

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра механики управляемого движения

Филиппов Кирилл Игоревич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Стабилизация движения спутника на
круговой орбите по смешанному критерию**

010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика и
программирование

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Потоцкая И.Ю

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	4
Обзор литературы	5
Глава 1. Уравнения управляемого движения спутника	6
1.1. Уравнения движения спутника.	6
1.2. Управление	7
1.3. Управляемая система дифференциальных уравнений.	8
1.4. Постановка задачи оптимального управления движением ИСЗ.	8
Глава 2. Построение оптимального управления	9
2.1. Вычисление точек переключения.	11
Выводы	13
Заключение	14
Список литературы	15
Приложение.	15

Введение

Данная работа рассматривает алгоритм нахождения оптимального управления движением искусственного спутника Земли (далее ИСЗ). Управление считается оптимальным в том случае, если оно удовлетворяет поставленным критериям оптимальности – функционалу быстродействия и функционалу расхода топлива. Рассматриваемое управление представляет из себя кусочно-постоянную функцию с конечным набором импульсов и направлено на гашение собственных колебаний спутника, то есть на обращение их в ноль в момент времени T , которое соответствует моменту окончания управления.

Упомянутая задача находит применение в случаях, когда необходимо на протяжении долгого времени удерживать ИСЗ в определенном положении. Учитывая ограниченность топливных ресурсов, от которых продолжительность пребывания спутника на орбите зависит непосредственно, необходимость минимизировать затраты на топливо становится очевидной. Одновременно с этим ставится вопрос о возвращении спутника к фиксированному положению за кратчайшее время.

Таким образом, на основе описанной проблемной области исследования для данной работы определяется следующая цель: требуется построить алгоритм, решающий проблему выбора оптимального управления движением спутника, с целью минимизировать расход топлива и время, необходимые на возвращение спутника к его начальному заданному положению.

В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

- 1) построение и обоснование математической модели движения ИСЗ.
- 2) нахождение алгоритма для вычисления точек переключения.
- 3) программная реализация полученного алгоритма.

Постановка задачи

Постановка задачи оптимального управления движением спутника может быть определена следующим образом: при заданном числе импульсов допустимого управления найти точки переключения этого управления (включая момент окончания управления T), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала.

Обзор литературы

Задача поиска оптимального управления не нова и активно рассматривалась во второй половине XX века. На это указывает, к примеру, статья [2], в которой излагается большая часть теории, посвященной принципу максимума и вопросам оптимального управления. Более полная информация, касательно вышеупомянутого принципа может быть найдена в источниках [3] и [4].

Основные этапы развития данной области знаний, а также теоретическая база и основные подходы к решению задач подобного рода изложены в [5] и [6].

В статье [7] рассматривается алгоритм отыскания решения многокритериальных задач оптимизации, который также находят отражение в квалификационной работе.

1. Уравнения управляемого движения спутника

Для того, чтобы точнее сформулировать постановку задачи оптимального управления движением спутника, необходимо сперва определить уравнения, описывающие его движение, и структуру управления. Данные шаги описаны в этой главе.

1.1. Уравнения движения спутника

Рассмотрим движение спутника относительно его центра масс. В некоторых случаях, такое движение может трактоваться как вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Такое движение описывается при помощи следующих уравнений Эйлера [1, с.41].

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= a\omega_z + u_1 \\ \dot{\omega}_z &= -a\omega_x + u_2 \\ \dot{\omega}_y &= u_3\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $a = \frac{\omega_y(I_y - I)}{I} > 0$, управления u_1 и u_2 есть отношение соответствующего реактивного момента к моменту инерции I , u_3 – отношение реактивного момента относительно оси C_y к I_y . Положим $u_3 = 0$, а u_1 и u_2 ограничим следующими соотношениями: $-h_i \leq u_k \leq h_i$, $i = 1, 2$. Более подробно остановимся на управлении U и его структуре в следующем параграфе этой главы.

Произведем замену $x_1 = \omega_x$, $x_2 = \omega_z$. Тогда уравнения движения (1) примут следующий вид:

$$\dot{x}_1 = ax_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -ax_1 + u_2\tag{1.2}$$

где $a = \text{const} > 0$.

1.2. Управление

Будем рассматривать управление в U следующем виде $U = (u_1, u_2)$

$$u_k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \widetilde{t}_i^k) \quad (1.3)$$

Управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, состоящую из положительных и отрицательных ступеней. Число r_k - количество положительных, q_k - количество отрицательных ступеней компоненты u_k управления U . Моменты времени t_i^k и \widetilde{t}_i^k - моменты переключения соответственных ступеней, $t_i^k, \widetilde{t}_i^k \in [0, T]$.

$$H(t - t_i^k) = \begin{cases} 1, & t - t_i^k \geq 0 \\ 0, & t - t_i^k < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Функция (1.4) – функция Хевисайда единичного скачка.

Структура такого управления изображена на Рис.1.

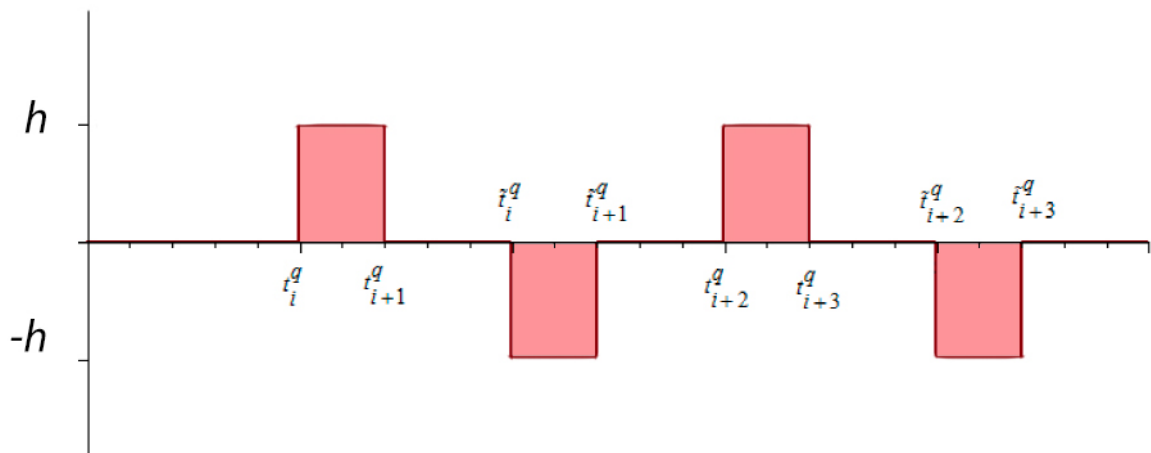


Рис.1. Структура управления u_k

1.3. Управляемая система дифференциальных уравнений

Перепишем систему (1) в векторном виде:

$$\dot{x} = Ax + U \quad (1.5)$$

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}) \quad (1.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = (u_1, u_2)$$

Вычислим собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = +ai, \lambda_2 = -ai \quad (1.7)$$

1.4. Постановка задачи оптимального управления вращением ИСЗ

Далее будем рассматривать следующую постановку задачи:

Для собственных частот системы (1.5) при заданных начальных условиях (1.6) найти точки переключения управления (1.3) такие, чтобы они удовлетворяли необходимым условиям экстремума функционала [7, с.98].

$$J = \alpha \int_0^T dt + (1 - \alpha) \int_0^T |u_1| + |u_2| dt$$

при выполнении граничного условия $x(T) = 0$.

Решение поставленной задачи основывается на алгоритме для случая чисто мнимых собственных значений матрицы A системы (1.5) [1, п.1.2.2] с поправкой на структуру функционала. Алгоритм отыскания точек переключения рассматривается в следующей главе.

2. Построение оптимального управления

Первый шаг к построению оптимального управления заключается в нахождении матрицы перехода C . Матрица перехода ищется, исходя из следующих соображений:

$$J_A C = CA,$$

где J_A – форма Жордана матрицы A .

Найдя матрицу перехода, можем переписать начальные условия и выписать решение задачи по формуле Коши.

$$y_0 = Cx_0 \quad (2.1)$$

$$y_1 = y_{10} e^{iat} + e^{iat} \int_0^t \sum_{k=1}^n c_{1k} u_k e^{-iat} dt \quad (2.2)$$

$$y_2 = y_{20} e^{-iat} + e^{-iat} \int_0^t \sum_{k=1}^n c_{2k} u_k e^{iat} dt$$

Перепишем решение задачи с учетом структуры управления u_k (1.3):

$$y_1 = \{y_{10} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{1k} h_k [F_1^k - iF_2^k]\} \cos at + \{iy_{10} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{1k} h_k [F_1^k - iF_2^k]\} \sin at + \frac{i}{a} \sum_{k=1}^n c_{1k} u_k$$

$$y_2 = \{y_{20} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{2k} h_k [F_1^k + iF_2^k]\} \cos at + \{-iy_{20} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{2k} h_k [F_1^k + iF_2^k]\} \sin at - \frac{i}{a} \sum_{k=1}^n c_{2k} u_k$$

Здесь

$$F_1^k = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) \cos at_i^k + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \tilde{t}_i^k) \cos a \tilde{t}_i^k$$

$$F_2^k = \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) \sin at_i^k + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \tilde{t}_i^k) \sin a \tilde{t}_i^k$$

Для выполнения граничных условий необходимо, чтобы слагаемые в фигурных скобках были равны нулю в момент окончания работы управления:

$$y_{10} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{1k} h_k [F_1^k - iF_2^k] = 0 \quad (2.3)$$

$$y_{20} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n c_{2k} h_k [F_1^k + iF_2^k] = 0$$

Разобьем новые начальные условия (2.1) и коэффициенты матрицы C на вещественные и мнимые части:

$$\begin{aligned} y_{10} &= y_{10}^{re} + iy_{10}^{im}, \quad y_{20} = y_{20}^{re} + iy_{20}^{im} \\ c_{1k} &= c_{1k}^{re} + ic_{1k}^{im}, \quad c_{2k} = c_{2k}^{re} + ic_{2k}^{im} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставим новые начальные условия (2.4) в граничные условия(2.3):

$$K_1 = y_{10}^{re} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n h_k [c_{1k}^{im} F_1^k - c_{1k}^{re} F_2^k] = 0$$

$$K_2 = y_{20}^{im} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n h_k [c_{2k}^{re} F_1^k + c_{2k}^{im} F_2^k] = 0$$

Запишем функционал с учетом структуры управления u_k (1.3)

$$J_{lagrange} := \alpha \cdot Tf + (1 - \alpha) \cdot \left[h_1 \left(\sum_{i=1}^{2r_1} (-1)^i t_i[1] + \sum_{i=1}^{2q_1} (-1)^i \tilde{t}_i[1] \right) + h_2 \left(\sum_{i=1}^{2r_2} (-1)^i t_i[2] + \sum_{i=1}^{2q_2} (-1)^i \tilde{t}_i[2] \right) \right]$$

где Tf - конечный момент управления, а число α - постоянная в интервале $[0..1]$, весовой коэффициент. Будем решать задачу на безусловный минимум функционала, вводя множители Лагранжа λ_1 и λ_2 :

$$R = J_{lagrange} + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$$

Теперь, можем воспользоваться формулами для вычисления точек переключения, приведенных в [1, п.1.2.2].

2.1 Вычисление точек переключения

Для описанной в первой главе задачи о нахождения оптимального управления движением спутника, вращающегося вокруг неподвижной точки, матрица перехода C будет иметь следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Тогда, начальные условия (2.1) можно записать следующим образом:

$$y_0 = C * x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 - ix_2^0 \\ x_1^0 + ix_2^0 \end{pmatrix}$$

Разделим коэффициенты матриц на вещественные и мнимые части

$$C^{re} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^{im} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим новые начальные условия, в соответствии с алгоритмом, предложенном в начале данной главы, ограничившись рассмотрением только первой строки, так как они линейно зависимы. Получим следующее:

$$y_{10}^{re} = x_1^0, y_{10}^{im} = x_2^0$$

Средний момент включения компоненты управления может быть вычислен посредством следующего выражения

$$\sin(at_1) = (-1) \frac{(-y_{10}^{re} - y_{10}^{im})(\alpha - 1)}{\sqrt{2(y_{10}^{re}{}^2 + y_{10}^{im}{}^2)}}$$

В свою очередь ширина управления может быть вычислена из

$$\cos(a\Delta_1) = \frac{y_{10}^{re}}{(1 - \alpha)|\lambda_1| \sqrt{2(y_{10}^{re}{}^2 + y_{10}^{im}{}^2)}}$$

Множитель Лагранжа λ_1 находится по формуле

$$\lambda_1 = \pm \frac{2x_1^0(-1 + \alpha)^2[h_1(r_1 + q_1) + h_2(r_2 + q_2)]}{(x_1^{0^2} + x_2^{0^2})(4(h_1(r_1 + q_1) + h_2(r_2 + q_2))^2 - a^2(x_1^{0^2} + x_2^{0^2}))}$$

Здесь r_k, q_k – количество положительных и отрицательных ступеней управления для компоненты u_k , соответственно. Зная средний момент управления и его ширину можем перейти к нахождению остальных точек управления по следующим соотношениям:

$$t_1^k = t_k - \Delta_k, t_2^k = t_k + \Delta_k,$$

t_1^k, t_2^k – моменты включения и выключения первой положительной ступени управления.

Найдем теперь моменты включения и выключения первой отрицательной ступени управления:

$$\widetilde{t}_1^k = t_1^k + \frac{\pi}{a}, \widetilde{t}_2^k = t_2^k + \frac{\pi}{a}$$

Оставшиеся точки управления зависят от количества ступеней и могут быть вычислены:

$$t_{i+2}^k = t_i^k \pm \frac{2\pi}{a}; \widetilde{t}_{i+2}^k = \widetilde{t}_i^k \pm \frac{2\pi}{a};$$

Выводы

Полученный алгоритм позволяет находить точки переключения, удовлетворяющие критерию экстремума составного функционала, однако встает вопрос об его оптимальности, так как он непосредственно зависит от константы, выбор которой остается нетривиальной задачей. Данная переменная может трактоваться, как весовой коэффициент для функционала, который определяет значимость каждого из рассматриваемых критериев – времени или затрат на топливо. Работа [7] определяет критерий выбора такой переменной, основываясь на игровых теориях, но, к сожалению, на практике вычисления такого рода оказываются достаточно трудоёмкими и реально решается только ограниченное число задач, подходящих под ряд жестко детерминированных условий.

Многокритериальная оптимизация, в целом, формулируется достаточно расплывчато, потому как в тот или иной момент времени так или иначе отдается предпочтение конкретному критерию. Это требует наличия некоторого суперкритерия. Например, таковым может выступать введение границ для некоторых критериев или их упорядочивание.

Заключение

В ходе написания работы были изучены алгоритмы нахождения оптимального управления движением с рассмотрением многокритериальной оптимизации. Получен модифицированный алгоритм нахождения точек переключения для кусочно-постоянного управления. Совместно с этим была разработана программа в прикладном пакете Maple компании Maplesoft, посредством которой и было получено описанное в работе решение.

Список литературы

1. Бабаджаниянц Л.К., Потоцкая И.Ю. Управление по критерию расхода в механических системах. Спб, Изд-во СПбГУ, 2003.
2. Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума, Изв.АН СССР. Сер. матем., 1960, том 24, выпуск 1, С.3–42
3. Бушуев А.Ю. Введение в оптимальное управление. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013.
4. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Москва, Изд-во МГУ им. Ломоносова, 2004
5. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008.
6. Петров Ю. П. Очерки истории теории управления. — СПб.:Изд-во «БХВ-Петербург»,2012.
7. Прасад У. К., Сарма И. Дж., Многокритериальные задачи оптимального управления: игровое кооперативное решение по Нэш-Харсани, Автомат. и телемех., 1975, выпуск 6, С.95–105

Приложение

1. Нахождение матрицы перехода C

```
restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :
A := matrix([[0, -b·p0], [b·p0, 0]]);
J := jordan(A);
F := matrix(2, 2) : L := multiply(J, F); R := multiply(F, A);
C := Matrix(2, 2) :
for i from 1 to 2 do
for j from 1 to 2 do
Temp[i] := solve({L[i, 1] = R[i, 1], L[i, 2] = R[i, 2]}, {F[i, 1], F[i, 2]})
C[i, j] := rhs(Temp[i][j]);
end do;
end do;
convert(C, Matrix) :
C := subs(F[1, 1] = 1, F[2, 1] = 1, C);
multiply(J, C) = multiply(C, A)
```

$$\begin{bmatrix} -Ip0 b & -b p0 \\ Ip0 b & -b p0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ip0 b & -b p0 \\ Ip0 b & -b p0 \end{bmatrix}$$

2. Нахождение точек переключения

```
restart :
with(linalg) :
with(LinearAlgebra) :
#матрица системы в векторном виде
A := matrix([[0, a], [-a, 0]]);
#вектор начальных условий
x := vector([x1, x2]) :

x1 := 'x1';
x2 := 'x2';
alpha := 0.775;
a := 0.00007292123518·sqrt(3);
Матрица перехода для данной линейной системы;
C := matrix([[1, -i], [1, i]]);
Пересчитаем начальные условия;
y0 := multiply(C, x); #новые начальные условия
Разбиение на вещественные и мнимые части начального условия
Cre[1] := 1 : Cim[1] := 0 :
Cre[2] := 0; Cim[2] := -1;
y0re := x1; y0im := -x2;
```


#Задаем количество ступеней, в которое требуется
#Определим функцию знака

$m := [0, 1]$:
 $\chi(k) := (-1)^{m[k]} \cdot \text{sign}(\text{evalf}(y0re \cdot \text{Cim}[k] - y0im \cdot \text{Cre}[k]))$:

$\chi(2)$:
 $h := 10^{-7}$;
 $r1 := 1; r2 := 1; q1 := 1; q2 := 1$;

Находим необходимый множитель Лагранжа;

$\text{lambda} := \text{evalf}\left(2 \cdot y0re \cdot (-1 + \alpha)^2 \cdot \frac{[h(r1 + q1 + r2 + q2)]}{\text{sqrt}((y0re^2 + y0im^2) \cdot 4[h(r1 + r2 + q1 + q2)]^2 - a^2 \cdot (y0re^2 + y0im^2))}\right)$;

Вычисляем ширину управления;

$\text{width_result} := \text{evalf}\left(\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{\text{lambda}^2 \cdot (y0re^2 + y0im^2)} (\text{Cim}[2]^2 + \text{Cre}[2]^2) - y0re^2}{|\text{lambda}| \cdot \sqrt{(y0re^2 + y0im^2)} (\text{Cim}[2]^2 + \text{Cre}[2]^2)}\right)}{a}\right)$;

Момент первого включения для канала управления;

$\text{timef2} := \sin(a \cdot \text{time2}) = \frac{(-1 + \alpha) \cdot (y0re \cdot \text{Cim}[2] - y0im \cdot \text{Cre}[2])}{\chi(2) \cdot \sqrt{(y0re^2 + y0im^2)} (\text{Cim}[2]^2 + \text{Cre}[2]^2)}$;

$\text{time_result} := \text{evalf}(\text{solve}(\text{timef2}, \text{time2}))$;

$t1 := \text{time_result} - \text{width_result}$;
 $t2 := \text{time_result} + \text{width_result}$;
 $t3 := \text{evalf}\left(t1 + \frac{\text{Pi}}{a}\right)$;
 $t4 := \text{evalf}\left(t2 + \frac{\text{Pi}}{a}\right)$;