Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики



**Гауссовы пучки в криволинейных координатах  
(полных лучевых переменных)**

Бакалаврская работа студента  
дневного отделения  
**Смолякова Максима Сергеевича**

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф. Зернов Н.Н.

Рецензент:  
д.ф.-м.н., проф. Андронов И.В.

Санкт-Петербург  
2016

**Оглавление**

|  |  |
| --- | --- |
| **Введение**  **1. Гауссовы пучки в локальных лучевых переменных** 1.1 Локальные лучевые переменные  1.2 Уравнение эйконала в локальных лучевых координатах   1.2.1 Предельный случай однородной среды   1.3 Главное уравнение переноса в локальных лучевых координатах  **2.Гауссовы пучки в полных лучевых переменных**  2.1 Полные лучевые переменные   2.2 Уравнение эйконала в полных лучевых переменных   2.3 Главное уравнение переноса в полных лучевых переменных  2.3.1 Предельный случай однородной среды  2.3.2 Общий случай неоднородной среды  **Выводы**  **Литература** | 3  4  4  5  7  8  11  11  12  13  15  16  19  19 |

**Введение**

В теории дифракции и распространения высокочастотных полей в неоднородных средах давно исследуются локализованные волновые процессы [1, 2, 3, 4]. Локализованные поля могут быть построены как в окрестности произвольного луча в плавно-неоднородной среде, так и, в частности, в окрестности экстремального луча (в окрестности локального максимума диэлектрической проницаемости среды – оси градиентного волновода). Локализованные волны строятся как непосредственно решения волнового уравнения типа параболического уравнения, так и как комплексные решения уравнений геометрической оптики.

Настоящая квалификационная работа, в основном, является научно-методической работой, хотя некоторые результаты, по-видимому, носят и оригинальный научный характер. Некоторые формулы заимствованы из курса «Геометрическая оптика в радиофизике», читаемого на кафедре радиофизики. Локализованные волны – гауссовы пучки в окрестности произвольной лучевой траектории строятся как комплексно-значные решения уравнений геометрической оптики в окрестности произвольного луча.

Для описания Гауссовых пучков в рамках геометрической оптики для высоких частот были использованы уравнение эйконала

и главное уравнение переноса

С целью упрощения выкладок, рассматривается двумерная задача.

Операторы дивергенции и Лапласа в уравнениях (1.1) и (1.2) для криволинейных переменных в двумерной задаче имеют вид:

Здесь коэффициенты Ламе *h1* и *h2* связывают дифференциальные приращения координат *q*1 и *q*2 с длинами соответствующих дуг *S*1 и *S*2 вдоль координатных линий, и элемент дуги *dS* выражается через новые переменные *q1* и *q2* как:

(1.5)

(1.6)

**Глава 1. Гауссовы пучки в локальных лучевых переменных**

В этой главе гауссовы пучки будут построены в локальных лучевых переменных, ассоциированных с опорным лучом, в окрестности которого строится локальная лучевая система координат.

* 1. **Локальные лучевые переменные**

Локальными лучевыми переменными (*s,n*) являются длина дуги *s* опорного луча, вблизи которого строятся локальные лучевые переменные, и расстояние вдоль нормали *n*, проведенной из текущей точки на опорный луч.

Для построения коэффициентов Ламе *hs(s,n)* и *hn(s,n)* в локальных лучевых переменных вводится радиус кривизны дуги 𝜌*(s)*. Тогда изменение длины дуги при изменении длины нормали d*S1* (сонаправлена с переменной *s*) можно будет выразить через 𝜌*(s)*, что наглядно изображено на Рис.1.

dS1

n

𝜌(s)

ds

d𝜃

es

en

Рис. 1. Графическая визуализация связи двух ортогональных переменных.

Из данного рисунка очевидны равенства:

(1.7)  
 (1.8)

Выражая угол d𝜃 из (1.7) и подставляя в (1.8), получаем уравнение для первого коэффициента Ламе:

Для второго коэффициента Ламе введем дугу *S2*, которая ортогональна *S1*. Она полностью совпадает с нормалью *n:*

(1.10)

Таким образом, коэффициенты Ламе найдем из уравнений (1.6):

Коэффициенты Ламе для локальных лучевых переменных будут получены посредством подстановки (1.9) и (1.10) в (1.11):

* 1. **Уравнение эйконала в локальных лучевых координатах**

Путем подстановки (1.3) в (1.1) с принятием во внимание (1.12) уравнение эйконала в локальных лучевых координатах принимает вид:

Для исследования уравнения эйконала в окрестности луча диэлектрическую проницаемость среды ε(s,n) разложим в ряд Тейлора:

(1.14)

где ε*i*(s), *i*=1, 2, 3 выражаются через дифференциалы:

Подстановка (1.14) в (1.13) дает следующий вид уравнения эйконала:

Разложение в ряд Тейлора эйконала 𝜑(*s,n*) в окрестности луча имеет вид:

(1.19)

(1.20)  
 (1.21)  
 (1.22)

Равенство функции 𝜑1(*s*) нулю будет видно из рассмотрения правой части уравнения (1.18). После раскрытия скобок и группировки слагаемых по степеням переменной *n* правая часть выражается рядом:

Сумма при первой степени переменной *n* следует переписать в виде:

Последнее выражение в квадратных скобках есть эффективная кривизна луча, которая для любого луча обращается в ноль (луч является “прямой” в пространстве с переменной метрикой, задаваемом данным ε(*s,n*)). Таким образом, в правой части уравнения (1.18) исключается слагаемое с первой степенью переменной *n*:

Если учесть разложение (1.19), то (1.25) будет уметь вид:

После раскрытия скобок и группировки слагаемых по степеням переменной *n* (1.26) принимает вид:

В левой части уравнения (1.27) выражение при первой степени параметра *n*должно быть равным нулю по причине отсутствия данного слагаемого в правой части:

Равенство (1.29) следует как из решения уравнения (1.28), так и из соображения, что эйконал 𝜑(*s,n*) направлен вдоль луча, т.е. по орте *s*, и не имеет составляющей по нормали, что приводит к выводу, что его производная по *n* будет равна нулю. Таким образом, уравнение (1.27) сократится:

где

Полученное уравнение теперь имеет вид суммы ряда по степеням переменной *n.* Функция 𝜑0(*s*) будет найдена из равенства функций при нулевой степени *n*:

Для получения функции 𝜑2(*s*) приравниваем выражения при квадратной степени переменной *n* из уравнения (1.30):

При условии выражения (1.33) уравнение (1.34) принимает вид уравнение Риккати для функции 𝜑2(*s*):

**1.2.1 Предельный случай однородной среды**

Если рассматривать предельный случай однородной среды (вакуум), то ε(*s*) = 1, радиус кривизны 𝜌(*s*) будет равен бесконечности, так как все лучи будут прямыми, а, следовательно, функция 𝜓(*s*) = 0. Таким образом, уравнение (1.35) примет вид однородного уравнения Риккати:

Решение данного уравнения представлено ниже:

где *s0* является константой, с помощью которой задается вид распространяющейся волны. Чтобы получить плоскую волну, следует *s0* принять равной бесконечности, а, чтобы получить центральное поле (цилиндрическую волну), *s0* приравниваем нулю.

В итоге для функции 𝜑(*s,n*) в частном случае имеет место следующее разложение:

где последняя сумма ряда в случае центрального поля (*s0* = 0) совпадает с суммой разложения корня при условии, что *s*>>*n:*

Чтобы получить гауссов пучок, следует считать константу *s0*положительной мнимой величиной

Тогда в бесконечно малой области у источника (*s*=0) будет присутствовать поперечное распределение поля в гауссовом пучке:

При дальнейшем распространении гауссов пучок будет расплываться. Но начальная его ширина *lr* будет выражаться из формулы:

Выражение (1.41) показывает, что начальная ширина гауссова пучка в высокочастотном поле будет стремиться к нулю при *k*(высокочастотная асимптотика). Так же это выражение говорит о том, что для гауссова пучка в данной задаче нужно строить решение уравнения Риккати 𝜑2(*s*) с положительной мнимой частью. Для построения же гауссовых пучков в других задачах с неоднородной средой важным моментом решения будет являться правильный выбор константы *s0*, которую заранее предугадать в других условиях задачи достаточно сложно, а в некоторых случаях неправильный выбор может привести даже к серьезным осложнениям в решении. Правильный выбор константы *s0* должен дать в решении локализованную волну.

* 1. **Главное уравнение переноса в локальных лучевых координатах**

Главное уравнение переноса (1.2) с подстановкой (1.3), (1.4) и коэффициентов Ламе (1.12) принимает вид:

По выше найденному разложению 𝜑(*s*,*n*) будет рассмотрена амплитуда A0(*s*,*n*) в первом приближении вблизи луча:

Подстановка (1.43), (1.45) в уравнение (1.42) и выделение слагаемых с нулевой степенью переменной *n* приводит к следующему выражению:

Функция𝜑0точно известна из (1.33), что позволяет представить в (1.46) ее производные:

Решение данного уравнения имеет вид:

где *C*1 = const.

Для случая однородной среды (вакуума) уравнение (1.48) примет вид

В итоге уравнение для гауссова пучка для поля высоких частот в рамках геометрической оптики в локальных лучевых переменных имеет вид:

В предельном случае однородной фоновой среды (вакуума) выражения (1.49), (1.50) в (1.51) дают волну вида:

Если принять s=0 в уравнении (1.52), то получим разложение цилиндрической волны в малом угловом приближении:

Принимая *s0* = 0 и s=r – модуль радиуса вектора, получим асимптотику цилиндрической волны:

Для получения плоской волны примем *s0* = ∞ и перенормируем константу *C*, чтобы амплитуда волны не становилась нулем:

Как было сказано выше, чтобы получить полный гауссов пучок с учетом амплитуды необходимо добавить в уравнение волны (1.52) условие (1.38):

Таким образом, был получено уравнение гауссова пучка в локальных лучевых переменных, у которого в амплитуде присутствует мнимая часть.

**Глава 2. Гауссовы пучки в полных лучевых переменных**

Здесь манипуляции, аналогичные предыдущим, совершаются в полных лучевых переменных.

**2.1 Полные лучевые переменные**

Полными лучевыми переменными (*t,*𝜃0) являются эйконал *t* вдоль выбранного луча и угол 𝜃0, под которым данный луч вышел из источника (Рис.2.). Эйконал *t* представлен как

Рис. 2. Полные лучевые переменные.

z

x

𝜃0

t

Найдем для полных лучевых переменных коэффициенты Ламе *ht*(*t,*𝜃0) и *h*𝜃(*t,*𝜃0). Для первого коэффициента продифференцируем (2.1) по переменной *s*:

Для второго коэффициента Ламе рассмотрим смещение луча по фронту при изменении начального угла 𝜃0на малое приращение d𝜃0:

где *a*(*t*,𝜃0) есть расходимость лучей. Таким образом, получим коэффициенты Ламе:

**2.2 Уравнение эйконала в полных лучевых переменных**

Уравнение эйконала (1.1) в полных лучевых переменных с учетом (2.5)имеет вид

Как видно из (2.6) эйконал 𝜑 не зависит от угла 𝜃0 (в правой части есть только член с диэлектрической проницаемостью), а первая производная по *t* равна единице. Это приводит к выводу, что эйконал 𝜑 на опорном луче принимает вид

что полностью согласовывается с эйконалом 𝜑 в локальных лучевых переменных на опорном луче (1.33). Рассмотри окрестность луча в полных лучевых переменных, для чего применим разложение 𝜑(*t*, 𝜃0) в ряд Тейлора по переменной 𝜃, где опорный луч исходит под углом 𝜃0:

Выражение (2.8) имеет сходную структуру с разложением эйконала в локальных лучевых переменных (1.19), однако здесь кривизна фронта учтена уже в нулевом порядке.

Для работы с уравнением эйконала (2.6) распишем производные ряда (2.8) в полных лучевых переменных:

А так же для удобства возведем их в квадрат, так как именно эта степень понадобится в дальнейшем:

Диэлектрическую проницаемость среды ε(*t*,𝜃) и расходимость лучей *a*(*t*,𝜃) будем рассматривать в первом приближении:

Подставим (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) в уравнение эйконала (2.6):

Перенесем все члены в левую часть. Останутся только слагаемые при второй степени переменной (𝜃 - 𝜃0):

Решая однородное уравнение Риккати (2.18), получим функцию второй производной 𝜑(*t*,𝜃):

**2.3 Главное уравнение переноса в полных лучевых переменных**

Главное уравнение переноса (1.2) в полных лучевых переменных с коэффициентами Ламе (2.5) принимает вид:

Запишем амплитуду A0(*t*,𝜃) в первом приближении:

Подставим в (2.20) дифференциалы (2.11), (2.12), диэлектрическую проницаемость среды (2.15), расхождение лучей (2.16) и амплитуду (2.21):

Раскрываем скобки и приводим слагаемые при нулевой степени переменной (𝜃 - 𝜃0):

Из уравнения (2.23) найдем функцию A00(*t*,θ):

Принимая во внимание (2.25), (2.8) и (2.19), получим уравнение волны в полных лучевых переменных в рамках геометрической оптики:

**2.3.1 Предельный случай однородной среды**

Рассмотрим предельный случай уравнения волны в полных лучевых переменных в однородной среде:

Как видно из (2.29) расхождение лучей *a0*(*t*) станет эйконалом *t* вследствие того, что в однородной среде модуль *r* радиуса вектора будет равен длине выпрямленной дуги *s,* а *t* зависит от *s* по известному уравнению (2.1) при условии (2.28). Найдем для данного предельного случая 𝜑2 из уравнения Риккати (2.18):

Запись константы *d* в таком виде упростит выкладки. Таким образом, решение уравнения (2.30) будет иметь вид:

Найдем теперь амплитуду A00(*t*,θ) в уравнении волны (2.26), подставив (2.28), (2,29), (2.32), в (2.25):

В итоге уравнение волны в предельном случае однородной среды примет вид:

В данном выражении константа *d*, как было разобрано с локальными лучевыми переменными, играет важную роль для определения характера волны. Чтобы получить цилиндрическую волну, примем *d* равной нулю (*t* = *r*):

Чтобы получить уравнение гауссова пучка в предельном случае однородной среды в полных лучевых переменных в рамках задачи геометрической оптики, следует считать константу *d* чисто мнимой величиной:

Тогда уравнение (2.34) примет вид

(2.37)

В соответствии с выражением (2.37) поле представляет собой локализованный пучок, который может существовать в однородной среде.

Это выражение показывает также, как генерировать такой пучок: для этого следует создать на цилиндрической поверхности (окружности), отстоящей от точечного источника (двумерная задача) на расстояние *t0* в окрестности выделенного луча, распределение фазы и амплитуды комплексной амплитуды гармонического поля следующего вида:

фаза поля -

амплитуда поля -

**2.3.2 Общий случай неоднородной среды**

Он описывается уравнениями (2.26, 2.27). При выборе константы в формуле (2.27) следует пользоваться теми же соображениями, что использовались выше при анализе предельных переходов к случаю однородной среды.

Следует отметить, что если поле лучей, формирующее полные лучевые переменные, неособое, т.е. сечение лучевой трубки *a0*(*t*) нигде не обращается в ноль, структура локализованного поля будет подобной структуре такого поля в однородной среде.

Отдельной непростой задачей является случай обращения в ноль сечения лучевой трубки *a0*(*t*). Это случай касания выбранным лучом каустики. В этом случае функции становятся сингулярными. Здесь, вообще говоря, теряется взаимно-однозначное соответствие перехода, например, от декартовых координат к полным лучевым переменным. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы. Ограничимся здесь лишь явным аналитическим выражением, которое может быть построено для слоисто-неоднородной среды. Здесь приводится соответствующие соотношения для плоскослоистой среды.

Для двумерной плоскослоистой среды эйконал имеет вид [5]:

Введем угол 𝜃 между направлением луча и осью *0z* в любой точке опорного луча, тогда дифференциальное уравнение луча имеет вид:

Пусть на уровне *z =* 0 имеется малый слой свободного пространства (ε(0) = 1). Тогда начальный угол выхода луча из точечного 𝜃0 связан с α следующим образом:

Проинтегрировав уравнение (2.39), получим переменную уравнения луча в интегральной форме, т. е. *x* как функцию от *z*:

Обозначим интеграл в (2.38) как

(2.42)

Тогда (2.41) есть

(2.43)

Найдем теперь поперечное сечение лучевой трубки как показано на рисунке ниже

Рис. 3. Сечение лучевой трубки в плоскослоистой среде.

**dS𝜃**

**z**

z

**x**

dx

d𝜃0

𝜃0

𝜃

𝜃

Здесь найдем, варьируя (2.42) по α при постоянном значении *z*:

,

и окончательно найдем:

(2.46)

Отсюда, очевидно, коэффициент Ламе для переменной 𝜃 на луче 𝜃=𝜃0 есть -

(2.47)

Чтобы найти *z*(*t*), воспользуемся далее соотношением для cos𝜃(*z*):

Отсюда переменная *z* cвязана с *t* следующим интегральным соотношением

(2.49)

которое должно использоваться в выражении (2.46) для коэффициента Ламе переменной *t.*

Следует указать, что коэффициент Ламе в точке на луче, фиксированном углом , может обращаться в ноль в некоторой вещественной точке(если таковая имеется). Она является корнем второй кратности системы уравнений, состоящей из уравнения луча (2.43) и уравнения

. (2.50)

Такая точка является точкой касания каустики лучом .

**Заключение**

В работе строились локализованные высокочастотные поля с использований уравнения эйконала и главного уравнения переноса. Их решения в окрестности выбранного луча строились в виде рядов по переменной поперечной выбранному лучу в локальных и полных лучевых переменных. Получены некоторые результаты, представляющиеся физически разумными. Вместе с тем, их следует рассматривать как некоторый начальный этап исследования. При продолжении этой работы, определенно и в первую очередь следует установить, как далеко высшие члены рядов в соответствующих разложениях, обозначенные здесь лишь многоточиями, не будут портить представленные здесь решения. Также необходимо исследовать вопрос о поведении поля в окрестности касания криволинейным лучом каустики, где поле может иметь особенность, а соотношение между декартовыми координатами и полными лучевыми переменными перестает быть однозначным.

**Литература**

1. В.М. Бабич, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Издательство «Наука». 1972.
2. M.M. Popov, A new method of computation of wave fields using Gaussian beams, Wave motion, 4, pp. 85-97, 1982.
3. A.M. Tagirdzhanov and A.P. Kiselev, Complexified spherical waves and their sources. A Review, OptikaiSpektroskopiya, 119, 2, 257-267, 2015.
4. A. Kiselev and A. Plachenov, Laplace-Gauss and Helmholtz-Gauss paraxial modes in media with quadratic refraction index, Journ. of the Optical Society of America. A., 33, 4, 663-666, 2016.
5. N.N.Zernov, B.Lundborg. The Statistical Theory of Wave Propagation and HF Propagation in the Ionosphere with Local Inhomogeneities. ISSN 0284-1703. 138 p.p. Swedish Institute of Space Physics, Uppsala Division, Sweden, (printed in Kiruna, 1993)