

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра теоретической и прикладной механики

Тарасов Андрей Викторович

Одноосное растяжение бесконечных пластин с эллиптическими вставками

Дипломная работа

Допущена к защите.

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор Товстик П.Е.

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Бауэр С.М.

Рецензент:

к.ф.-м.н., с.н.с., Зимин Б.А.

Санкт-Петербург
2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Faculty of Mathematics and Mechanics

Department of Theoretical and Applied Mechanics

Tarasov Andrey Viktorovich

Infinite plates with elliptic inclusions under uniaxial pressure

Graduate work

Allowed to a presentation.

A Head of department:
Doctor of Mathematics and Physics, professor Tovstik P.E.

Scientific advisor:
Doctor of Mathematics and Physics, professor Bauer S.M.

Reviewer:
Candidate of Mathematics and Physics Sciences, Senior Researcher, Zimin B.A.

St.Petersburg
2016

Оглавление

1	ВВЕДЕНИЕ	2
2	ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	3
3	РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ В РАБОТЕ ХАРДИМАНА	5
4	РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ В РАБОТЕ МАЛЬКОВЫХ	8
5	СРАВНЕНИЕ	10
5.1	Сравнение соответствующих напряжений	11
5.2	Сравнение с аналитическими решениями в частных случаях	13
5.3	Соблюдение граничных условий	16
5.4	Соблюдение условия на бесконечности	18
5.5	Сравнение с данными, полученными с помощью ANSYS	19
6	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно изучаются новые материалы для нужд промышленности во многих отраслях: машиностроительной, автомобилестроительной, космической и т.п. В связи с этим на первый план все чаще и чаще выходят композитные материалы. С их помощью можно создать материал по заданным критериям. Таким образом, тема исследования напряженно-деформированного состояния конструкций с включениями из других материалов является актуальной.

Задача о деформации была решена Hardiman N.J. ещё в 1954 году в работе [1]. Но в 2015 году появилась статья Малькова В.М., Мальковой Ю.В. [2], в которой авторы утверждают, что получили точное решение, отличное от решения Хардимана. Необходимо определить, отличаются ли эти решения друг от друга. Если отличаются, то какое из них является верным.

Цель данной работы — сравнение различных решений при рассмотрении растяжения пластин с эллиптической вставкой.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- получить формулы для напряжений по двум исследованиям
- провести сравнение для полученных напряжений
- определить плоское напряжённое состояние для исследования устойчивости

Объект исследования — плоско-напряжённое состояние в пластинах.

Предмет исследования — растяжение пластин с упругой вставкой.

В работе используются выводы из работ Hardiman N.J. [1]; Мальков В.М., Малькова Ю.В. [2]; Мухелишвили Н.И. [3]; Качанов М.Л. [4]. По этой и смежным темам также посвящены работы Eshelby J.D. [5]; Sendekyj G.P. [6]; Theocaris P.M., Iokamidis N.I. [7]; Vergia R. [8].

Содержание дипломной работы.

Во второй главе рассматривается постановка задачи и обозначения, используемые в дальнейшем.

Третья глава посвящена исследованию решения Хардимана (Hardiman) [1].

Четвёртая глава посвящена исследованию решения Мальковых [2].

В пятой главе представлен сравнительный анализ решений.

Глава 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется бесконечная пластина с эллиптической вставкой с полуосями a и b . Пластина растягивается под действием силы P вдоль оси Ox . Параметры вставки: модуль Юнга E_0 , коэффициент Пуассона ν_0 . Параметры пластины: модуль Юнга E_1 , коэффициент Пуассона ν_1 . Рассматривается задача плотного соединения, то есть должны тождественно выполняться следующие условия:

$$(\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})_0 = (\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})_1 \quad (2.1)$$

$$(u_x + iu_y)_0 = (u_x + iu_y)_1$$

где

параметры с индексом 0 относятся ко вставке, а с индексом 1 — к пластине

σ_{nn}, σ_{nt} — нормальные и касательные напряжения соответственно

u_x, u_y — перемещения по осям Ox и Oy соответственно

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \text{ — параметр Ламе}$$

$$\kappa_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} \text{ — т.к. в данном случае рассматривается плоское напряжённое состояние}$$

$$m = \frac{a - b}{a + b} \text{ — параметр эллиптичности}$$

θ - угол между единичными ортами в эллиптической системе координат

$\zeta = \rho e^{i\varphi}$ — представление точки плоскости в полярных координатах

$\omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta})$ — конформное отображение плоскости

$$R = \frac{a + b}{2} \text{ — приведённый радиус}$$

$r = \frac{\rho}{R}$ — безразмерная величина модуля радиус-вектора точки комплексной плоскости

$e^{-2i\theta} = \frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta)}}{\zeta\omega'(\zeta)}$ — зависимость угла θ в эллиптических координатах от полярных

координат r и φ

Глава 3

РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ В РАБОТЕ ХАРДИМАНА

Компоненты тензора напряжений выражаются через комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили следующим образом [1]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Re(\Omega(z)) \quad (*)$$

$$-2 \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) = z\overline{\Omega''(z)} - \overline{\omega''(z)} \quad (**)$$

Комплексные потенциалы имеют следующий вид:
для вставки

$$\Omega_0 = Az, \quad \omega_0 = Bz^2$$

для пластины

$$\Omega_1 = Cz + \frac{FR}{\zeta}, \quad \omega_1 = Gz^2 + HR^2 \ln(\zeta) + \frac{JR^2}{\zeta^2}$$

где

A, B, C, F, G, J — комплексные постоянные, определяющие коэффициенты в потенциалах.
Они имеют вид $X = X_1 + iX_2$
 H — вещественная постоянная

Ввиду того, что мы рассматриваем случай одноосного растяжения вдоль оси Ox при нагрузке, заданной на бесконечных краях, то следующие переменные будут иметь строго определённые значения:

$$C_1 = P \quad C_2 = 0 \quad G_1 = -P \quad G_2 = 0$$

Остальные постоянные выводятся из соотношений:

$$A_1 = \frac{1}{\delta} [C_1(\alpha(a+b)^2 - 2\gamma(a^2 + b^2)) - 2\gamma(a^2 - b^2)G_1]$$

$$B_1 = \frac{1}{\delta} [C_1(a^2 - b^2)(1 + 2\gamma - \alpha) + (1 + 2\gamma)(a+b)^2 G_1]$$

$$A_2 = \frac{1}{\delta'}(C_2\alpha\delta' + 2G_2\gamma(a^2 - b^2))$$

$$\alpha = \frac{E_1}{E_0} \quad \gamma = \frac{E_1}{8} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right)$$

$$\delta = (a+b)^2 - \frac{4ab\gamma(1+2\gamma-2\alpha)}{\alpha}$$

$$\delta' = (a+b)^2 - \frac{4ab\gamma}{\alpha}$$

$$F_1 = 2m(A_1 - C_1) + 2(B_1 - G_1) \quad F_2 = -2(B_2 - G_2)$$

$$J_1 = -(1-m^2)(B_1 - G_1) \quad J_2 = (1+m^2)(B_2 - G_2)$$

$$H = 2(1+m^2)(A_1 - C_1) + 4m(B_1 - G_1)$$

Определим Φ и Ψ как правые части соотношений (*) и (**), при рассмотрении пластины. Тогда верно следующее:

$$\Phi = C - \frac{F}{\zeta^2 - m}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2} \left[\frac{2FR\bar{\zeta}(\zeta^2 + m)}{\zeta(\bar{\zeta}^2 - m)^2} + 2G - \frac{H\bar{\zeta}^2(\bar{\zeta}^2 + m)}{(\bar{\zeta}^2 - m)^3} - \frac{2J(m - 3\bar{\zeta}^2)}{(\bar{\zeta}^2 - m)^3} \right]$$

Напряжения во вставке можно определить из соотношений:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}(A + B) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}(A - B) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (3.3)$$

Напряжения в пластине можно определить из соотношений:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}(\Phi - \Re(\Psi)) \quad (3.4)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}(\Phi + \Re(\Psi)) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\Im(\Psi) \quad (3.6)$$

Для получения напряжений в полярной системе координат воспользуемся матрицей перехода:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Далее, используя формулы понижения степени и соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями, получим окончательные формулы для напряжений в полярных координатах:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \Re(e^{-2i\theta})}{2} & \frac{1 + \Re(e^{-2i\theta})}{2} & \Im(e^{-2i\theta}) \\ \frac{1 + \Re(e^{-2i\theta})}{2} & \frac{1 - \Re(e^{-2i\theta})}{2} & -\Im(e^{-2i\theta}) \\ -\frac{1}{2}\Im(e^{-2i\theta}) & \frac{1}{2}\Im(e^{-2i\theta}) & \Re(e^{-2i\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Глава 4

РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ В РАБОТЕ МАЛЬКОВЫХ

Компоненты тензора напряжений выражаются через комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили следующим образом [2]:

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\varphi} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - G(z)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} - i\sigma_{r\varphi} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + G(z)$$

где

$$\Phi(z) = \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (4.1)$$

$$\Psi(z) = \Psi(\zeta) = \frac{\psi(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (4.2)$$

$$G(z) = [z\overline{\Phi'(z)} + \Psi(z)]e^{-2i\theta} \quad (4.3)$$

$\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — комплексные потенциалы

Во вставке

$$\varphi_1(z) = A_1 z \quad \psi_1(z) = B_1 z$$

В пластине

$$\varphi_0(\zeta) = AR\zeta - DR\frac{1}{\zeta}$$

$$\psi_0(\zeta) = BR\zeta - (A - 2A_1 - mB_1)R\frac{1}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2 - m}AR - \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)}DR$$

Ввиду того, что в нашей задаче заданы усилия на бесконечности, можно определить постоянные A и B .

$$A = \frac{P}{4}, \quad B = -\frac{P}{2}$$

Остальные комплексные постоянные можно найти из соотношений:

$$A_1 = \frac{C}{F + G}$$

$$C = (1 + \kappa_0) \left[1 - m(m - 2) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0} \right] \frac{P}{4}$$

$$F = (1 - m^2) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1}$$

$$G = \frac{\mu_1 + \mu_0 \kappa_1}{\mu_1} - m^2 \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1} \frac{\mu_1 \kappa_0 - \mu_0 \kappa_1}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0}$$

$$B_1 = \frac{\mu_1(1 + \kappa_0)}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0} (m - 2) \frac{P}{4} - m \frac{\mu_0(1 - \kappa_1) + 2\mu_1 \kappa_0}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0} A_1$$

Подставив полученные константы в 4.1, 4.2, 4.3, получим:

$$G(\zeta) = \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi_2'(\zeta)} + \overline{\Psi_2(\zeta)} \right] e^{-2i\theta}$$

$$\Phi_0(\zeta) = A + \frac{1}{\zeta^2 - m} (2mA + B - 2mA_1 - B_1) \quad (4.4)$$

$$\Psi_0(\zeta) = B + \frac{1}{\zeta^2 - m} (A + mB - 2A_1 - mB_1) + (1 + m^2) A \frac{\zeta^2(\zeta^2 + m)}{(\zeta^2 - m)^3} +$$

$$+ \left[\frac{1 + m\zeta^2}{(\zeta^2 - m)^2} + \frac{2(1 + m^2)\zeta^2}{(\zeta^2 - m)^3} \right] (mA + B - 2mA_1 - B_1) \quad (4.5)$$

Тогда напряжения во вставке можно определить из соотношений [2]:

$$\sigma_{rr} = 2A_1 - B_1 \Re(e^{-2i\theta}) \quad (4.6)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2A_1 + B_1 \Re(e^{-2i\theta}) \quad (4.7)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -B_1 \Im(e^{-2i\theta}) \quad (4.8)$$

Напряжения в пластине можно определить из соотношений [2]:

$$\sigma_{rr} = 2\Re[\Phi_0(\zeta)] - \Re[G(\zeta)] \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\Re[\Phi_0(\zeta)] + \Re[G(\zeta)] \quad (4.10)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\Im[G(\zeta)] \quad (4.11)$$

Глава 5

СРАВНЕНИЕ

Сравним оба решения по следующим критериям:

- совпадение соответственных напряжений
- совпадение с решениями для более частных случаев
- соблюдение граничных условий
- выполнение условия для напряжений в пластине при $\rho \rightarrow \infty$
- сравнение с данными, полученными с помощью ANSYS

Примем следующие обозначения:

$\sigma_{ij,h}$ — напряжения, полученные в работе Хардимана

$\sigma_{ij,m}$ — напряжения, полученные в работе Мальковых

При построении графиков использовались следующие начальные данные:

Медь: $E_0 = 1.25 \cdot 10^9$, $\nu_0 = 0.348$

Сталь: $E_1 = 2.1 \cdot 10^9$, $\nu_1 = 0.3$

$a = 3$, $b = 1$

5.1 Сравнение соответствующих напряжений

Ниже представлены графики разности напряжений в решениях, соотнесённые к нагрузке P .

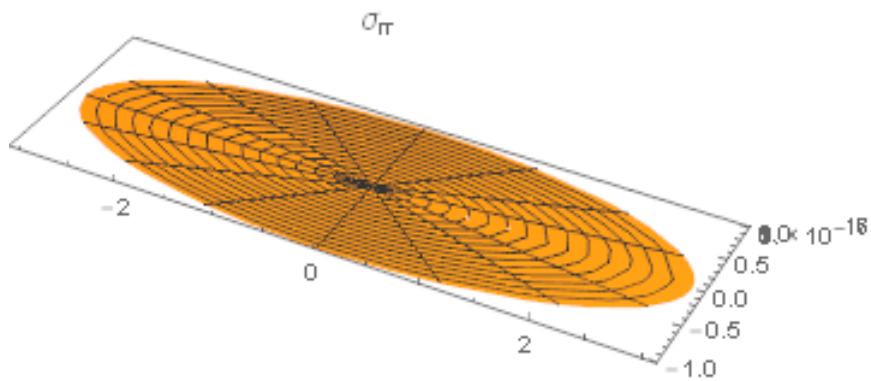


Рис. 5.1: $\frac{\sigma_{rr,h}^i - \sigma_{rr,m}^i}{P}$

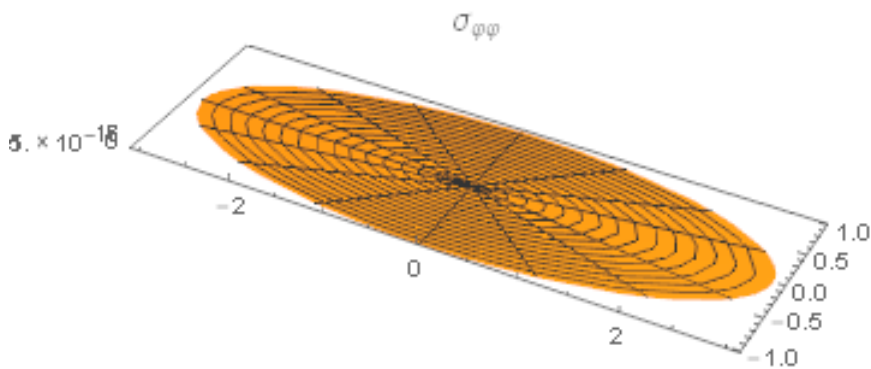


Рис. 5.2: $\frac{\sigma_{\varphi\varphi,h}^i - \sigma_{\varphi\varphi,m}^i}{P}$

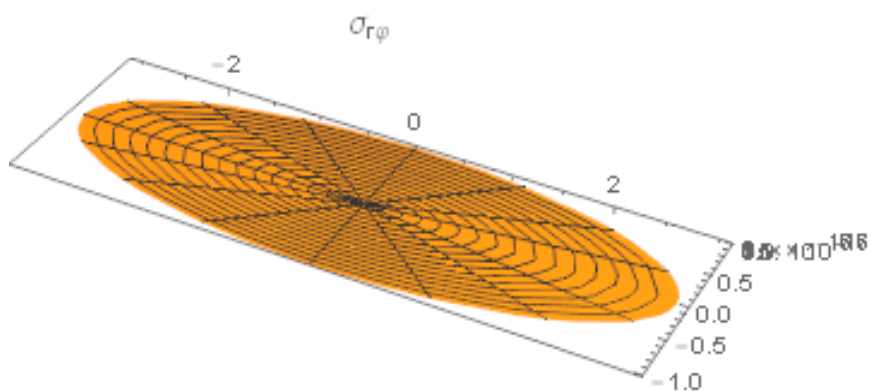


Рис. 5.3: $\frac{\sigma_{r\varphi,h}^i - \sigma_{r\varphi,m}^i}{P}$

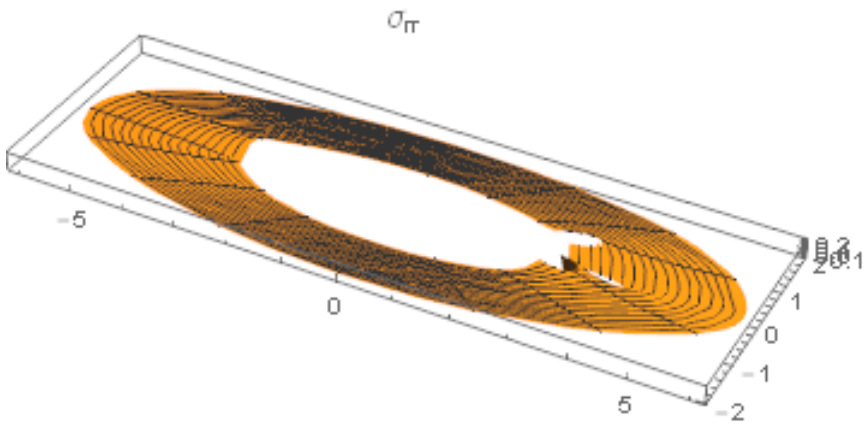


Рис. 5.4: $\frac{\sigma_{rr,h}^e - \sigma_{rr,m}^e}{P}$

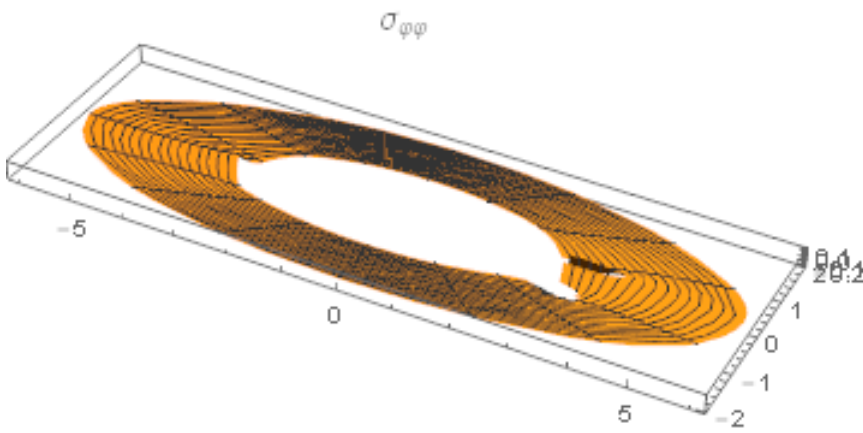


Рис. 5.5: $\frac{\sigma_{\varphi\varphi,h}^e - \sigma_{\varphi\varphi,m}^e}{P}$

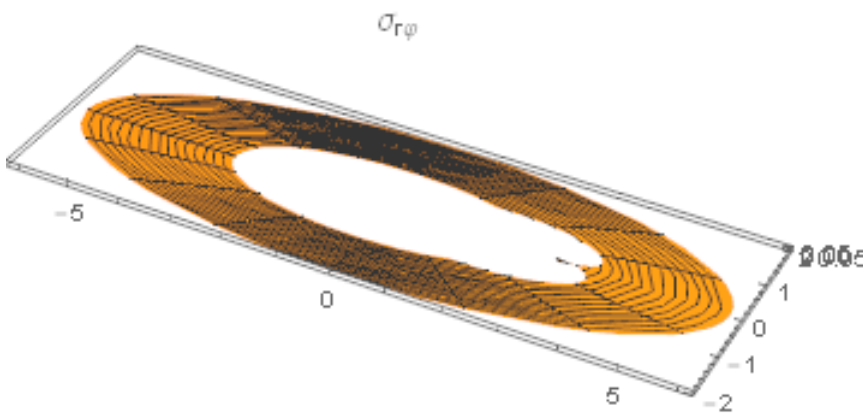


Рис. 5.6: $\frac{\sigma_{r\varphi,h}^e - \sigma_{r\varphi,m}^e}{P}$

Вывод: напряжения во вставке совпадают с точностью до 10^{-16} , напряжения в пластине не совпадают, разница достигает 0.2 для σ_{rr} , 0.2 для $\sigma_{\varphi\varphi}$ и 0.08 для $\sigma_{r\varphi}$

5.2 Сравнение с аналитическими решениями в частных случаях

Рассмотрим случай, когда $m = 0$, т.е. эллипс переходит в круг. Для этого варианта известно аналитическое решение. [3]

Пусть

$$\beta = -\frac{2(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + \mu_1\kappa_0}$$

$$\gamma = \frac{\mu_0(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_0 - 1)}{2\mu_1 + \mu_0(\kappa_1 - 1)}$$

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_1\kappa_0}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_1(\kappa_0 + 1)}{2\mu_1 + \mu_0(\kappa_1 - 1)}$$

$$\delta_1 = \frac{\mu_1(\kappa_0 + 1)}{\mu_0 + \mu_1\kappa_0}$$

Напряжения во вставке:

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2}(\beta_1 + \delta_1 \cos 2\varphi) \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P}{2}(\beta_1 - \delta_1 \cos 2\varphi) \quad (5.2)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{P}{2}\delta_1 \sin 2\varphi \quad (5.3)$$

Напряжения в пластине:

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2}\left[1 - \gamma\frac{R^2}{\rho^2} + \left(1 - 2\beta\frac{R^2}{\rho^2} - 3\delta\frac{R^4}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi\right] \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P}{2}\left[1 + \gamma\frac{R^2}{\rho^2} - \left(1 - 3\delta\frac{R^4}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi\right] \quad (5.5)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{P}{2}\left(1 + \beta\frac{R^2}{\rho^2} + 3\delta\frac{R^4}{\rho^4}\right)\sin 2\varphi \quad (5.6)$$

Примем обозначение:

$\sigma_{ij,c}$ — напряжения, полученные Мусхелишвили

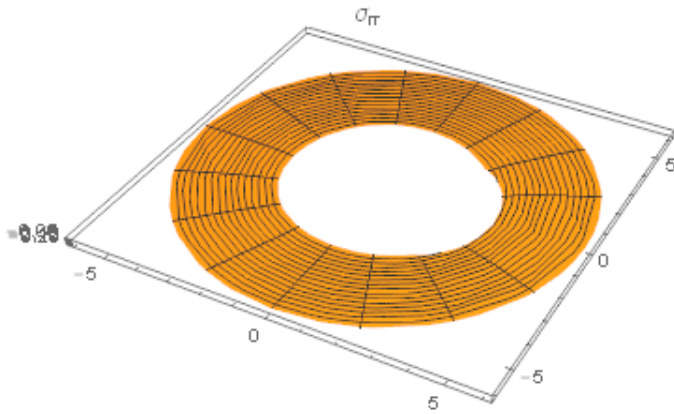


Рис. 5.7: $\frac{\sigma_{rr,h}^e - \sigma_{rr,c}^e}{P}$

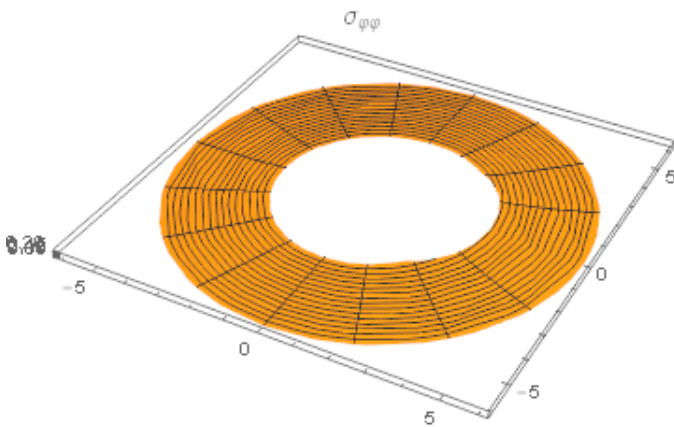


Рис. 5.8: $\frac{\sigma_{\varphi\varphi,h}^e - \sigma_{\varphi\varphi,c}^e}{P}$

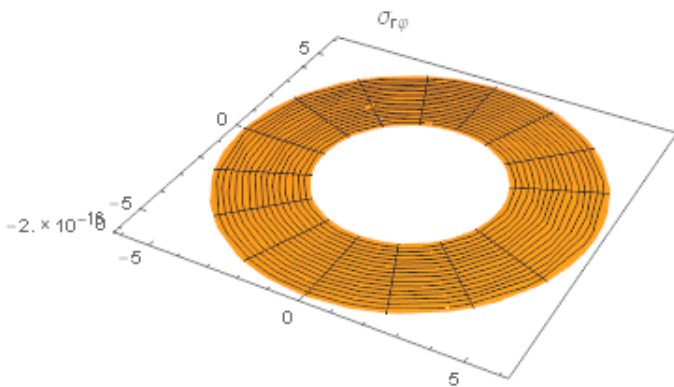


Рис. 5.9: $\frac{\sigma_{r\varphi,h}^e - \sigma_{r\varphi,c}^e}{P}$

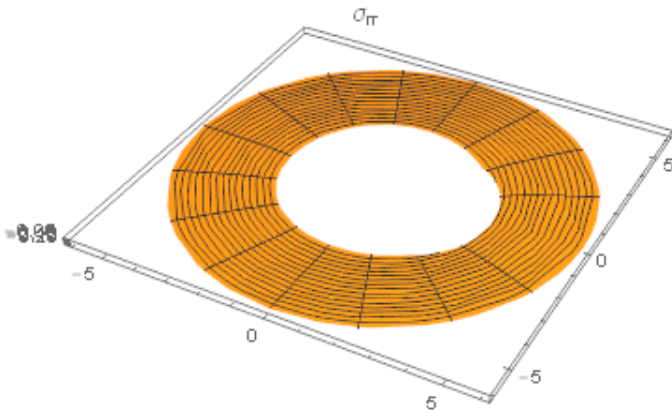


Рис. 5.10: $\frac{\sigma_{rr,m}^e - \sigma_{rr,c}^e}{P}$

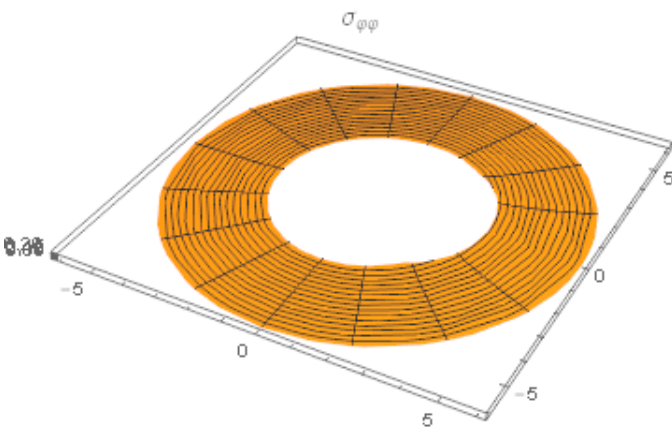


Рис. 5.11: $\frac{\sigma_{\phi\phi,m}^e - \sigma_{\phi\phi,c}^e}{P}$

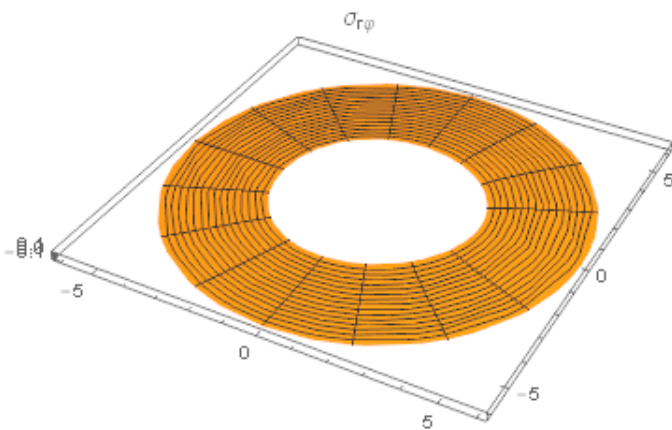


Рис. 5.12: $\frac{\sigma_{r\phi,m}^e - \sigma_{r\phi,c}^e}{P}$

Вывод: оба решения в предельном случае приводят к аналитическому решению Мусхелишвили.

5.3 Соблюдение граничных условий

При постановке задачи были указаны условия на напряжения на границе эллипса 2.1. Ниже представлены графики $\sigma_{xx,h}^e$, $\sigma_{xy,h}^e$, $\sigma_{rr,m}^e$, $\sigma_{r\varphi,m}^e$ при $r = 1$

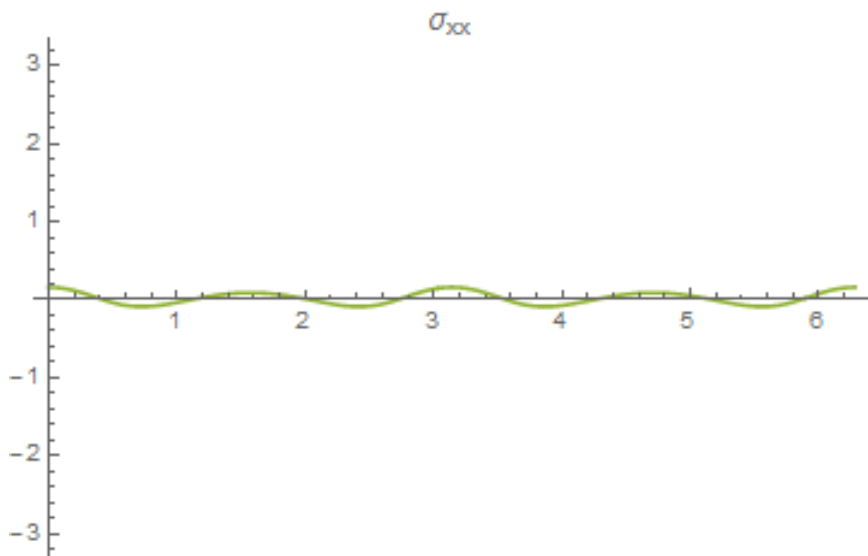


Рис. 5.13: $\frac{\sigma_{xx,h}^i - \sigma_{xx,h}^e}{P}$

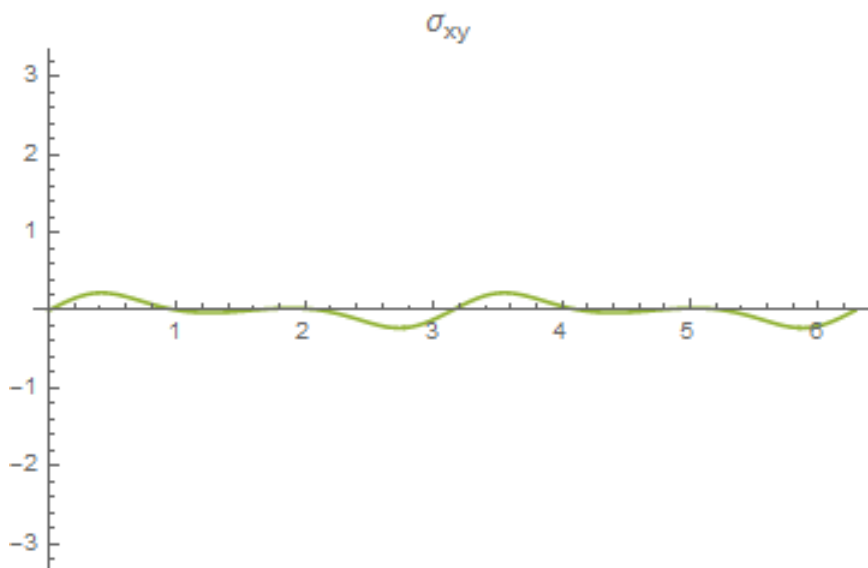


Рис. 5.14: $\frac{\sigma_{xy,h}^i - \sigma_{xy,h}^e}{P}$

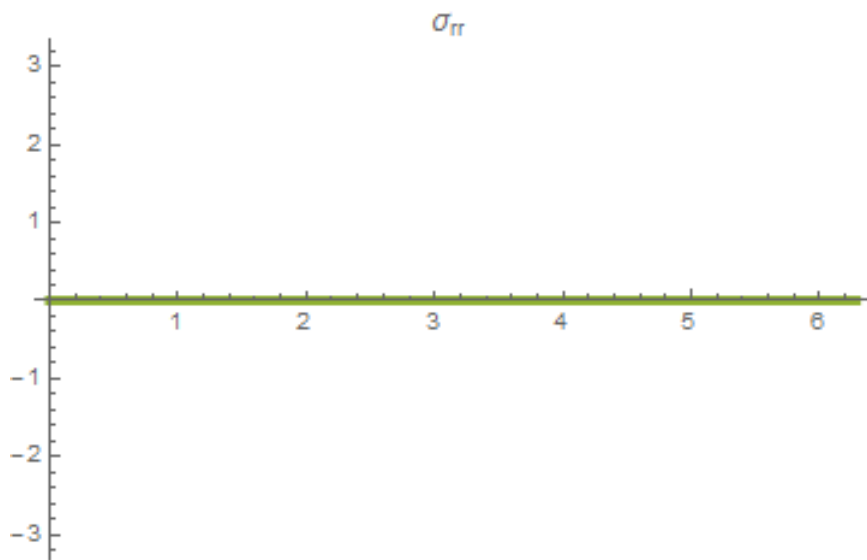


Рис. 5.15: $\frac{\sigma_{rr,m}^i - \sigma_{rr,m}^e}{P}$

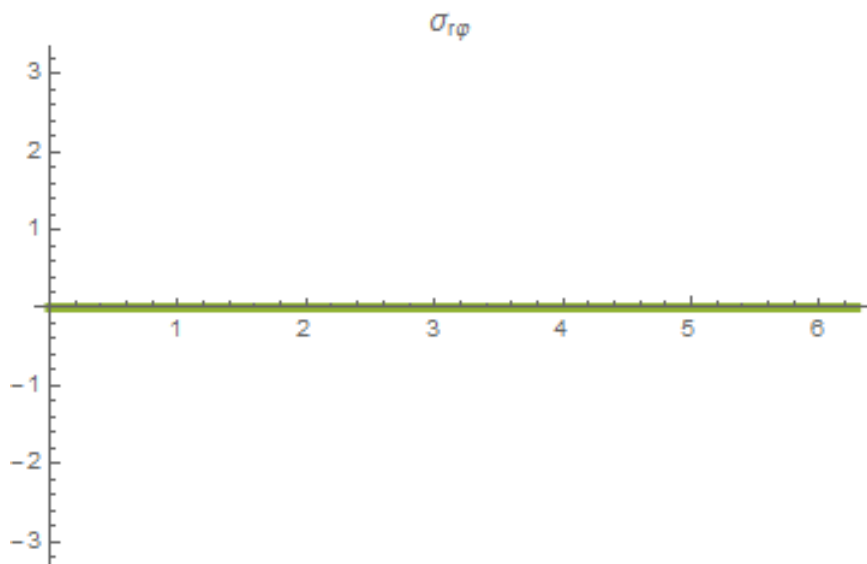


Рис. 5.16: $\frac{\sigma_{r\varphi,m}^i - \sigma_{r\varphi,m}^e}{P}$

Вывод: оба решения удовлетворяют требуемым условиям.

5.4 Соблюдение условия на бесконечности

Поскольку изначально задано напряжение на бесконечности, то должны выполняться:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{xx} = P, \quad \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{rr} = \frac{P}{2}(1 + \Re(e^{-2i\theta})) = P$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{yy} = P, \quad \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P}{2}(1 - \Re(e^{-2i\theta})) = 0$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{xy} = 0, \quad \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{r\varphi} = 0$$

Из формул 3.4, 3.5, 3.6 получим предельные напряжения на бесконечности для решения Хардимана:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{xx} = \frac{1}{2}(C_1 - G_1) = P$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{yy} = \frac{1}{2}(C_1 + G_1) = 0$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{xy} = 0$$

Из формул 4.9, 4.10, 4.11 получим предельные напряжения на бесконечности для решения Мальковых:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{rr} = 2A - B\Re(e^{-2i\theta}) = P$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi\varphi} = 2A + B\Re(e^{-2i\theta}) = 0$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \sigma_{r\varphi} = 0$$

Вывод: оба решения удовлетворяют требуемым условиям.

5.5 Сравнение с данными, полученными с помощью ANSYS

С помощью программы ANSYS были получены графики напряжений.

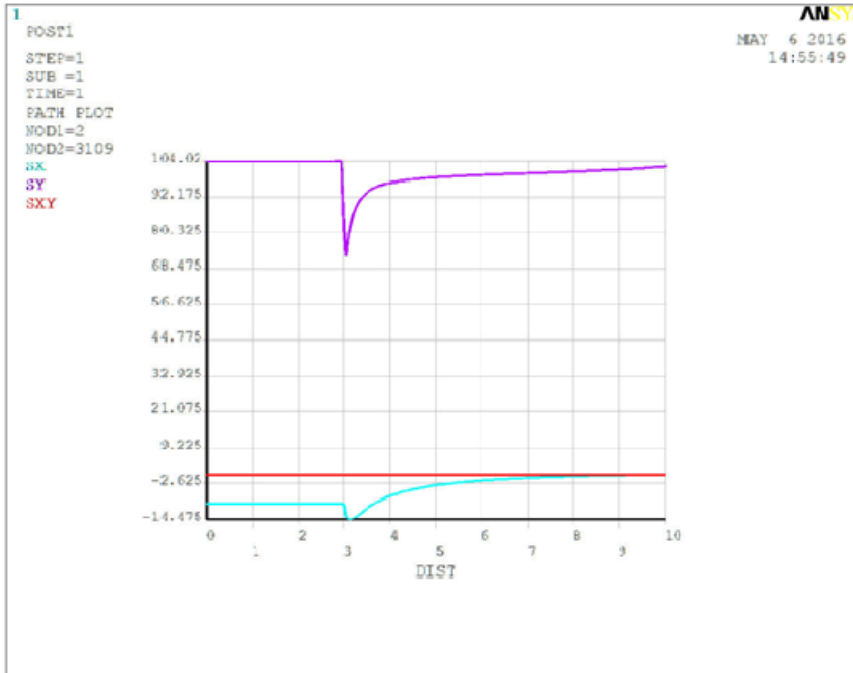


Рис. 5.17: Графики напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}

В статье [2] приведён график для $\sigma_{\varphi\varphi}$ при $|\zeta| = 1$ для одноосного растяжения вдоль оси Ox .

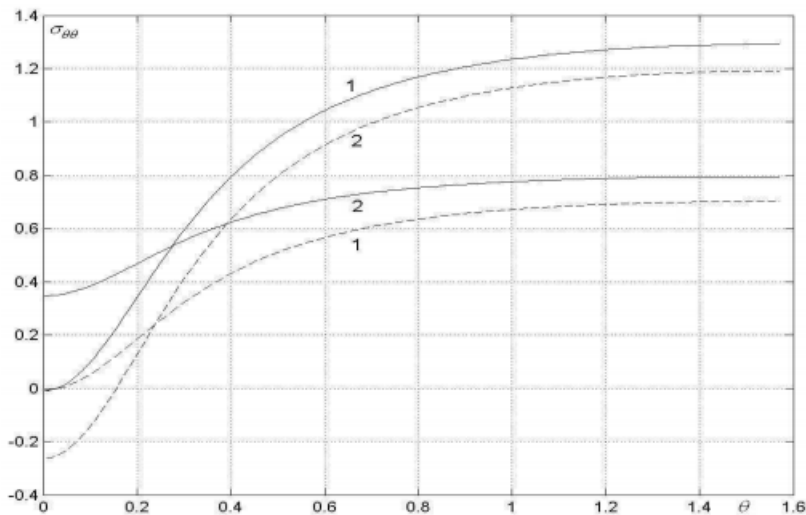


Рис. 2. Напряжения при растяжении вдоль оси x .

Рис. 5.18: График $\sigma_{\varphi\varphi}$ на границе раздела

Сравним скачки значений соответствующих напряжений при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ на графиках. Нетрудно видеть, что скачки практически совпадают.

Глава 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе были исследованы некоторые аспекты из теории упругих пластин с упругими включениями.

Для обозначенной задачи были рассмотрены решения Хардимана и Мальковых.

Для исследования и сравнения решений были построены графики, из которых видно, что они не совпадают абсолютно, но весьма близки друг к другу.

Далее рассматривался ряд условий, которые непременно должны выполняться. Оба решения удовлетворяют поставленным требованиям.

Также можно видеть, что выражения для соответствующих напряжений имеют одинаковую структуру.

Из вышесказанного можно сделать предположение, что решения совпадают. Несовпадения можно объяснить вычислительными ошибками, поскольку сравнение производилось с помощью специализированных пакетов для ЭВМ.

Литература

1. Hardiman N.J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 7(2):226–230, 1954.
2. Малькова Ю.В. Мальков В.М. Деформация пластины с упругим эллиптическим включением. *Вестник СПбГУ*, 2014.
3. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, volume 708 стр. с илл. Издательство Наука, 1966.
4. Tsurkov I. Kachanov M., Shafiro B. *Handbook of Elasticity Solutions*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
5. Eshelby J.D. Elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 252(1271):561–569, 1959.
6. Sendekyj G.P. Elastic inclusion problems in plane elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, 6(12):1535–1543, 1970.
7. Iokamidis N.I. Theocaris P.S. The inclusion problem in plane elasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 30(4):437–448, 1970.
8. Bercia R. Exact solution for an elliptical inclusion in plane elasticity. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 73(1):13–18, 2011.