Н. К. Кривулин, С. А. Губанов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Статья посвящена применению методов тропической оптимизации для решения задач сетевого планирования. Рассматривается задача определения оптимального плана проекта, который состоит в выполнении некоторого набора работ при различных ограничениях на время их начала и завершения. Критерий оптимальности плана задан как минимум максимального разброса времени завершения работ. В статье сначала формулируется задача планирования в виде обычной задачи оптимизации с ограничениями. Далее приводятся некоторые основные определения и результаты идемпотентной математики, необходимые для последующего анализа и решения задач тропической оптимизации. Описывается новая задача тропической оптимизации с ограничениями и находится ее решение. Наконец, предлагаемая задача планирования решается путем сведения к задаче тропической оптимизации, которая была исследована раньше. Представлен численный пример. Библиогр. 18 назв.

Ключевые слова: управление проектами, сетевое планирование, идемпотентное полуполе, задача тропической оптимизации.

N. K. Krivulin, S. A. Gubanov

SOLUTION OF A PROJECT SCHEDULING PROBLEM BY USING METHODS OF TROPICAL OPTIMIZATION

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The paper deals with the application of methods of tropical optimization to the solution of project scheduling problems. A problem is considered to find an optimal schedule for a project, which consists of a set of activities to be performed under various constraints on the initiation and completion times of the activities. The optimal scheduling objective takes the form of the minimum of maximum deviation between completion times of the activities. In the paper, the scheduling problem is first formulated in the form of an ordinary constrained optimization problem. Next, certain basic definitions and results of tropical mathematics are presented, required for the subsequent analysis and solution of tropical optimization problems. A new tropical optimization problem with constraints is formulated, and its solution is derived. Finally, the scheduling problem under study is solved by reduction to the tropical optimization problem, which was previously investigated. To conclude, a numerical example is given. Refs 18.

Keywords: project management, project scheduling, idempotent semifield, tropical optimization problem.

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, профессор; nkk@math.spbu.ru

Губанов Сергей Александрович — аспирант; segubanov@mail.ru

Krivulin Nikolai Kimovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor; nkk@math.spbu.ru

Gubanov Sergey Aleksandrovich — postgraduate student; segubanov@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского государственного научного фонда (проект № 16-02-00059).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

1. Введение. Задачи сетевого планирования относятся к числу наиболее распространенных для управления проектами [1–3]. Для их решения используется целый ряд подходов, включая разработанные в конце 1950-х годов метод критического пути (CPM — Critical Path Method) [4] и метод оценки и пересмотра планов (PERT — Program Evaluation and Review Technique) [5]. Задачи сетевого планирования могут быть сформулированы как задачи оптимизации, для решения которых применяются различные методы и вычислительные схемы математического программирования.

Еще один способ решения задач сетевого планирования, предложенный в работах [6–8], опирается на решение оптимизационных задач в терминах тропической математики. Тропическая (идемпотентная) математика представляет собой область, связанную с изучением теории и методов исследования полуколец с идемпотентным сложением [9–11]. Тропическая оптимизация — раздел, который занимается задачами оптимизации, сформулированными в терминах тропической математики, а также приложениями таких задач. Примеры применения методов тропической оптимизации в сетевом планировании представлены в статьях [12–17]. По сравнению с другими известными подходами (линейное, целочисленное, смешанное целочисленное и квадратичное программирование, эвристические методы и т. п.), которые обычно дают решения в виде итерационных вычислительных алгоритмов, использование тропической оптимизации позволяет для целого ряда задач сетевого планирования получить прямое решение в явном виде в компактной векторной форме.

В настоящей работе методы тропической оптимизации применяются к решению задачи оптимального планирования сроков проекта, состоящего в выполнении некоторого множества работ при различных ограничениях, накладывающихся на время их начала и завершения. Критерием оптимальности плана служит минимум максимального разброса времени завершения работ. Рассматриваемая задача представляет собой дальнейшее обобщение задач с меньшим числом ограничений, изученных в [12, 16].

В п. 2 сначала формулируется задача сетевого планирования в виде обычной задачи оптимизации с ограничениями. Далее, в п. 3 приводятся основные определения и результаты идемпотентной математики, необходимые для последующего анализа и решения задач тропической оптимизации. В п. 4 описывается новая задача тропической оптимизации с ограничениями и находится ее решение. В п. 5 рассматриваемая задача сетевого планирования решается путем сведения к задаче тропической оптимизации, которая была исследована в п. 4, и представлен численный пример.

2. Задача сетевого планирования. Рассмотрим одну из задач оптимизации, возникающих при планировании сроков выполнения работ различных проектов. Такие задачи часто сводятся к минимизации целевой функции с ограничениями, которые выражаются при помощи операций максимума, сложения и вычитания. Целевая функция задачи определяется критерием оптимальности плана, а ограничения вытекают из условий на порядок выполнения работ.

Пусть целью проекта является выполнение комплекса работ, связанных временными ограничениями типа «старт–финиш», «старт–старт», «ранний старт», «поздний старт» и «поздний финиш» [1–3]. Условия «старт–финиш» не позволяют работе завершиться до тех пор, пока не прошло некоторое предопределенное время после начала других работ. Минимальный интервал между временем начала любых двух работ определяют условия «старт–старт». Ограничения «ранний старт» задают самое раннее допустимое время начала работ. Условия «поздний старт» и «поздний финиш» указывают наиболее позднее возможное время начала и завершения работ.

Рассмотрим проект, состоящий в выполнении n работ при указанных ограничениях. Каждая работа завершается немедленно, как только оказываются выполненными заданные условия для времени ее завершения.

Для каждой работы $i = 1, \dots, n$ введем следующие обозначения: x_i — время начала работы; y_i — время завершения работы; a_{ij} — минимальный допустимый интервал времени между началом работы $j = 1, \dots, n$ и завершением i (если для некоторой работы j величина интервала a_{ij} не задана, то считаем, что $a_{ij} = -\infty$); b_{ij} — минимальный временной интервал между началом работы $j = 1, \dots, n$ и началом i (если интервал не задан, то полагаем $b_{ij} = -\infty$); g_i и h_i — наиболее раннее и наиболее позднее допустимое время начала работы соответственно; f_i — наиболее позднее допустимое время завершения работы.

С учетом введенных обозначений ограничения типа «старт–финиш» выполняются, когда справедливы неравенства

$$x_j + a_{ij} \leq y_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

из числа которых хотя бы одно принимает форму равенства. Неравенства (1) можно представить в следующем виде:

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = y_i.$$

Ограничения типа «старт–старт» записываются в форме неравенств

$$x_j + b_{ij} \leq x_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

которые равносильны одному неравенству

$$\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i.$$

Наконец, ограничения «ранний старт», «поздний старт» и «поздний финиш» представим как неравенства

$$g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i.$$

В задачах, возникающих при планировании производства в соответствии с принципом «точно в срок» (just-in-time) [18], часто требуется обеспечить завершение всех работ в одно и то же время. В качестве критерия оптимальности плана можно выбрать максимальный разброс между временем завершения всех работ, который необходимо минимизировать. С учетом введенных выше обозначений этот критерий принимает вид

$$\max_{1 \leq i \leq n} y_i - \min_{1 \leq i \leq n} y_i = \max_{1 \leq i \leq n} y_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-y_i).$$

Сформулируем задачу, которая состоит в нахождении времени начала x_i и времени завершения y_i для каждой работы $i = 1, \dots, n$, обеспечивающих одно общее время завершения всех работ насколько это возможно при заданных ограничениях. Записывая критерий оптимальности вместе с ограничениями, получим задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{1 \leq i \leq n} y_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-y_i), \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = y_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \\ & g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что задачу (2) нетрудно представить в форме задачи линейного программирования, а затем применить одну из известных вычислительных схем решения таких задач. В общем случае данный подход приводит к алгоритмическому решению и не может гарантировать получение решения в явном виде в замкнутой форме. Ниже рассматриваемая задача планирования сводится к задаче тропической оптимизации, для которой будет найдено прямое решение, выраженное в компактной векторной форме.

3. Элементы тропической математики. Приведем краткий обзор основных алгебраических определений, обозначений и предварительных результатов [10, 13, 15], необходимых для формулировки и исследования задач тропической оптимизации. Дополнительные сведения по теории и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [7, 9, 11].

3.1. Идемпотентное полуполе. Пусть $\mathbb{X}$ — множество, которое замкнуто относительно двух ассоциативных и коммутативных операций, сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и содержит их нейтральные элементы, нуль 0 и единицу 1 . Сложение обладает свойством идемпотентности, в соответствии с которым $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо так, что каждый $x \in \mathbb{X}_+$, где $\mathbb{X}_+ = \mathbb{X} \setminus \{0\}$, имеет обратный x^{-1} , удовлетворяющий равенству $x^{-1} \otimes x = 1$. Поскольку $\mathbb{X}_+$ образует группу по умножению, алгебраическая структура $\langle \mathbb{X}, 0, 1, \oplus, \otimes \rangle$ часто называется идемпотентным полуполем.

Идемпотентное сложение задает частичный порядок, согласно которому $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Считается, что частичный порядок может быть дополнен до линейного порядка на $\mathbb{X}$. Нетрудно проверить, что операции сложения и умножения монотонны по каждому аргументу, а операция обращения антитонна в смысле этого порядка. Кроме того, выполнение неравенства $x \oplus y \leq z$ равносильно выполнению пары неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$.

Для любого $x \in \mathbb{X}_+$ и целого $p > 0$ считаем, что $x^0 = 1$, $x^p = x^{p-1} \otimes x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $0^p = 0$. Как обычно, для упрощения записи знак умножения $\otimes$ далее опускаем.

Примерами рассматриваемого идемпотентного полуполя $\langle \mathbb{X}, 0, 1, \oplus, \otimes \rangle$ являются

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\max,+} &= \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle, & \mathbb{R}_{\min,+} &= \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +\infty, 0, \min, + \rangle, \\ \mathbb{R}_{\max,\times} &= \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, 0, 1, \max, \times \rangle, & \mathbb{R}_{\min,\times} &= \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, +\infty, 1, \min, \times \rangle, \end{aligned}$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

В частности, в полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ нуль 0 определен как $-\infty$, а единица 1 как 0 . Каждый элемент $x \in \mathbb{R}$ имеет обратный x^{-1} , которому отвечает $-x$ в стандартных обозначениях. Для любого $x, y \in \mathbb{R}$, степень x^y совпадает с арифметическим произведением xy . Отношение порядка, индуцированное идемпотентным сложением, соответствует обычному отношению линейного порядка на $\mathbb{R}$.

3.2. Матрицы и векторы. Обозначим множество матриц, состоящих из m строк и n столбцов, как $\mathbb{X}^{m \times n}$. Нулевой называется матрица со всеми элементами, равными 0 . Матрица, которая не имеет нулевых строк (столбцов), называется регулярной по строкам (по столбцам). Матрица является регулярной, если она регулярна по строкам и по столбцам.

Для любых согласованных по размеру матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $\mathbf{C} = (c_{ij})$ и скаляра x матричные сложение и умножение, а также умножение на скаляр определяются при помощи формул

$$\{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\mathbf{BC}\}_{ij} = \bigoplus_k b_{ik} c_{kj}, \quad \{x\mathbf{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

Эти операции обладают свойством монотонности, которое заключается в том, что из поэлементного неравенства $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ следуют поэлементные неравенства $\mathbf{A} \oplus \mathbf{C} \leq \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$, $\mathbf{AD} \leq \mathbf{BD}$ и $x\mathbf{A} \leq x\mathbf{B}$ при любых матрицах $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ подходящего размера и скаляре x . Для любой матрицы $\mathbf{A}$ ее транспонированная матрица обозначается как $\mathbf{A}^T$.

Рассмотрим квадратные матрицы из $\mathbb{X}^{n \times n}$. Матрица с элементами, равными 1 на главной диагонали и 0 — вне ее, называется единичной и обозначается $\mathbf{I}$. Для любой ненулевой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и целого $p > 0$ положим $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ и $\mathbf{A}^p = \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{A}$.

Для любой матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ее след вычисляется следующим образом:

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} \oplus \dots \oplus a_{nn}.$$

Для каждой матрицы $\mathbf{A}$ введем функцию

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A} \oplus \dots \oplus \text{tr } \mathbf{A}^n.$$

Если $\text{Tr}(\mathbf{A}) \leq 1$, определим матрицу, известную также как матрица Клини:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A} \oplus \dots \oplus \mathbf{A}^{n-1}.$$

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ множество столбцовых векторов размерности n . Нулевым вектором называется вектор $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$. Вектор, не имеющий нулевых компонент, — регулярный. Вектор, состоящий из единиц, обозначается как $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{X}^n$ определим мультипликативно сопряженное транспонирование как переход к строчному вектору $\mathbf{x}^- = (x_1^-, \dots, x_n^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq 0$, и $x_i^- = 0$ иначе. Для любых регулярных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ одного размера из неравенства $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ следует неравенство $\mathbf{x}^- \geq \mathbf{y}^-$ и наоборот.

3.3. Решение векторных неравенств. Предположим, что заданы матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{X}^m$. Требуется найти решения $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$ неравенства

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}. \quad (3)$$

Решение задачи при достаточно общих условиях дает следующий результат:

Лемма 1 [10]. Для регулярной по столбцам матрицы $\mathbf{A}$ и регулярного вектора $\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{x}$ является решением неравенства (3) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{x} \leq (\mathbf{b}^- \mathbf{A})^-.$$

Пусть теперь имеются матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, а также вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{X}^n$. Рассмотрим неравенство

$$\mathbf{Ax} \oplus \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \quad (4)$$

относительно неизвестного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$ и найдем его регулярные решения.

Лемма 2 [14]. Пусть $\mathbf{x}$ — общее регулярное решение неравенства (4). Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $\text{Tr}(\mathbf{A}) \leq 1$, то $\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{u}$ для любого регулярного вектора $\mathbf{u} \geq \mathbf{b}$;
- 2) если $\text{Tr}(\mathbf{A}) > 1$, то регулярные решения не существуют.

4. Задачи тропической оптимизации. Методы тропической математики применяются при решении различных задач оптимизации, включая задачи сетевого планирования, размещения объектов и принятия решений. Примеры решения задач сетевого планирования посредством сведения их к задачам тропической оптимизации

можно найти в работах [12–17]. Такие задачи обычно задаются в терминах минимизации (максимизации) функций на векторах с элементами из идемпотентного полуполя при ограничениях в виде векторных уравнений и неравенств. Приведем пример подобной задачи.

Пусть заданы матрица $A \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и векторы $p \in \mathbb{X}^m$ и $q \in \mathbb{X}^n$. Необходимо найти регулярные векторы $x \in \mathbb{X}^n$, для которых достигается минимум в задаче

$$\min q^- x (Ax)^- p. \quad (5)$$

В работе [12] получено следующее решение этой задачи:

Теорема 1. Пусть матрица A является регулярной по строкам, вектор p — ненулевым, а вектор q — регулярным.

Тогда минимум в задаче (5) равен $\Delta = (Aq)^- p$ и достигается на любом векторе

$$x = \alpha q, \quad \alpha > 0.$$

Один из примеров применения теоремы 1 к решению задачи оптимизации с ограничениями приведен в [12]. Рассмотрим задачу с более сложной системой ограничений.

Пусть даны матрицы $A, C \in \mathbb{X}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и векторы $p, f \in \mathbb{X}^m$ и $q, g, h \in \mathbb{X}^n$. Требуется решить относительно неизвестного вектора $x \in \mathbb{X}^n$ задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & q^- x (Ax)^- p, \\ & Bx \oplus g \leq x, \quad Cx \leq f, \\ & x \leq h. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть матрица A является регулярной по строкам, матрица C — регулярной по столбцам, а матрица B — такой, что $\text{Tr}(B) \leq 1$. Пусть вектор p — ненулевой, а векторы q, f и h — регулярные и удовлетворяют условию $q^- B^* g \leq ((f^- C \oplus h^-) B^* (q^- B^*)^-)^{-1}$.

Тогда минимум в задаче (6) равен $\Delta = (AB^* (q^- B^*)^-)^- p$ и достигается при

$$x = \alpha B^* (q^- B^*)^-, \quad q^- B^* g \leq \alpha \leq ((f^- C \oplus h^-) B^* (q^- B^*)^-)^{-1}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что для ограничения-неравенства $Bx \oplus g \leq x$ выполняются условия леммы 2. Заменим это неравенство на его решение $x = B^* u$, где $u \in \mathbb{X}^n$ — регулярный вектор такой, что $u \geq g$. В результате подстановки данного решения получим задачу относительно неизвестного вектора u :

$$\begin{aligned} \min \quad & q^- B^* u (AB^* u)^- p, \\ & CB^* u \leq f, \quad B^* u \leq h, \\ & u \geq g. \end{aligned}$$

Векторы f и h по условию регулярные. Так как матрица C регулярна по столбцам и $B^* \geq I$ по определению, матрицы B^* и CB^* также регулярны по столбцам. Следовательно, для неравенств $CB^* u \leq f$ и $B^* u \leq h$ относительно u выполняются условия леммы 1. После решения этих неравенств приходим к задаче

$$\begin{aligned} \min \quad & q^- B^* u (AB^* u)^- p, \\ & u \leq (f^- CB^*)^-, \quad u \leq (h^- B^*)^-, \\ & u \geq g. \end{aligned}$$

Рассмотрим ее без учета ограничений. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является регулярной по строкам, а вектор $\mathbf{q}$ — регулярным, матрица $\mathbf{AB}^*$ тоже будет регулярной по строкам, а вектор $(\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^-$ — регулярным. Применяя теорему 1, находим, что минимум в задаче без ограничений равен $\Delta = (\mathbf{AB}^*(\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^-)^-\mathbf{p}$ и достигается при

$$\mathbf{u} = \alpha (\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^-, \quad \alpha > 0.$$

Выясним, какие из полученных решений будут удовлетворять имеющимся ограничениям. Заметим, что неравенства $\mathbf{u} \leq (\mathbf{f}^-\mathbf{CB}^*)^-$ и $\mathbf{u} \leq (\mathbf{h}^-\mathbf{B}^*)^-$ можно записать как $\mathbf{u}^- \geq \mathbf{f}^-\mathbf{CB}^*$ и $\mathbf{u}^- \geq \mathbf{h}^-\mathbf{B}^*$ или в виде одного неравенства $\mathbf{u}^- \geq \mathbf{f}^-\mathbf{CB}^* \oplus \mathbf{h}^-\mathbf{B}^*$. Это неравенство, в свою очередь, равносильно условию $\mathbf{u} \leq (\mathbf{f}^-\mathbf{CB}^* \oplus \mathbf{h}^-\mathbf{B}^*)^-$.

Для определения значений α , при которых выполняются ограничения задачи, необходимо решить двойное неравенство

$$\mathbf{g} \leq \alpha (\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^- \leq (\mathbf{f}^-\mathbf{CB}^* \oplus \mathbf{h}^-\mathbf{B}^*)^-.$$

Решение левого и правого неравенств с помощью леммы 1 дает

$$\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*\mathbf{g} \leq \alpha \leq ((\mathbf{f}^-\mathbf{C} \oplus \mathbf{h}^-)\mathbf{B}^*(\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^-)^{-1}.$$

По условиям теоремы множество значений α , которые удовлетворяют этому неравенству, — не пусто. Возвращаясь к исходной задаче относительно вектора $\mathbf{x} = \mathbf{B}^*\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \alpha (\mathbf{q}^-\mathbf{B}^*)^-$, получаем требуемый результат. $\square$

5. Решение задачи сетевого планирования. Приведем решение задачи сетевого планирования (2), полученное путем ее представления в виде задачи тропической оптимизации.

5.1. Преобразование и решение задачи. Отметим, что запись задачи (2) в обычной форме включает только операции определения максимума, сложения и вычитания (которое сводится к вычислению обратного по сложению). Поэтому задачу можно представить с помощью операций полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Уравнения и неравенства ограничений принимают вид

$$\bigoplus_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i, \quad \bigoplus_{j=1}^n b_{ij}x_j \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем матрично-векторные обозначения

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad \mathbf{B} = (b_{ij}), \quad \mathbf{y} = (y_i), \quad \mathbf{g} = (g_i), \quad \mathbf{h} = (h_i), \quad \mathbf{f} = (f_i)$$

и запишем ограничения в векторной форме

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{Bx} \leq \mathbf{x}, \quad \mathbf{g} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{h}, \quad \mathbf{y} \leq \mathbf{f}.$$

Заметим, что неравенства $\mathbf{Bx} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{g} \leq \mathbf{x}$ эквивалентны неравенству $\mathbf{Bx} \oplus \mathbf{g} \leq \mathbf{x}$.

Рассмотрим целевую функцию задачи и представим ее с помощью выражений

$$\bigoplus_{i=1}^n y_i \bigoplus_{j=1}^n y_j^{-1} = \mathbf{1}^T \mathbf{y} \mathbf{y}^{-1}.$$

Таким образом, задача (2) в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{y} \mathbf{y}^{-1}, \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{Bx} \oplus \mathbf{g} \leq \mathbf{x}, \\ & \mathbf{x} \leq \mathbf{h}, \quad \mathbf{y} \leq \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 3. Пусть матрица A является регулярной, а матрица B — такой, что $\text{Tr}(B) \leq 1$. Пусть векторы f и h регулярные и удовлетворяют условию $1^T AB^*g \leq ((f^-A \oplus h^-)B^*(1^T AB^*)^-)^{-1}$.

Тогда минимум в задаче (7) равен $\Delta = (AB^*(1^T AB^*)^-)^{-1}$ и достигается при

$$x = \alpha B^*(1^T AB^*)^-, \quad y = \alpha AB^*(1^T AB^*)^-,$$

где параметр α определяется исходя из условия

$$1^T AB^*g \leq \alpha \leq ((f^-A \oplus h^-)B^*(1^T AB^*)^-)^{-1}.$$

Доказательство. После подстановки $y = Ax$ в целевую функцию и ограничения задачи (7) приходим к задаче

$$\begin{aligned} \min \quad & 1^T Ax(Ax)^{-1}, \\ & Bx \oplus g \leq x, \quad Ax \leq f, \\ & x \leq h. \end{aligned}$$

Полученная задача имеет вид (6), где q^- заменяется на $1^T A$ и C на A . Заметим, что, в силу регулярности матрицы A , вектор $1^T A$ является регулярным. Кроме того, $\text{Tr}(B) \leq 1$, а векторы f и h регулярны и $1^T AB^*g \leq ((f^-A \oplus h^-)B^*(1^T AB^*)^-)^{-1}$. Следовательно, для задачи выполняются условия теоремы 2.

Применяя теорему 2, находим, что минимум в задаче равен $\Delta = (AB^*(1^T AB^*)^-)^{-1}$ и достигается, когда $x = \alpha B^*(1^T AB^*)^-$ при условии, что параметр α удовлетворяет неравенству $1^T AB^*g \leq \alpha \leq ((f^-A \oplus h^-)B^*(1^T AB^*)^-)^{-1}$. Учитывая, что $y = Ax$, приходим к требуемому результату. $\square$

5.2. Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим условный проект, состоящий в выполнении $n = 3$ работ с ограничениями, которые заданы матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 = -\infty$, и векторами

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий леммы 3. Ясно, что матрица A является регулярной. Чтобы убедиться в том, что $\text{Tr}(B) \leq 1$, найдем матрицы

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления следов получаем $\text{Tr}(B) = \text{tr } B \oplus \text{tr } B^2 \oplus \text{tr } B^3 = 0 = 1$. Теперь построим матрицу Клини

$$B^* = I \oplus B \oplus B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условие $\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^* \mathbf{g} \leq ((\mathbf{f}^- \mathbf{A} \oplus \mathbf{h}^-) \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^-)^{-1}$. Для проверки этого условия сначала вычислим

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^- = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

и найдем векторы

$$\mathbf{f}^- \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^- \mathbf{A} \oplus \mathbf{h}^- = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Осталось рассчитать величины

$$\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^* \mathbf{g} = 5, \quad ((\mathbf{f}^- \mathbf{A} \oplus \mathbf{h}^-) \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^-)^{-1} = 7,$$

откуда следует, что рассматриваемое условие выполняется.

Применим лемму 3 для решения задачи. Чтобы определить минимум Δ , последовательно находим

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = (\mathbf{A} \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^-)^{-1} = 2.$$

Этот минимум достигается, если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют вид

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^- = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{B}^* (\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^*)^- = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

где параметр α удовлетворяет условию $5 \leq \alpha \leq 7$.

В частности, при условии $\alpha = 5$ имеем план с самыми ранними сроками начала работ, который задают векторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При условии $\alpha = 7$ получаем план с самыми поздними сроками начала работ, которому отвечают векторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Заключение. В статье предложено решение задачи оптимального планирования сроков выполнения проекта при помощи методов тропической оптимизации, изучающей экстремальные задачи, которые формулируются в терминах идемпотентных полуколец. Получено решение задачи планирования в явном виде в замкнутой векторной форме, удобной как для последующего анализа решений, так и для практических вычислений. Нахождение оптимального плана требует выполнения фиксированного числа матрично-векторных операций, что определяет невысокую вычислительную сложность решения и обеспечивает возможность его эффективной программной реализации.

Дальнейшие исследования будут включать применение методов тропической оптимизации к решению других классов задач планирования с учетом различных видов ограничений и критериев оптимальности плана, а также их программную реализацию.

Литература

1. Управление проектами / под ред. И. И. Мазура, В. Д. Шапиро. М.: Высшая школа, 2001. 875 с.
2. Грей К. Ф., Ларсон Э. У. Управление проектами / пер. с англ. М.: Дело и сервис, 2003. 528 с. (Gray C. G., Larson E. W. Project Management.)
3. Руководство к своду знаний по управлению проектами (Руководство PMBOK). Newtown Square: Project Management Institute, 2008. 463 p.
4. Kelley J. E. Critical-path planning and scheduling: mathematical basis // Oper. Res. 1961. Vol. 9, N 3. P. 296–320.
5. Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W. Application of a technique for research and development program evaluation // Oper. Res. 1959. Vol. 7, N 5. P. 646–669.
6. Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra // Math. Program. 1976. Vol. 10. P. 111–123.
7. Zimmermann U. Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures. Vol. 10. Annals of Discrete Mathematics. Amsterdam: Elsevier, 1981. 390 p.
8. Butkovič P., Aminu A. Introduction to max-linear programming // IMA J. Manag. Math. 2009. Vol. 20, N 3. P. 233–249.
9. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
10. Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2009. 256 с.
11. Butkovič P. Max-linear Systems. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. 272 p.
12. Krivulin N. Explicit solution of a tropical optimization problem with application to project scheduling // Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering / eds: D. Bielek, H. Walter, I. Utu, C. von Lucken. Athens: WSEAS Press, 2013. P. 39–45.
13. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications. Vol. 616 of Contemporary Mathematics / eds: G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence: AMS, 2014. P. 163–177.
14. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129.
15. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232.
16. Krivulin N. Tropical optimization problems in project scheduling // Proc. 7th Multidisciplinary Intern. Conf. on Scheduling: Theory and Applications / eds: Z. Hanzálek, G. Kendall, B. McCollum, P. Šúcha. MISTA, 2015. P. 492–506. URL: <http://schedulingconference.org/proceedings/2015/mista2015.pdf> (дата обращения: 01.04.2016).
17. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan // Ann. Oper. Res. 2015. P. 1–18.
18. T'kindt V., Billaut J. C. Multicriteria Scheduling. Berlin: Springer, 2006. 360 p.

Для цитирования: Кривулин Н. К., Губанов С. А. Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 62–72. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.306

References

1. *Upravlenie proektami [Project management]*. Eds I. I. Mazur, V. D. Shapiro. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 875 p. (In Russian)
2. Gray C. G., Larson E. W. *Project Management*. New York, McGraw-Hill Irwin, 2002, 574 p. (Russ. ed.: Gray C. G., Larson E. W. *Upravlenie proektami*. Moscow, Business and Service Publ., 2003, 528 p.)
3. *A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK Guide)*. Newtown Square, Project Management Institute, 2008, 459 p. (Russ. ed.: *Rukovodstvo k svodu znaniy po upravleniu proektami (Rukovodstvo PMBOK)*. Newtown Square, Project Management Institute, 2008, 463 p.)

4. Kelley J. E. Critical-path planning and scheduling: mathematical basis. *Oper. Res.*, 1961, vol. 9, no. 3, pp. 296–320.
5. Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. E., Fazar W. Application of a technique for research and development program evaluation. *Oper. Res.*, 1959, vol. 7, no. 5, pp. 646–669.
6. Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra. *Math. Program.*, 1976, vol. 10, pp. 111–123.
7. Zimmermann U. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*. Vol. 10. Annals of Discrete Mathematics. Amsterdam, Elsevier Press, 1981, 390 p.
8. Butkovič P., Aminu A. Introduction to max-linear programming. *IMA J. Manag. Math.*, 2009, vol. 20, no. 3, pp. 233–249.
9. Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N. *Idempotentnii analiz i ego primeneniye v optimal'nom upravlenii* [*Idempotent analysis and its applications in optimal control*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, 144 p. (In Russian)
10. Krivulin N. K. *Metody idempotentnoi algebrы v zadachah modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [*Methods of idempotent algebra for problems in modeling and analysis of complex systems*]. Saint Petersburg, Saint Petersburg University Publ., 2009, 256 p. (In Russian)
11. Butkovič P. *Max-linear Systems*. Springer Monographs in Mathematics. London, Springer Press, 2010, 272 p.
12. Krivulin N. Explicit solution of a tropical optimization problem with application to project scheduling. *Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering*. Eds D. Bielek, H. Walter, I. Utu, C. von Lucken. Athens, WSEAS Press, 2013, pp. 39–45.
13. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: complete solution and application example. *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications*. Vol. 616 of Contemporary Mathematics. Eds G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence, AMS, 2014, pp. 163–177.
14. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 5, pp. 1107–1129.
15. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.*, 2015, vol. 468, pp. 211–232.
16. Krivulin N. Tropical optimization problems in project scheduling. *Proc. 7th Multidisciplinary Intern. Conf. on Scheduling: Theory and Applications*. Eds Z. Hanzálek, G. Kendall, B. McCollum, P. Šucha. MISTA, 2015, pp. 492–506. (Available at: <http://schedulingconference.org/proceedings/2015/mista2015.pdf>; accessed: 01.04.2016).
17. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan. *Ann. Oper. Res.*, 2015, pp. 1–18.
18. T'kindt V., Billaut J. C. *Multicriteria Scheduling*. Berlin, Springer Press, 2006, 360 p.

For citation: Krivulin N. K., Gubanov S. A. Solution of a project scheduling problem by using methods of tropical mathematics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, issue 3, pp. 62–72. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.306

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2016 г.

Статья принята к печати 26 мая 2016 г.