах трещины приведено в работе [13].

Для практических целей представляют интерес напряжения на линии раздела материалов. Эти напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_{22} - i\sigma_{21} = \Phi_2(z) + \Omega_2(\bar{z}), \quad \sigma_{11} + i\sigma_{12} = \Phi_2(z) + 2\overline{\Phi_2(z)} - \Omega_2(\bar{z}).$$

Взяты напряжения верхней полуплоскости, использующие решение только первой частной задачи. С помощью формул (12), (23) имеем

$$\sigma_{22} - i\sigma_{21} = (\sigma_{22} - i\sigma_{21})^\infty + \frac{\mu_2(1 + \varkappa_1)}{\mu_2 + \mu_1\varkappa_2} \Phi(\zeta) + \frac{\mu_2(1 + \varkappa_1)}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1} \bar{g}. \quad (31)$$

Функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ находятся по формулам (29), (30), комплексные переменные ζ и ζ_1 берутся на линии раздела, они являются корнями уравнений

$$\omega(\zeta) = (x_1 + id)e^{-i\alpha}, \quad \omega(\zeta_1) = (x_1 + id)e^{-i\alpha}.$$

На линии раздела эти переменные как функции от x_1 совпадают.

Получим формулы для напряжений на контуре отверстия. Они складываются из напряжений первой и второй задач

$$s_{rr} + s_{\theta\theta} = (s_{rr} + s_{\theta\theta})_1 + (s_{rr} + s_{\theta\theta})_2, \quad (32)$$

$$(s_{rr} + s_{\theta\theta})_1 = 2[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}], \quad (s_{rr} + s_{\theta\theta})_2 = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}].$$

Поскольку радиальные напряжения s_{rr} на контуре отверстия заданы (в частности, равны нулю), то по этим формулам находятся окружные напряжения $s_{\theta\theta}$. Величины ζ и ζ_1 берутся на контуре отверстия: $\zeta = e^{i\theta}, \omega(\zeta_1) = [\overline{\omega(\zeta)}e^{-i\alpha} + 2id]e^{-i\alpha}$.

4. Неоднородная пластина с круговым отверстием. Постановка краевой задачи для кругового отверстия такая же, как и в случае эллиптического отверстия. Решение задачи для пластины с круговым отверстием выведем из решения для эллиптического отверстия, положив в нем $m = 0, \alpha = 0, \gamma = \theta, R$ — радиус отверстия.

Напряжения и перемещения находятся по формулам (16) и (19)

$$(s_{rr} + is_{r\theta})_2 = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \zeta\overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)}e^{-2i\theta},$$

$$(s_{\theta\theta} - is_{\theta r})_2 = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \zeta\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)}e^{-2i\theta},$$

$$2\mu(v_1 + iv_2)_2 = \varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}.$$

Комплексные потенциалы (27) имеют вид

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint q(t) \frac{dt}{t - \zeta}, \quad (33)$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{q(t)} \frac{dt}{t^2(t - \zeta)} - \frac{1}{\zeta} \Phi'(\zeta) + \frac{1}{\zeta^2} \Phi(\zeta).$$

Формулы (23) в данной задаче будут существенно проще:

$$h(z) - h(\infty) = \Phi(\zeta), \quad r(z) - r(\infty) = \mu_2 \varkappa_1 \Phi(\zeta), \quad z \in S_2,$$

$$h(z) - h(\infty) = -\overline{\Phi(\zeta_1)} - \left[\zeta \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right], \quad z \in S_1,$$

$$r(z) - r(\infty) = \mu_2 \overline{\Phi(\zeta_1)} + \mu_2 \left[\zeta \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right], \quad z \in S_1,$$

в них комплексные переменные $R\zeta = z + id$, $R\zeta_1 = \bar{z} + id$.

Запишем интегральное уравнение Фредгольма (26) для кругового отверстия

$$\begin{aligned} a_1 \left[\overline{\Phi(\zeta_1)} + \zeta \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right] + a_1 (1 + e^{-2i\theta}) \left[\Phi(\zeta_1) + \bar{\zeta} \Phi'(\zeta_1) + \Psi(\zeta_1) \right] + \\ + a_2 \Phi(\zeta_1) e^{-2i\theta} - a_1 (\zeta - \zeta_1) \left[2\Phi'(\zeta_1) + \bar{\zeta} \Phi''(\zeta_1) + \Psi'(\zeta_1) \right] e^{-2i\theta} = \end{aligned} \quad (34)$$

$$= q(t) - p(t) + 0.5(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}) - 0.5(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} - 2i\sigma_{12}^{\infty}) e^{-2i\theta}.$$

На контуре единичной окружности $\zeta = e^{i\theta}$, $R\zeta_1 = 2id + Re^{-i\theta} = 2id + Rt^{-1}$, $d > R$. Очевидны следующие оценки: $|\zeta| = 1$; $2d - R \leq R|\zeta_1| \leq 2d + R$.

Решение интегрального уравнения (34) ищем в виде (28), для комплексных потенциалов (33) получим выражения

$$R\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{-k},$$

$$R\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta) = -\bar{a}_0 \frac{1}{\zeta^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \zeta^{-k-2} - \frac{1}{\zeta} \Phi'(\zeta) + \frac{1}{\zeta^2} \Phi(\zeta).$$

Область $|\zeta| > 1$ остается справа при обходе контура окружности.

Напряжения на линии раздела вычисляются по формуле (31), а на контуре отверстия — по соотношениям (32).

З а м е ч а н и е. Задача о круговом отверстии в неоднородной пластине близка к решенной раньше задаче о криволинейной трещине в виде дуги окружности [16]. Некоторые уравнения по форме совпадают, в частности интегральное уравнение Фредгольма (34). Однако есть и существенные отличия, здесь уравнение (34) выполняется на полной окружности, а в работе [16] на дуге окружности. Формулы для комплексных потенциалов (33) в случае отверстия не имеют особенности, а в случае трещины содержат корневую особенность у концов трещины. В работе [17] рассмотрена задача об упругом круговом включении в пластину при наличии отслоения (трещины) на части границы. Полученное решение для потенциалов также содержит корневую особенность у концов трещины. Некоторые результаты решения задачи об эллиптическом включении представлены в работах [18, 19].

5. Результаты расчетов напряжений. Были выполнены расчеты напряжений на линии раздела материалов при растяжении пластины напряжениями на бесконечности $\sigma_{22}^{\infty} = p$. Предположим, что $\sigma_{11}^{1\infty} = \sigma_{11}^{2\infty} = \sigma_{11}^{\infty}$. Для напряжений на бесконечности должны выполняться уравнения (5), из второго уравнения находим

$$\sigma_{11}^{\infty} = \frac{(3 - \varkappa_1)\mu_2 - (3 - \varkappa_2)\mu_1}{(1 + \varkappa_1)\mu_2 - (1 + \varkappa_2)\mu_1} \sigma_{22}^{\infty}.$$

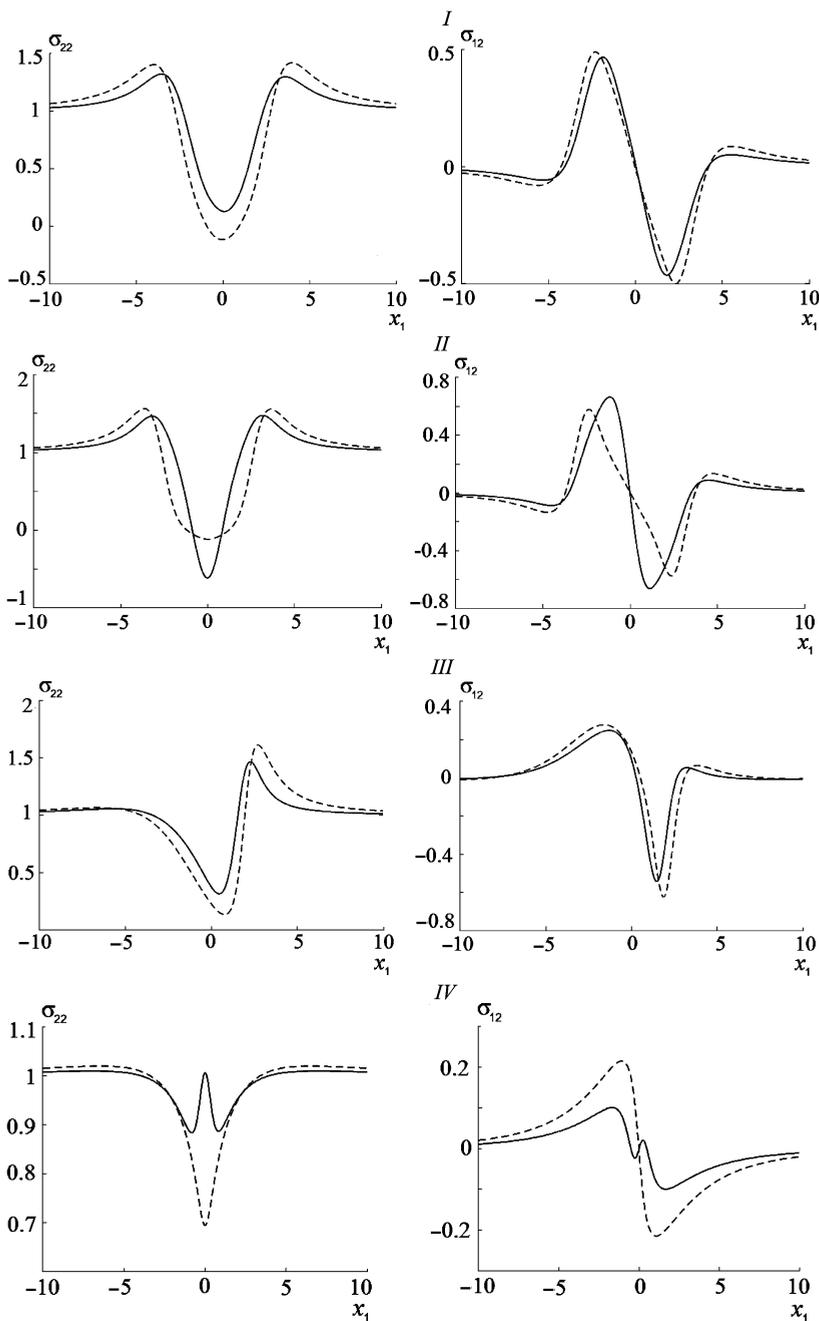


Рис. 2. Напряжения при разных d и α
 I – $d = 2$, $\alpha = 0^\circ$; II – $d = 1.5$, $\alpha = 0^\circ$; III – $d = 3$, $\alpha = 45^\circ$; IV – $d = 3.5$, $\alpha = 90^\circ$.

В частном случае $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ будет $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, тогда

$$\sigma_{11}^\infty = \frac{3 - \varkappa}{1 + \varkappa} \sigma_{22}^\infty.$$

При плоской деформации и плоском напряженном состоянии имеем соответственно

$$\sigma_{11}^{\infty} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22}^{\infty}, \quad \sigma_{11}^{\infty} = \nu \sigma_{22}^{\infty}.$$

Рассмотрены следующие параметры материалов: $\mu_2/\mu_1 = 3$, $\mu_2/\mu_1 = 1/3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Полуоси эллипса: $a = 3$, $b = 1$ (безразмерные величины), расстояние от центра эллипса до межфазной линии — оси x_1 варьировалось: $d = 3$, $d = 2$, $d = 1.5$, угол $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$.

На рис. 2, I–IV показаны нормальные σ_{22} и касательные σ_{21} напряжения на линии раздела материалов для отношения модулей упругости $\mu_2/\mu_1 = 1/3$ — сплошная линия и $\mu_2/\mu_1 = 3$ — пунктирная.

Напряжения на графиках безразмерны, они отнесены к величине p . При $|x_1| \rightarrow \infty$ напряжения $\sigma_{22} \rightarrow 1$, а напряжения $\sigma_{12} \rightarrow 0$. В окрестности точки $x_1 = 0$ нормальные напряжения имеют минимум, величина которого зависит от отношения модулей упругости полуплоскостей μ_2/μ_1 . Уменьшение напряжений связано с тем, что эллипс вытягивается в направлении оси x_2 и сжимается в направлении оси x_1 , это вызывает сжатие материала в окрестности отверстия. При $d = 1.5$ расстояние контура эллипса от границы раздела равно 0.5, существенно сократить его пока не удалось. Матрица алгебраических уравнений в методе коллокации становится плохо обусловленной. Когда отверстие расположено достаточно далеко от линии раздела материалов, величина и характер распределения напряжений в основном определяются модулем упругости полуплоскости, где оно расположено. Если же отверстие расположено близко к линии раздела, то напряжения существенно зависят от модулей упругости обеих полуплоскостей, как показывает рис. 2, II.

На рис. 2, IV представлены графики напряжений для параметров $d = 3.5$, $\alpha = 90^\circ$. Расстояние от контура эллипса до линии раздела такое же, как и на рис. 2, II. Сравнение рис. 2, IV и II, III показывает их существенное отличие. Когда малая полуось эллипса стремится к нулю, в пределе вместо эллипса получаем разрез. В работе [13] рассмотрен случай разреза, расположенного в окрестности линии раздела, и приведены графики напряжений на этой линии для разных углов α . Для углов $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ эти графики похожи на приведенные на рис. 2, I, II и IV соответственно.

6. Заключение. В работе получено аналитическое решение плоской задачи для двухкомпонентной плоскости с эллиптическим отверстием, расположенным в нижней полуплоскости. Для решения задачи использованы методы комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили, конформных отображений и суперпозиции. Также были выполнены численные расчеты напряжений на линии раздела методом конечных элементов, реализованным в некоммерческом программном пакете FreeFem++. Рассматривалась квадратная пластина с длиной стороны, равной 20. Контур эллиптического отверстия и границы $x_1 = \pm 10$ предполагались свободными, на $x_2 = \pm 10$ были заданы напряжения $\sigma_{22} = p$, $\sigma_{21} = 0$. На линии сопряжения полупластин $x_2 = 0$ имели место условия непрерывности напряжений и перемещений. Остальные параметры задачи остались теми же, что и при построении графиков, представленных на рис. 2. Сравнение результатов численных экспериментов с аналитическими решениями показало, что величины нормальных и касательных напряжений на линии соединения материалов почти полностью совпадают.

Литература

1. Craciun E. M., Barbu L. Compact closed form solution of the incremental plane states in a prestressed elastic composite with an elliptical hole // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). 2015. Vol. 95. P. 193–199.

2. Wang X.-F., Xing F., Hasebe N., Prasad P. B. N. A point dislocation interacting with an elliptical hole located at a Bi-material interface // *Appl. Mechanics and Materials*. 2012. Vol. 151. P. 75–79.
3. Mogilevskaya S. G., Crouch S. L. A Galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions // *Intern. J. for Numerical Methods in Eng.* 2001. Vol. 52. P. 1069–1106.
4. Wang J., Crouch S. L., Mogilevskaya S. G. A complex boundary integral method for multiple circular holes in an infinite plane // *Eng. Anal. with Boundary Elements*. 2003. Vol. 27. P. 789–802.
5. Dejoie A., Mogilevskaya S. G., Crouch S. L. A boundary integral method for multiple circular holes in an elastic half-plane // *Eng. Anal. with Boundary Elements*. 2006. Vol. 30. P. 450–464.
6. Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane // *Intern. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1997. Vol. 21. P. 77–89.
7. Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity // *Intern. J. Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 2795–2804.
8. Kooi C. B., Verruijt A. Interaction of circular holes in an infinite elastic medium // *Tunneling and Underground Space Technology*. 2001. Vol. 16. P. 59–62.
9. Wang X.-F., Hasebe N. Green's function of a point dislocation for the bending of a composite infinite plate with an elliptical hole at interface // *Archive of Appl. Mechanics*. 2001. Vol. 71. P. 233–248.
10. Ukadgaonker V. G., Awasare P. J. Interaction effect of rectangular hole and arbitrarily oriented elliptical hole or crack in infinite plate subjected to uniform tensile loading at infinity // *Indian J. Eng. and Materials Sciences*. 1999. Vol. 6. P. 125–134.
11. Okumura M., Hasebe N., Nakamura T. Bimaterial plane with elliptic hole under uniform tension normal to the interface // *Intern. J. Fracture*. 1995. Vol. 71. P. 293–310.
12. Sun Y.-F., Peng Y.-Z. Analytic solutions for the problems of an inclusion of arbitrary shape embedded in a half-plane // *Appl. Math. and Computation*. 2003. Vol. 140. P. 105–113.
13. Малькова Ю. В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 160 с.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
15. Греков М. А. Слабо искривленная трещина около границы соединения двух различных материалов // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2008. Вып. 1. С. 93–101.
16. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Трещина в форме дуги окружности, расположенная вблизи поверхности раздела материалов // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2010. Вып. 1. С. 93–104.
17. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Иванов В. А. Бесконечная плоскость с круговым включением, имеющим отслоение на части границы // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2009. Вып. 4. С. 152–166.
18. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Deformation of bi-material plane with elliptic hole // 2nd Intern. Conf. on Emission Electronics (ICEE). 2014. P. 1–5. DOI: 10.1109/Emission.2014.6893967 (URL: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6893967&newsearch=true&queryText=Deformation of bi-material plane with elliptic hole>; дата обращения: 19.05.2016).
19. Malkov V. M., Malkova Yu. V. The state of stress of bi-material plate with an elliptic hole // Intern. Conf. on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading. 2015. P. 1–4. DOI: 10.1109/Polyakhov.2015.7106753 (URL: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7106753&newsearch=true&queryText=The state of stress of bi-material plate with an elliptic hole>; дата обращения: 19.05.2016).

Для цитирования: Мальков В. М., Малькова Ю. В., Петрухин Р. Р. Взаимодействие эллиптического отверстия с межфазной границей двух полуплоскостей // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2016. Вып. 3. С. 73–87. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.307

References

1. Craciun E. M., Barbu L. Compact closed form solution of the incremental plane states in a pre-stressed elastic composite with an elliptical hole. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 2015, vol. 95, pp. 193–199.
2. Wang X.-F., Xing F., Hasebe N., Prasad P. B. N. A point dislocation interacting with an elliptical hole located at a Bi-material interface. *Appl. Mechanics and Materials*, 2012, vol. 151, pp. 75–79.
3. Mogilevskaya S. G., Crouch S. L. A Galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions. *Intern. J. for Numerical Methods in Eng.*, 2001, vol. 52, pp. 1069–1106.
4. Wang J., Crouch S. L., Mogilevskaya S. G. A complex boundary integral method for multiple circular holes in an infinite plane. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 2003, vol. 27, pp. 789–802.

5. Dejoie A., Mogilevskaya S. G., Crouch S. L. A boundary integral method for multiple circular holes in an elastic half-plane. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 2006, vol. 30, pp. 450–464.
6. Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane. *Intern. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1997, vol. 21, pp. 77–89.
7. Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity. *Intern. J. Solids and Structures*, 1998, vol. 35, pp. 2795–2804.
8. Kooi C. B., Verruijt A. Interaction of circular holes in an infinite elastic medium. *Tunneling and Underground Space Technology*, 2001, vol. 16, pp. 59–62.
9. Wang X.-F., Hasebe N. Green's function of a point dislocation for the bending of a composite infinite plate with an elliptical hole at interface. *Archive of Appl. Mechanics*, 2001, vol. 71, pp. 233–248.
10. Ukadgaonker V. G., Awasare P. J. Interaction effect of rectangular hole and arbitrarily oriented elliptical hole or crack in infinite plate subjected to uniform tensile loading at infinity. *Indian J. Eng. and Materials Sciences*, 1999, vol. 6, pp. 125–134.
11. Okumura M., Hasebe N., Nakamura T. Bimaterial plane with elliptic hole under uniform tension normal to the interface. *Intern. J. Fracture*, 1995, vol. 71, pp. 293–310.
12. Sun Y.-F., Peng Y.-Z. Analytic solutions for the problems of an inclusion of arbitrary shape embedded in a half-plane. *Appl. Math. and Computation*, 2003, vol. 140, pp. 105–113.
13. Malkova Yu. V. *Nekotorye zadachi dlya dvukhkomponentnoy ploskosti s krivolinyeynymi treshchinami* [Some problems for bi-material plane with curvilinear cracks]. Saint Petersburg, Saint Petersburg State University Publ., 2008, 160 p. (In Russian)
14. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p. (In Russian)
15. Grekov M. A. Slabo iskrivlennaya treshchina okolo granicy soedineniya dvuh razlichnykh materialov [A slightly curved crack near the interface in dissimilar materials]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2008, issue 1, pp. 93–101. (In Russian)
16. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Treshchina v forme dugi okruzhnosti, raspolozhennaya vblizi poverhnosti razdela materialov [A circular arc crack near to an interface]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2010, issue 1, pp. 93–104. (In Russian)
17. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Ivanov V. A. Beskonechnaya ploskost s krugovym vkluyucheniem, imeyushchim otsloenie na chasti granicy [Infinite plane with circular inclusion debonding on part interface]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2009, issue 4, pp. 152–166. (In Russian)
18. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Deformation of bi-material plane with elliptic hole. *2nd Intern. Conf. on Emission Electronics (ICEE)*, 2014, pp. 1–5. DOI: 10.1109/Emission.2014.6893967 (Available at: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6893967&newsearch=true&queryText=Deformation of bi-material plane with elliptic hole](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6893967&newsearch=true&queryText=Deformation+of+bi-material+plane+with+elliptic+hole); accessed: 19.05.2016).
19. Malkov V. M., Malkova Yu. V. The state of stress of bi-material plate with an elliptic hole. *Intern. Conf. on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading*, 2015, pp. 1–4. DOI: 10.1109/Polyakhov.2015.7106753 (Available at: [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7106753&newsearch=true&queryText=The state of stress of bi-material plate with an elliptic hole](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7106753&newsearch=true&queryText=The+state+of+stress+of+bi-material+plate+with+an+elliptic+hole); accessed: 19.05.2016).

For citation: Malkov V. M., Malkova Yu. V., Petrukhin R. R. Interaction of an elliptic hole with interface of two bonded half-planes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, issue 3, pp. 73–87. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.307

Статья рекомендована к печати проф. Н. В. Егоровым.

Статья поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

Статья принята к печати 26 мая 2016 г.