

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА КОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ АСТРОДИНАМИКИ

Конюхова Олеся Игоревна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ**

Направление 010400.62
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Степенко Н. А.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	6
Глава 1. Спектр показателей Ляпунова	7
1.1. Определение спектра Ляпунова для разных классов движений динамических систем	7
1.2. Пример хаотического поведения для системы Лоренца	9
Глава 2. Расчёт спектра показателей Ляпунова методом Беннеттина	11
2.1. Линеаризация системы	11
2.2. Ортогонализация методом Грама-Шмидта	12
Глава 3. Расчёт спектра Ляпунова для ротационно-симметричной модели движения звезды	14
3.1. Описание модели движения звезды	14
3.2. Вычисление старшего показателя Ляпунова по заданному множеству значений параметров	16
3.3. Примеры различных типов движения звезды в зависимости от параметров	18
Выводы	23
Список литературы	24

Введение

Для описания реальных процессов и явлений, их возможных режимов поведения и соответствующих им изменений, происходящих с течением времени, широко используется формализованное представление этих процессов и явлений в виде динамических систем. Под динамической системой подразумевается однозначное определение понятия состояния исследуемого объекта в фиксированный момент времени и задание закона изменения (эволюции) начального состояния с течением времени, например в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X), \quad X \in E_n.$$

В таком случае траектории движений динамических систем

$$X(t, X_0, t_0), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

будут определяться начальной точкой движения X_0 и присущими этим системам динамическим характеристикам, прямо зависящим от закона эволюции (в данном примере — от вида правых частей). В зависимости от этих характеристик и начальных данных типы траекторий самих движений могут быть как регулярными (положение покоя, периодическое колебание), так и хаотическими (странный аттрактор).

В таком случае, одной из основных задач будет являться предсказание движения на сколь угодно большой временной интервал динамической системы по начальным данным, особенно с учётом возможного задания начальной точки с определённой погрешностью. При этом важно определить, какие именно динамические характеристики системы (и их значения) отвечают за точность предсказания или, наоборот, не позволяют такую возможность в принципе.

Темой данной работы является исследование хаотических режимов поведения динамических систем и определение их соответствующих динамических характеристик, так как такие системы являются очень „чуткими“ по отношению к разного рода слабым воздействиям. Эти системы являются нелинейными, так как их отклик непропорционален силе „возмущающего“ воздействия, а часто и вообще непредсказуем. В качестве примера рассмот-

рим разностную систему логистического отображения

$$x(k+1) = a \cdot x(k)(1 - x(k))$$

при параметре $a = 4$ (хаотический режим), начальной точке $x_0 = 0.12$ и возмущенной точке $\bar{x}_0 = 0.120001$. Как видно на графике (Рис. 1), траектории, начавшиеся из близких точек $x_0 = 0.12$ и $\bar{x}_0 = 0.120001$ с течением времени (достаточно быстро) расходятся и, тем самым, предсказать траекторию возмущенного движения не представляется возможным.

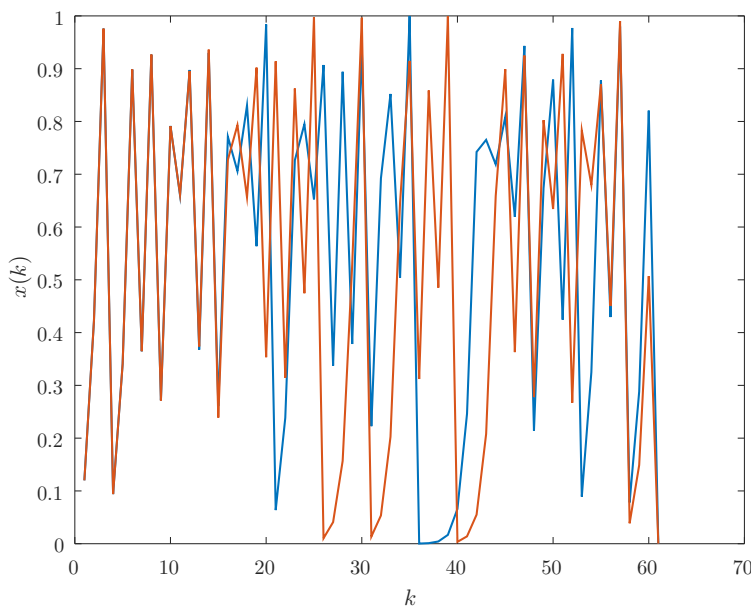


Рис. 1: График логистического отображения при $x_0 = 0.12$ (синий) и $\bar{x}_0 = 0.120001$ (красный).

Здесь можно заметить, что колебания $x(k)$ носят хаотический характер, но при этом остаются ограниченными, что достигается за счёт нелинейного ограничения вида $-ax^2(k)$, входящего в правую часть логистического уравнения. Это нелинейное ограничение отвечает за так называемый эффект „перемешивания“ фазового пространства, а так же оказывает влияние на экспоненциальную (отвечающую за линейную составляющую уравнения) скорость расхождения изначально близких траекторий.

Динамическая характеристика, отвечающая за это расхождение близких траекторий, называется показатель Ляпунова. Для логистического отображения при параметре $a = 4$ показатель Ляпунова $\lambda = 0,6923$. Причём для n -мерного фазового пространства имеет смысл рассматривать разбега-

ние (сближение) соседних траекторий по n направлениям, тем самым определяя спектр показателей Ляпунова $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Положительные показатели Ляпунова будут отвечать за расхождение траекторий и возможность хаотического поведения движений динамических систем, нулевые или отрицательные значения показателей Ляпунова — за регулярное поведение.

Постановка задачи

- Изучить метод Бенеттина вычисления спектра показателей Ляпунова для динамических систем, представленных дифференциальными уравнениями.
- Рассмотреть динамику движения звезды для одной модели представления гравитационного потенциала φ .
- Расчитать область старшего показателя Ляпунова для множества параметров модели в указанном диапазоне.
- Построить фазовые портреты хаотического движения звезды для некоторых параметров системы с положительным старшим показателем Ляпунова.
- Вычислить соответствующие спектры показателей Ляпунова для рассмотренных фиксированных параметров звёздной модели.

Глава 1. Спектр показателей Ляпунова

1.1. Определение спектра Ляпунова для разных классов движений динамических систем

До недавнего времени считалось, что любое явление в природе можно точно предсказать, необходимо лишь знать о нем достаточное количество информации. Однако, несмотря на весь прогресс в науке, прогноз погоды, например, несёт вероятностный характер.

Всё изменилось, когда ученые увидели, что в некоторых системах с малым количеством компонент может проявляться случайное поведение, причём от него не получится избавиться с помощью сбора более точных данных. Такое явление объясняется тем, что малые неопределенности растут со временем и события можно предсказать лишь на короткий промежуток времени.

Если физическую, химическую или биологическую систему можно выразить математическим законом - уравнениями или системой уравнений - получившаяся система называется динамической системой. Динамические системы, из которых теряется энергия, называется диссипативными, иначе — консервативными. Переменные, которые описывают протекание данного процесса с изменением времени, называются фазовыми координатами. Будем говорить, что в системе возникает хаотический режим, когда динамическая система проявляет чувствительность к малым изменениям начальных условий [5].

Основной характеристикой хаотических процессов является их непредсказуемость на длительный промежуток времени, так как ошибка прогнозирования увеличивается с течением времени по экспоненте.

Экспоненциальная скорость разбегания (сближения) соседних траекторий по разным направлениям определяет *спектр показателей Ляпунова*.

Одномерные показатели Ляпунова по каждой координате определяются через длины главных осей эллипсоида (Рис. 2) [8]

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}. \quad (1)$$

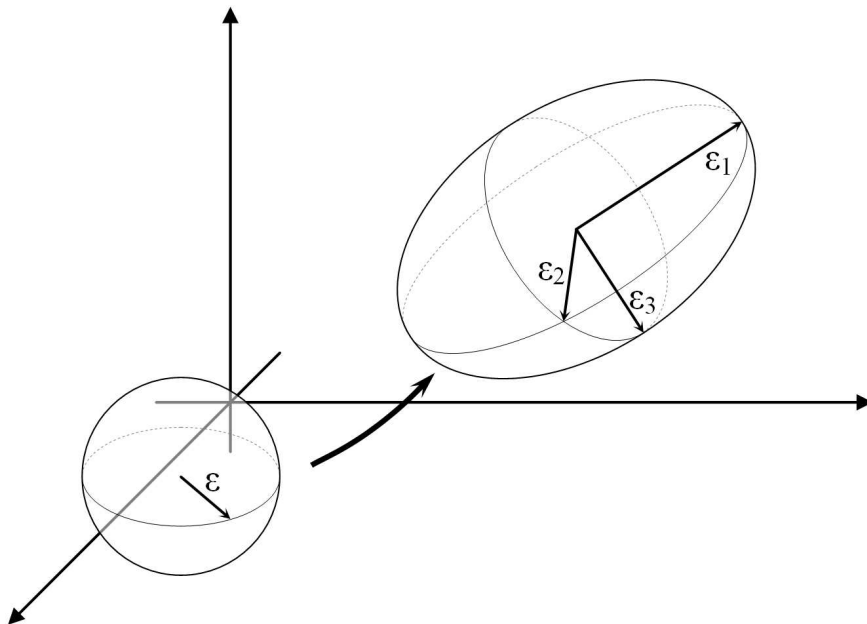


Рис. 2: Долговременная эволюция движений n-мерной сферы начальных условий

Множество всех показателей Ляпунова решений системы дифференциальных уравнений называется её спектром. Рассматривать будем только диссипативные динамические системы.

Системы с положительными показателями Ляпунова допускают наличие хаотических траекторий движения.

Аттракторы (англ. attract - притягивать) — это геометрические структуры, характеризующие поведение в фазовом пространстве по прошествии длительного времени. Можно сказать, аттрактор — это то, к чему система стремится прийти, к чему она притягивается [5].

Классификация аттракторов по спектру показателей Ляпунова:

- Одномерная система
 - (–) устойчивая точка покоя;
- Двумерная система
 - (–, –) фокус;

– $(0, -)$ предельный цикл;

- Трёхмерная система

– $(-, -, -)$ фокус;

– $(0, -, -)$ предельный цикл;

– $(0, 0, -)$ тор;

– $(+, 0, -)$ странный аттрактор (хаос).

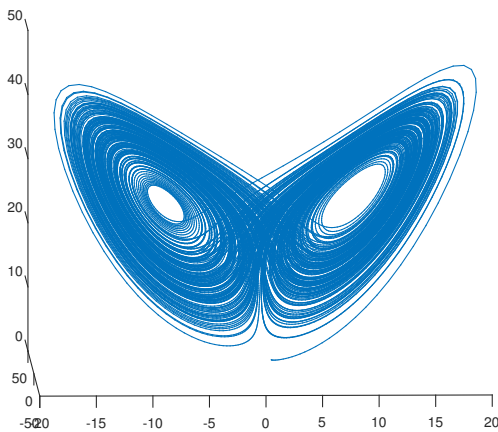
1.2. Пример хаотического поведения для системы Лоренца

В качестве иллюстрации можно привести систему Эдварда Лоренца

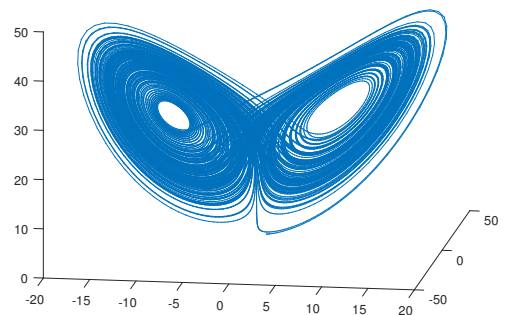
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

Изначально были приняты следующие значения параметров, при которых Лоренц обнаружил хаотические колебания: $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$.

Далее представлены два графика системы с изменением начальной точки по координате x в $0,0001$



(а) Фазовый портрет системы с начальной точкой $(1; 1; 2)$



(b) Фазовый портрет системы с начальной точкой $(1,0001; 1; 2)$

Визуально они выглядят одинаковыми, но давайте посмотрим на изменение траектории по координате x :

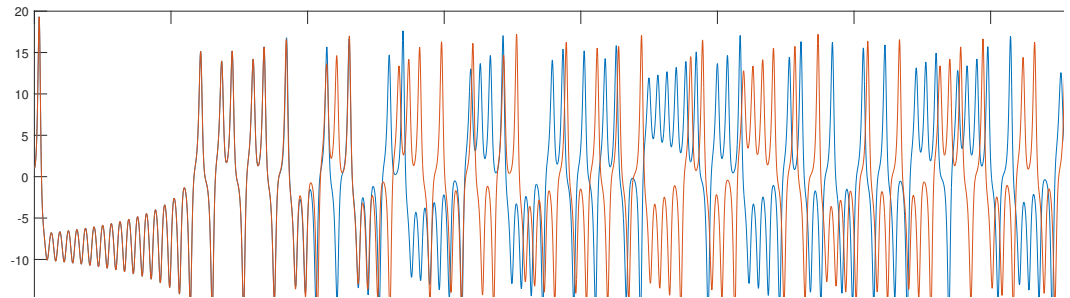


Рис. 4: Эволюция системы по координате x с разницей начальных данных в 0,0001

Можно видеть, что поведение данной системы сильно меняется при небольшом отклонении начальных условий. Для того, чтобы заранее понять, является ли система хаотической или нет, можно вычислить показатели Ляпунова, которые показывают разбегание соседних траекториях при малых изменениях начальной точки. Если имеется положительный показатель Ляпунова, то можно говорить о наличии хаоса в системе [8].

Глава 2. Расчёт спектра показателей Ляпунова методом Бенеттина

2.1. Линеаризация системы

Рассмотрим n -мерную непрерывную динамическую систему

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z, t), \quad (2)$$

где Z и F — n -мерные вектора. Перейдём к системе уравнений

$$\frac{d\delta Z}{dt} = J\delta Z, \quad (3)$$

где $J = \{J_{ij}\}$ — матрица Якоби, $J_{ij} = \partial F_i / \partial Z_j$ и δZ — переменная, отображающая некоторую область в фазовом пространстве (сфера, эллипсоид).

Тогда расчёт спектра показателей Ляпунова будем проводить следующим образом [6, 8]:

1) Выбираем положительные величины $\varepsilon \ll \text{diam } A$ (A — аттрактор) и τ — достаточно малый временной отрезок.

2) Задаём начальную точку $Z(0)$ для системы (2), определяющую опорную траекторию, и выбираем n возмущённых начальных точек $e_1(0), \dots, e_n(0)$ для системы (3) таким образом, чтобы вектора

$$\hat{e}_1(0) = e_1(0) - Z(0),$$

...

$$\hat{e}_n(0) = e_n(0) - Z(0)$$

имели длину ε и были взаимно ортогональны. Решим соответствующие задачи Коши и в момент времени τ зафиксируем точки $Z(\tau)$ и $\delta Z_1(\tau), \dots, \delta Z_n(\tau)$.

Выпишем вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(\tau) &= \delta Z_1(\tau) - Z(\tau), \\ &\dots \\ \mathbf{v}_n(\tau) &= \delta Z_n(\tau) - Z(\tau). \end{aligned}$$

2.2. Ортогонализация методом Грама-Шмидта

Выполним ортогонализацию, используя метод Грама-Шмидта, и перенормируем до длины ε :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1(\tau) &= \frac{\mathbf{v}_1(\tau)}{\|\mathbf{v}_1(\tau)\|} \cdot \varepsilon, \\ \hat{\mathbf{e}}_2(\tau) &= \frac{\mathbf{v}_2(\tau) - (\mathbf{v}_2(\tau), \hat{\mathbf{e}}_1(\tau))\hat{\mathbf{e}}_1(\tau)}{\|\mathbf{v}_2(\tau) - (\mathbf{v}_2(\tau), \hat{\mathbf{e}}_1(\tau))\hat{\mathbf{e}}_1(\tau)\|} \cdot \varepsilon, \\ &\dots \end{aligned}$$

Обозначим нормы, входящие в знаменатели, как

$$\begin{aligned} N_1(\tau) &= \|\mathbf{v}_1(\tau)\|, \\ N_2(\tau) &= \|\mathbf{v}_2(\tau) - (\mathbf{v}_2(\tau), \hat{\mathbf{e}}_1(\tau))\hat{\mathbf{e}}_1(\tau)\|, \\ &\dots \end{aligned}$$

3) Далее рассмотрим новую начальную точку $Z(\tau)$ для системы (2) и новый набор возмущённых точек для системы (3):

$$\begin{aligned} e_1(\tau) &= Z(\tau) + \hat{\mathbf{e}}_1(\tau), \\ &\dots \\ e_n(\tau) &= Z(\tau) + \hat{\mathbf{e}}_n(\tau) \end{aligned}$$

и повторим 2-ой шаг алгоритма ещё раз.

4) После r итераций спектр показателей Ляпунова (1) будет опреде-

ЛЯТЬСЯ СООТНОШЕНИЯМИ

$$\lambda_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r\tau} \sum_{j=1}^r \ln N_i(j\tau).$$

Глава 3. Расчёт спектра Ляпунова для ротационно-симметричной модели движения звезды

3.1. Описание модели движения звезды

Рассмотрим модель движения звезды в полярной системе координат (R, θ, z) , заданную системой обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\varphi, \quad (4)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор пробной звезды, φ — скалярная функция координат (R, θ, z) , задающая безразмерный гравитационный потенциал (характеризующий гравитационное поле), оператор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

и R — положительный полярный радиус, θ — полярный угол вращения (против часовой стрелки), z — вертикальная ось.

Движение пробной звезды задаётся решением задачи Коши с начальными данными:

$$\mathbf{r}(t_0) = (R_0, \theta_0, z_0)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(t_0) = (v_{R0}, v_{\theta 0}, v_{z0})^T,$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — вектор скорости движения звезды. При этом будем считать, что безразмерный потенциал φ задаётся формулами [2] вида:

$$\varphi(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(\xi)},$$

$$w(\xi) = \left(1 + \alpha^p \xi^p \right)^{1/p},$$

при условии, что переменная ξ определяется равенством

$$\xi^2 = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon) \left(\sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right)$$

и значениях структурных параметров $\alpha > 0, p > 0, \varepsilon \in [0, 1]$.

Для рассматриваемой стационарной ротационно-симметричной моде-

ли имеют место интегралы энергии E и площадей I [7]:

$$E = \frac{1}{2} \left(v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2 \right) - \varphi(\xi), \quad I = Rv_\theta,$$

где v_R, v_θ, v_z — компоненты скорости соответствующих цилиндрических координат R, θ, z . Ротационная симметрия означает, что потенциал φ не зависит от угла θ (только от R и z). Тогда исходная система (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v_R, & \dot{v}_R &= \frac{I^2}{R^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \\ \dot{\theta} &= \frac{I}{R^2}, & \dot{v}_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \dot{z} &= v_z. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее будем исследовать движение звезды только в плоскости $z = 0$ (при начальных условиях $z_0 = 0$ и $v_{z0} = 0$), тогда система (5) сократится до трёх обыкновенных дифференциальных уравнений и, с учётом вида потенциала φ , окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v_R, \\ \dot{\theta} &= \frac{I}{R^2}, \\ \dot{v}_R &= \frac{I^2}{R^3} - \frac{\alpha^{p+1} R^{p-1} \left(1 + \alpha^p R^p \right)^{(1-p)/p}}{\left(\alpha - 1 + \left(1 + \alpha^p R^p \right)^{1/p} \right)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Все используемые переменные являются безразмерными. Для перехода от безразмерных единиц к размерным необходимо домножить на соответствующий размерный коэффициент.

3.2. Вычисление старшего показателя Ляпунова по заданному множеству значений параметров

Для рассматриваемой системы (6) рассчитаем матрицу старшего показателя Ляпунова стандартным методом Вольфа [8], отвечающую параметрам

$$0 < p \leq 4,$$

$$0 < \alpha \leq 4$$

с шагом дискретизации изменения значений параметров 0.01.

Определим матрицу $L\{\lambda_{\max}(i, j)\}$ размерности 400×400 , элементами на позиции (i, j) , i — номер строки, j — номер столбца, которой являются старшие показатели Ляпунова

$$\lambda_{\max}(i, j) = \max \{ \lambda_1(i, j), \lambda_2(i, j), \lambda_3(i, j) \},$$

расчитанные для параметров

$$p = \frac{i}{100} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{j}{100},$$

где

$$\lambda_1(i, j), \lambda_2(i, j), \lambda_3(i, j)$$

соответствующий спектр показателей Ляпунова для этих параметров, вычисляемый при фиксированных значениях интеграла площадей I и начальной точке r_0 .

Для наглядности раскроем эту матрицу командой Matlab

`imagesc(L);`

и получим график распределения старшего показателя Ляпунова по параметрам p и α (рис. 5).

Как видим, на представленном рисунке чётко выделяются две области параметров, отвечающие нулевым значениям старшего показателя Ляпунова (темно-синий цвет) и положительным (≈ 0.022) старшего показателя Ляпунова (ярко-жёлтый цвет).

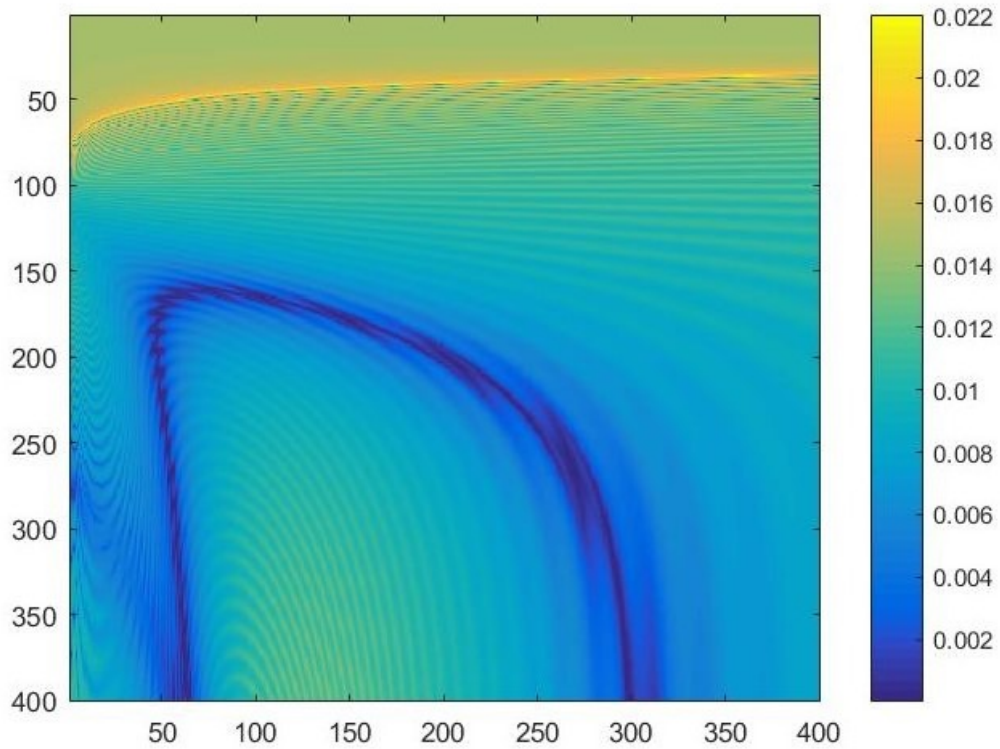


Рис. 5: Визуальное представление матрицы L старших показателей Ляпунова при $I = 0.7016$ и начальной точке $r_0 = (1.2, 0, 0)$

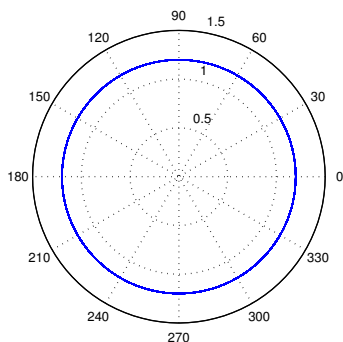
Положительный старший показатель Ляпунова является динамической характеристикой системы (6), которая показывает наличие хаотических типов движений у данной системы.

3.3. Примеры различных типов движения звезды в зависимости от параметров

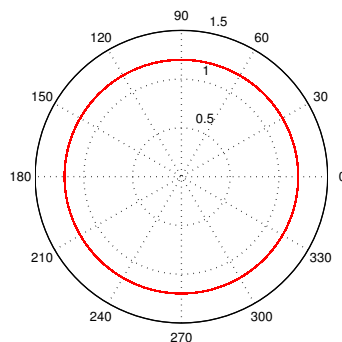
1. Рассмотрим интеграл площадей $I = 0.7016$ и начальную точку: полярный радиус $R = 1.2$, полярный угол $\theta = 0$ и $z = 0$, а также фиксированные значения параметров

$$p = 2 \quad \text{и} \quad \alpha = 0.48.$$

Приведем далее графики, отображающие динамику движения звезды при этих параметрах и начальной точке:

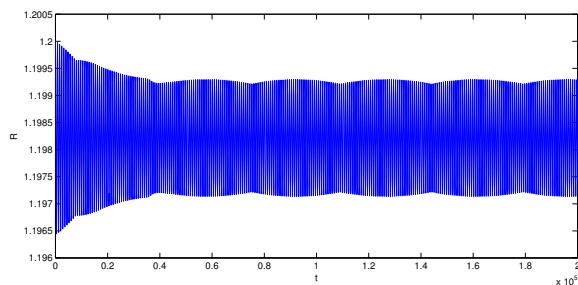


(a) Фазовый портрет системы с начальной точкой $(1.2; 0; 0)$

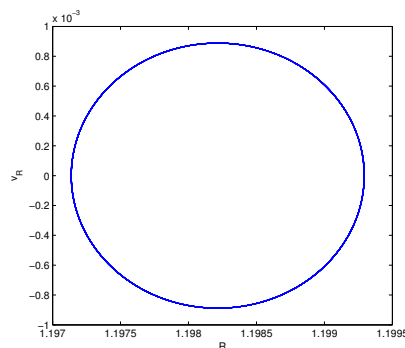


(b) Фазовый портрет возмущенной системы с начальной точкой $(1,2001; 0; 0)$

С этими параметрами звезда вращается по круговой орбите, для такого типа движения присуще отсутствие хаоса и наличие периода, что также понятно из следующих графиков:



(a) График изменения радиуса R по времени t



(b) График зависимости полярного радиуса R от радиальной скорости v_R

Посчитаем показатели Ляпунова:

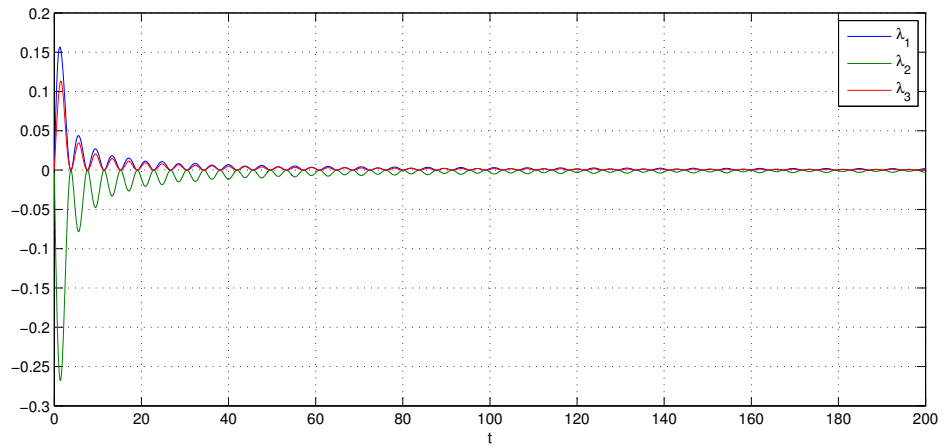


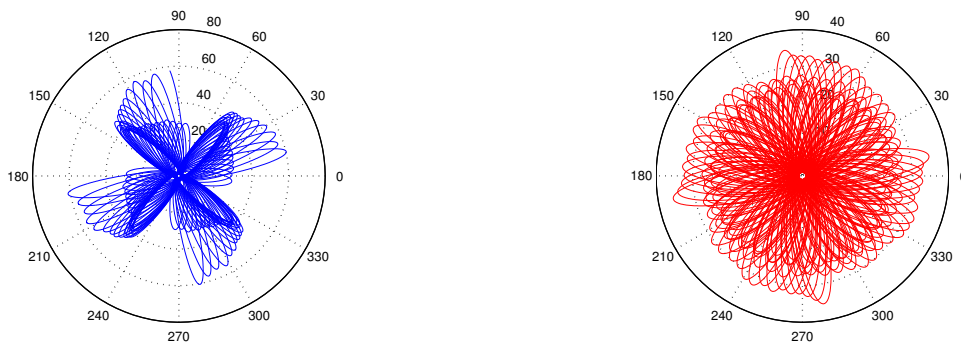
Рис. 8: Процесс вычисления показателей Ляпунова

На данном графике видно, что все показатели Ляпунова стремятся к нулю, что подтверждает отсутствие хаоса.

2. Рассмотрим интеграл площадей $I = 0.7016$ и начальную точку: полярный радиус $R = 1.2$, полярный угол $\theta = 0$ и $z = 0$, а также фиксированные значения параметров

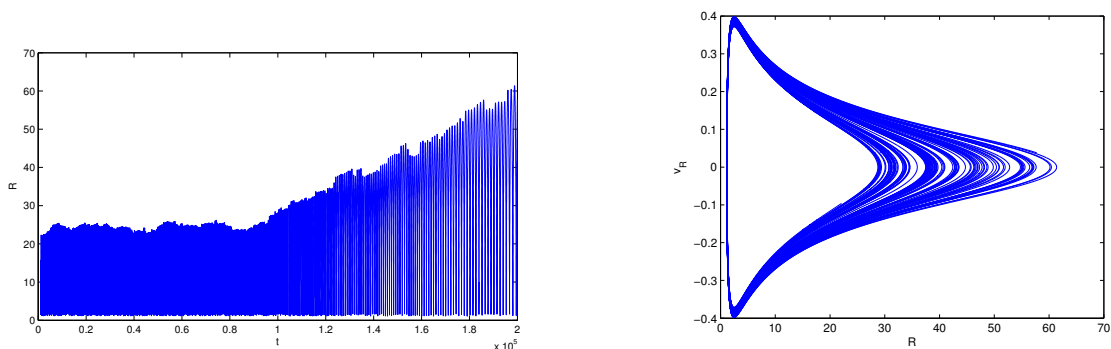
$$p = 0.4 \quad \text{и} \quad \alpha = 2.$$

Приведём далее графики, отображающие динамику движения звезды при этих параметрах и начальной точке:



(a) Фазовый портрет системы с начальной точкой $(1.2; 0; 0)$ (b) Фазовый портрет возмущенной системы с начальной точкой $(1,2001; 0; 0)$

Фазовые портреты сильно отличаются, из чего можно сделать вывод о наличии динамического хаоса в данной системе при данных параметрах.



(а) График изменения радиуса R по времени t (б) График зависимости полярного радиуса R от радиальной скорости v_R

Графики зависимостей полярного радиуса R от радиальной скорости v_R и график изменения радиуса R по времени t показывают возрастание радиуса, значит, звезда в достаточно большой момент времени t перестанет вращаться и улетит по траектории, близкой к прямой.

Посчитаем показатели Ляпунова:

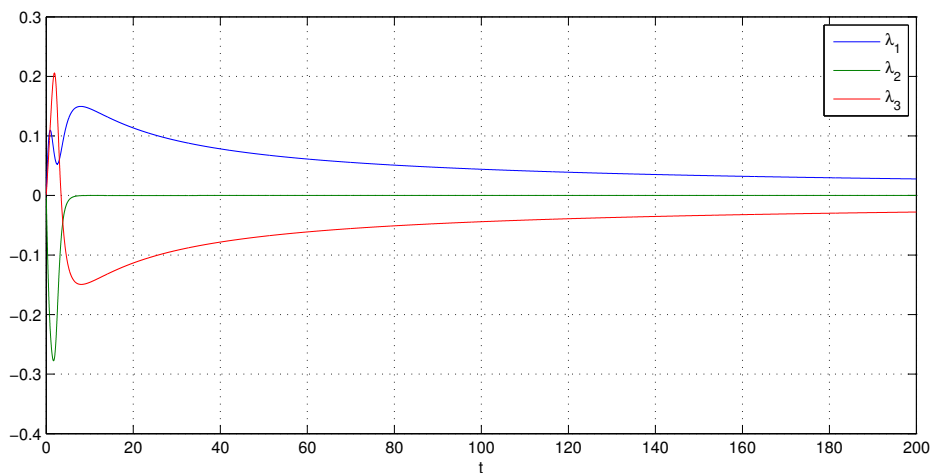


Рис. 11: Процесс вычисления показателей Ляпунова

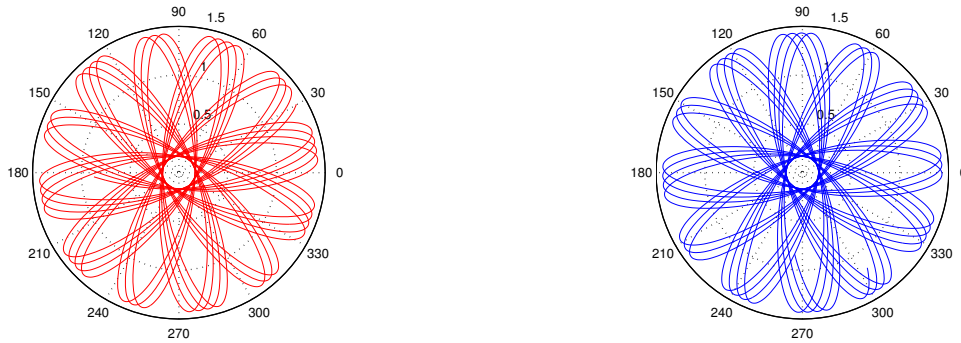
Из графика становится ясно, что первый показатель Ляпунова λ_1 останавливается на положительном значении, указывая на хаотическое поведение.

3. Рассмотрим интеграл площадей $I = 1/6$ и начальную точку: полярный радиус $R = 1$, полярный угол $\theta = 0$ и $z = 0$, а также фиксированные

значения параметров

$$p = 2 \quad \text{и} \quad \alpha = 4.$$

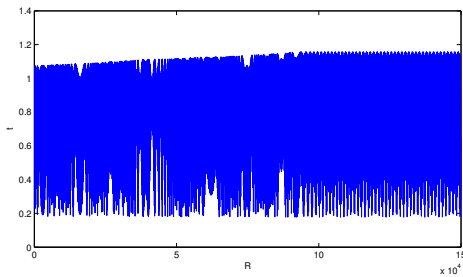
Приведем далее графики, отображающие динамику движения звезды при этих параметрах и начальной точке:



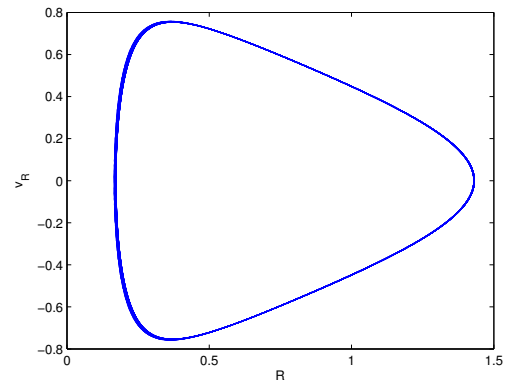
(a) Фазовый портрет системы с начальной точкой (1; 0.2; 0.2)

(b) Фазовый портрет возмущенной системы с начальной точкой (1.0001; 0.2; 0.2)

Можем видеть типичную розеточную орбиту с отсутствием хаоса. На графиках видно наличие периода, что наглядно иллюстрируют графики зависимостей полярного радиуса R от радиальной скорости v_R и график изменения радиуса R по времени t :



(a) График изменения радиуса R по времени t



(b) График зависимости полярного радиуса R от радиальной скорости v_R

Произведя расчёт показателей Ляпунова (14) становится ясно, что первый показатель Ляпунова λ_1 останавливается на положительном значении большем нуля, указывая на хаотическое поведение.

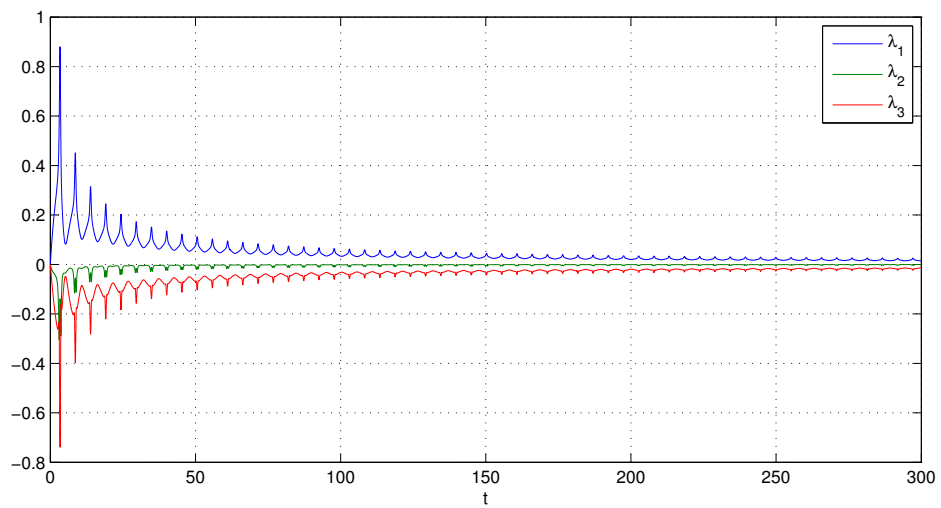


Рис. 14: Процесс вычисления показателей Ляпунова

Выводы

В динамических системах могут возникать хаотические режимы, характеризующиеся чувствительностью к малым изменениям начальных условий. Для предсказания такого поведения можно использовать показатели Ляпунова. Данные показатели, если принимают положительные значения, указывают на наличие хаоса в системе. На примере стандартного метода Бенеттина был отработан расчёт спектра показателей Ляпунова на примере одной модели динамической системы движения звезды.

Основные результаты представленной дипломной работы:

- Изучен и отработан алгоритм Бенеттина-Вольфа расчёта спектра показателей Ляпунова (по направлениям главных осей фазового пространства) на примере модели Лоренца.
- Данный метод был применён для нахождения старшего показателя Ляпунова для рассмотренной модели динамики движения звезды при стационарном ротационно-симметричном потенциале φ .
- Для предложенной модели было рассмотрено множество наборов параметров системы и произведено 160000 расчётов старших показателей Ляпунова по всем параметрам. Получена матрица распределения значений старшего показателя Ляпунова по данному множеству параметров.
- Определены области значений параметров, допускающие хаотическое или регулярное поведение движений исследуемой системы.
- На основе цветовой визуализации полученной матрицы была отдельно исследована динамика движения некоторых классов при фиксированных параметрах системы. Вычислен полный спектр показателей Ляпунова для данных систем.

Таким образом, показана возможность наличия хаотических движений в ротационно-симметричной модели движения звезды и указаны области соответствующих параметров.

Список литературы

- [1] Берже П., Помо И., Видалль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / Перевод с франц. Данилова Ю. А. М., 1991.
- [2] Дубошин Г. Н. Небесная механика: Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
- [3] Кратчфилд Д. П. Хаос // В мире науки, 1987. № 2. С. 18–28.
- [4] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Перевод с англ. – Кренкеля Т. Э. и Соловейчика А. Л., 2000.
- [5] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 2006. 356 с.
- [6] Головки В. А. – Нейросетевые методы обработки хаотических процессов. С. 43–91. Научная сессия МИФИ–2005. VII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика -2005»: Лекции по нейроинформатике. – М.: МИФИ, 2005. – 214 с.
- [7] Davydenko A. A., Raspopova N. V., Ustimenko S. S. On mass simulations of dynamical models of galaxy. International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015.
- [8] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vvasano J. A. – Determining Lyapunov Exponents from a Time Series // Physica 16d