

Санкт-Петербургский государственный университет  
Факультет прикладной математики – процессов управления  
Кафедра математического моделирования и компьютерных систем

Самойлова Галина Константиновна

Дипломная работа

Влияние краевых полей в системах  
фокусировки частиц

Заведующий кафедрой,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор

Андрианов С.Н.

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор

Андрианов С.Н.

Рецензент:  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Едаменко Н.С.

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Формализация и постановка задачи</b>	<b>10</b>
1.1 Основные понятия и определения . . . . .	10
1.2 Математическое моделирование ЗФС. Линейный случай. . . . .	12
1.3 Математическое моделирование ЗФС. Нелинейный случай. . . . .	15
1.4 Выбор информационных технологий . . . . .	16
<b>2 Краевые поля</b>	<b>18</b>
2.1 Начальные условия . . . . .	18
2.2 Учет краевых полей в математической модели . . . . .	19
2.3 Управляющие параметры . . . . .	22
2.4 Параметризация функции Энге . . . . .	23
<b>3 Вычислительный эксперимент</b>	<b>28</b>
3.1 Оценка точности . . . . .	28
3.2 Аппроксимация экспериментальных данных . . . . .	28
3.3 Влияние краевых полей на фокусировку частиц . . . . .	29
<b>Заключение</b>	<b>34</b>
<b>Литература</b>	<b>35</b>

# Введение

*Ускоритель заряженных частиц это установка, предназначенная для формирования пучка частиц высоких энергий во внешних (управляющих) электромагнитных полях. Под фокусировкой частиц в ускорителях понимают обеспечение необходимых характеристик пучка на выходе из ускорительной установки. В частности, в отличие от оптики, где под фокусировкой подразумевается сведение пучка в малое пятно, в физике пучков частиц имеется ввиду удержание пучка в определенных поперечных размерах при транспортировке на большие расстояния. В зависимости от поставленной задачи как к ускорителю, так и к пучку частиц могут выдвигаться различные требования. В первую очередь это вид ускорителя (линейные, циклические, индукционные), характер пучка в ускорителе (непрерывный, импульсный), тип ускоряемых частиц (электроны, протоны, античастицы), энергия, до которой ускоряются частицы (основная единица измерения эВ (электронвольт), и в современных ускорителях может достигать до ТэВ) и т.д. Сложность и многопараметричность подобных установок приводит к необходимости моделирования на всех этапах решения задачи (от выбора и установки ускорителя до получения конкретных результатов).*

**Принцип устройства ускорителей, а так же их применение.** В общем случае ускоритель включает в себя следующие элементы (но в силу разнообразности ускорителей могут отсутствовать один или несколько элементов):

- вакуумная камера (в случае отсутствия вакуума ускоряемые частицы будут взаимодействовать с другими частицами, находящимися в рабочей области, что не приведет к желаемым результатам);
- устройство для входа и выхода пучка из ускорителя;

- фокусирующее устройство (препятствует соударению частиц со стенками вакуумной камеры);
- магниты (искривляют траекторию ускоряемых частиц).
- устройства мониторинга для исследования и коррекции положения и конфигурации ускоряемых пучков.

В современном мире ускорители заряженных частиц применяются в самых различных сферах человеческой деятельности и с каждым годом сферы их использования только увеличиваются. На данный момент ускорители широко используются в: медицине (лечение рака, стерилизация медицинского оборудования, лучевая терапия и т.д.), биологии, химии, промышленности (для испытания материалов без их разрушения, для производства радиоизотопов, для радиационной обработки материалов и т.д.), литографии (в том числе для создания например микроэлектроники), в области физики твердого тела, для модификации свойств материалов (например резины) и т.п. В работах ([2], [6], [9], [14]) более подробно изложено о различных видах ускорителей, об их устройстве, различиях и применении.

Данные системы являются очень громоздкими и дорогостоящими, а также сложными в плане их сопровождения, вследствие чего требуется их настройка и оптимизация, что является очень сложной перспективной областью для научных исследований.

**Методы фокусировки и факторы на нее влияющие.** В ускорительных установках, предназначенных для фокусировки частиц в ускорителях (в зависимости от типа фокусирующего поля) внешнее фокусирующее поле создается внешними устройствами. Внешняя фокусировка подразделяется на:

- магнитную (производится статическим или медленно меняющимся магнитным полем);
- электрическую;
- высокочастотную (осуществляется высокочастотным электромагнитным полем);
- пучковую (с помощью потоков пучков сторонних частиц).

По распределению поля вдоль опорной траектории методы фокусировки частиц можно разделить на:

- однородные (на частицы действуют постоянные фокусирующие силы)
- знакопеременные (при чередовании фокусирующих и дефокусирующих управляющих устройств).

Для циклических ускорителей существует такое понятие, как бетатронные колебания (быстрые поперечные колебания, совершаемые частицей в поперечном направлении (по отношению к так называемой траектории пучка) - создаваемых в основном с помощью фокусирующих магнитных полей). Одной из важнейших характеристик ускорителя является бетатронные частоты (в  $xy$ -плоскости, которая соответствует числу бетатронных колебаний на один оборот в соответствующей плоскости). Фокусировка называется слабой, если в циклических ускорителях однородная фокусировка осуществляется магнитным полем с постоянным градиентом (при выполнении условия  $0 < n < 1$ ). Фокусировку называют сильной, если в циклических ускорителях применяется фокусировка магнитным полем со знакопеременным градиентом и при  $|n| \gg 1$ , в следствие чего бетатронные частоты могут достигать до нескольких десятков (значительно превышают единицу).

На практике возможно одновременное применение различных методов фокусировки. В современных ускорителях чаще всего применяется фокусировка магнитным полем со знакопеременным градиентом. Самым распространенным фокусирующим элементом является квадрупольная линза. Наиболее распространенными элементами фокусировки так же являются секторные магниты с однородным полем, соленоиды, электронные линзы и так далее. (см. [4], [5], [11])

Любой управляющий элемент имеет собственное краевое поле, которое вызывает искажение эволюции пучка по сравнению с идеальной моделью системы. Существует множество работ, в которых проводится исследование краевых полей (например [8], [16], [17]). Поскольку краевые поля являются не устранимыми, учитывая их вариативность, они требуют более тщательного исследования.

Сложность моделирования фокусирующих систем заключается в существовании различных факторов, влияющих на фокусировку пучка: существование аберраций, существование краевых полей, искажений выбранной формы внешних (управляющих) полей, наличие собственного заряда, возможности возникновения хаотичного движения частиц в случае многооборотной эволюции в циклических ускорителях.

**Актуальность работы.** Одной из областей применения ИОС является адронная медицина, в которой применяется установка под названием Гантри (англ. Gantry). Гантри это аппарат для сканирования и облучение пациента. Его принцип действия заключается в следующем: пациента усыпляют и помещают на специально изготовленную для него кушетку для его фиксации (пациент всегда находится в одном и том же положении, для того чтобы опухоль располагалась точно в фокусе пучка излучения). Гантри вращается вокруг пациента, позволяя сканировать и облучать опухоль во всех трех из-

мерениях. Обычно проводятся несколько подобных сеансов, так как сначала опухоль сканируют, потом настраивают установку под самого пациента, после чего уже идет облучение. Ниже на Рис.1 представлено схематическое расположение Гантри в Гейдельберге. Обозначения: 1 — источник, 2 — линейный ускоритель, 3 — синхротрон, 4 — вакуумные трубки, направляющие пучок в кабинет, 5 — кабинет, где пациент проходит сканирование, 6 — контроль положения, 7 — сам Гантри, 8 — кабинет, где проходит облучение.

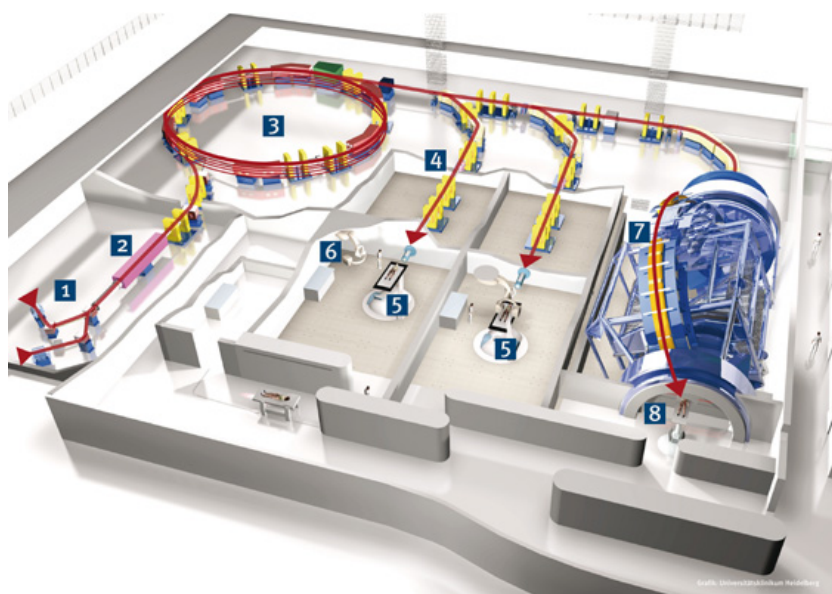


Рис.1 Схема ускорителя в Гейдельбергском центре адронной терапии (НІТ).

Эффективность облучения связана с тем, что частицы, имеющие заряд, обладают свойством резко тормозить в конце своего пробега и в этот момент они передают большую часть своей энергии поглощающему веществу. Данное явление называется "пик Брэгга". На Рис.2 показан пик Брэгга для протона с энергией 250 МэВ.

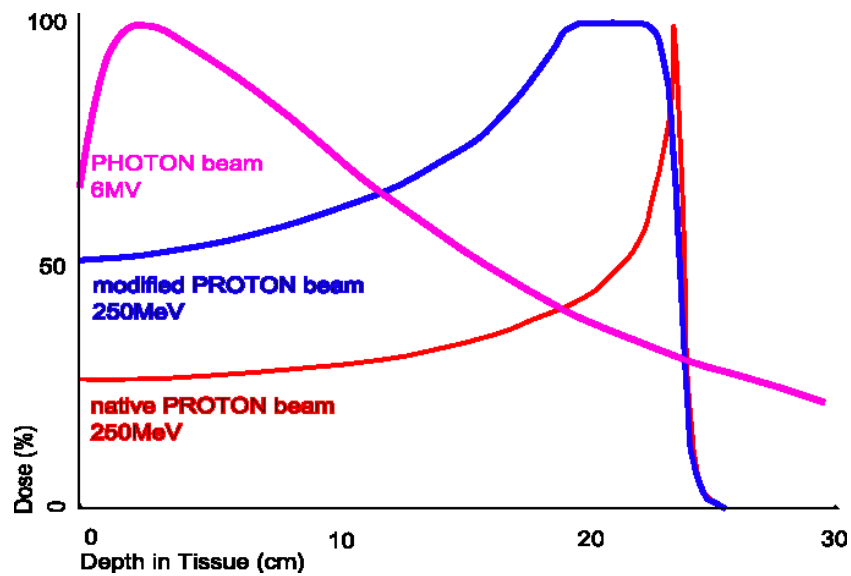


Рис.2 Пик Брэгга

Гантри настраивается таким образом, чтобы энергия частиц передавалась злокачественной опухоли, здоровые ткани при этом не должны быть задеты. Для этого все процессы предварительно моделируются, в ходе чего подбираются параметры пучка с учетом геометрии поражаемого органа, физических и химических свойств внутри организма. Так же необходимо учитывать эффект краевых полей от управляющих элементов, так как иначе есть риск задеть здоровые ткани. Обычная фокусировка Гантри настраивается в плоскости  $(x, y)$ , но установку можно настроить таким образом, что на выходе форма пучка будет соответствовать размеру и форме опухоли, это достигается за счет фокусировки в плоскости  $(x', y')$ , т.к. пучок в итоге становится параллельным. (добавить ссылку на параграф, где будет описано более подробно). Задача о настройке подобного оборудования, как Гантри, является высокоприоритетной, так как связана с человеческой жизнью.

**Целью** данной работы является разработка математической модели исследования влияния краевых полей. Задачи, которые необходимо решить для достижения данной цели могут быть сформулированы в следующем виде:



- исследовать анализ существующих моделей краевых полей;
- разработать унифицированную модель представления краевых полей с учетом физических ограничений;
- разработать аналитические (символьные) модели краевых полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа с использованием пакета Maple;
- провести ряд вычислительных экспериментов.

# 1 Формализация и постановка задачи

## 1.1 Основные понятия и определения

В данном параграфе представлены основные определения, необходимые для дальнейшего описания.

Ионно-оптическая система рассматривается в качестве системы управления пучком частиц.

**Определение 1.** *Под ионно-оптической системой (ИОС) будем подразумевать систему, предназначенную для перевода пучка из одной части пространства в другую (транспортировка), в которой основное внимание уделяется формированию поперечных фазовых характеристик пучка (фокусировка).*

**Определение 2.** *Под зондоформирующей системой (ЗФС) будем подразумевать подмножество семейства ИОС, в которых размеры множества пучка на мишени на один или несколько порядков меньше входных размеров пучка.*

ИОС состоит из источника и ускорителя, ЗФС, мишени и датчика, системы формирования начального фазового множества (система диафрагм и коллиматоров).

**Определение 3.** *Квадрупольная линза – устройство для фокусировки пучков заряженных частиц с помощью магнитного или реже электрического поля квадрупольной конфигурации.*

**Определение 4.** *Краевое поле – часть магнитного поля, распределенного вдоль электрической оси управляющего элемента ИОС, где поле перестает быть постоянным и появляется зависимость поля от продольной координаты.*

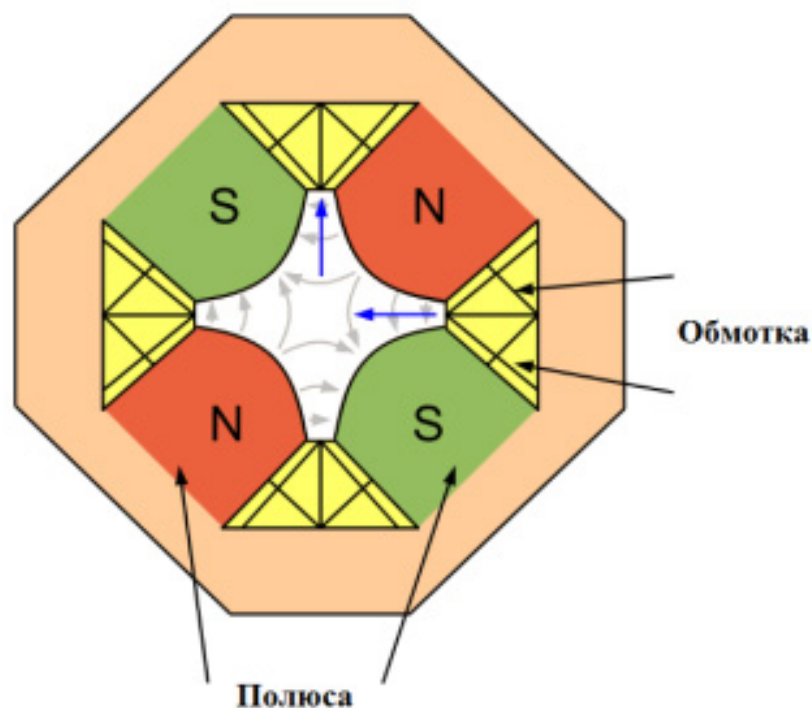


Рис.3 Квадрупольная линза.

На Рис.3 показано устройство квадрупольной линзы в поперечном разрезе. Буквами S,N обозначены полюса, желтым цветом показана обмотка (она может быть как теплой, так и сверхпроводящей), розовым цветом обозначено железное ярмо для замыкания магнитного потока, синими стрелками показана сила действующая на частицу, серыми – линии магнитного поля.

Одна из особенностей квадрупольной линзы заключается в том, что ее фокусирующее действие в одной плоскости сопровождается дефокусировкой в другой плоскости. Для получения собирающей системы в обеих плоскостях располагают две линзы, повернутых относительно общей оси на 90 градусов. Система в которой установлено несколько квадрупольных линз называется мультиплетом. Мультиплет – это один из видов ЗФС.

Любой магнитный элемент обладает краевым полем, которое можно измерить, если разобрать установку и извлечь из нее необходимый элемент, что обычно является очень дорогостоящей процедурой. При подобных измерени-

ях информация получается в дискретном виде, поэтому вопрос о корректном восстановлении дискретных данных остается актуальным. Наиболее точный и наиболее популярный метод описания информации о краевых полях носит название карты поля. Карта поля представляет собой таблицу, в которой представлены данные о разности потенциалов магнитного поля в точках, взятых на координатных осях с некоторым постоянным шагом. Карта поля используется для учета влияния краевых эффектов в существующих установках, а так же для тестирования различных методов, позволяющих гибко варьировать краевое поле. Карты поля существуют для малого числа элементов, поэтому применяется подход, в котором рассматривается функциональная зависимость распределения поля относительно координаты в виде модельной функции. Подобные модельные функции должны принадлежать классу функций, который будет обладать достаточным количеством управляющих параметров для подбора необходимой длины и формы краевого поля.

В силу особенностей конфигурации квадрупольной линзы (четыре одинаковых, симметрично расположенных полюса) ее краевое поле является симметричным. Также экспериментально было выявлено, что краевые поля имеют колоколообразную форму.

## **1.2 Математическое моделирование ЗФС.**

### **Линейный случай.**

Существует два подхода для моделирования динамики пучка: траекторное представление и матричное представление. Траекторное представление основано на моделировании отдельных траекторий частиц. В матричном представлении строится отображение (оператор эволюции). В данной работе используется матричное представление, так как оператор эволюции не за-

висит от начального состояния пучка, что позволяет существенно сократить временные затраты при расчетах. Матричное представление также позволяет использовать преимущества матричной алгебры.

Рассмотрим ЗФС, которая имеет название русский квадруплет (см. Рис.4).

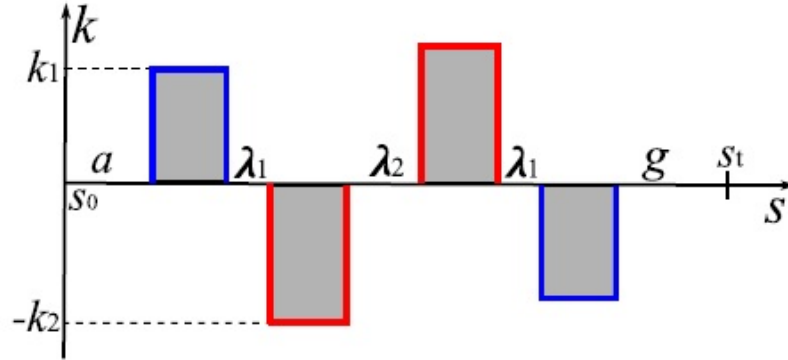


Рис.4 Русский квадруплет.

В матричном представлении ЗФС делится на участки, которым соответствуют либо свободные промежутки либо промежутки с линзами. Для каждого участка строится собственное отображение (матрица  $R_i$ ), из которых позже строится общая матрица перехода  $R$  для всей ЗФС.

Рассмотрим дифференциальное уравнение частиц в линейном случае, где вектор  $X$  имеет вид  $\mathbf{X} = (x, x', y, y')^T$  :

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, s), \quad (1)$$

При достаточной степени гладкости функции  $F$ , с учетом начальных условий  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(s_0)$  решение данного уравнения можно представить в виде:

$$\mathbf{X} = R(s|s_0)\mathbf{X}_0 \quad (2)$$

Матрицу  $R$  в силу группового свойства можно представить как:  $R = \prod_{i=1}^n R_i$ , где  $R_i$  матрица соответствующая отображению  $i$ -го участка. Для свободных

промежутков  $R_i$  будет выглядеть следующим образом:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $l$  - длина соответствующего промежутка.  $R_i$  для промежутков с фокусирующими и дефокусирующими линзами выглядят соответственно:

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos(lw) & \frac{\sin(lw)}{w} & 0 & 0 \\ -w \sin(lw) & \cos(lw) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(lw) & \frac{\sinh(lw)}{w} \\ 0 & 0 & w \sinh(lw) & \cosh(lw) \end{pmatrix},$$

$$R_i = \begin{pmatrix} \cosh(lw) & \frac{\sinh(lw)}{w} & 0 & 0 \\ w \sinh(lw) & \cosh(lw) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(lw) & \frac{\sin(lw)}{w} \\ 0 & 0 & -w \sin(lw) & \cos(lw) \end{pmatrix}.$$

Для фокусировки обычно накладываются дополнительные условия. Например, чтобы фокусирующей плоскостью была  $(x, y)$  эти условия будут выглядеть следующим образом:

$$r_{12} = r_{34} = 0,$$

где  $r_{12}$  и  $r_{34}$  элементы матрицы  $R$ .

В рамках линейного приближения можно найти оптимальные параметры для фокусировки в плане необходимого коэффициента фокусировки. Но, к сожалению, вне зависимости от параметров, идеальная система, без учета краевых полей, дает лучшие характеристики выходного пучка, чем система с учетом краевых полей.

### 1.3 Математическое моделирование ЗФС.

#### Нелинейный случай.

В нелинейном случае уравнение (1) может быть представлено в виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \sum_{k=1}^{\infty} P^{1k} \mathbf{X}^{[k]},$$

где вектор  $\mathbf{X}^{[k]}$  является Кронекеровской степенью вектора  $\mathbf{X}$ ,  $P^{1k}$  - матрицы, элементами которой являются производные компоненты  $k$ -ого порядка вектор функции  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0)$ .

**Определение 5.** Кронекеровской степенью вектора и матрицы является вектор и матрица соответственно, у которых исключены одинаковые компоненты, получающиеся в результате возведения в тензорную степень. Тогда решение (2) в нелинейном случае будет выглядеть:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} R^{1k}(s|s_0) \mathbf{X}_0^{[k]}.$$

В зависимости от типа элемента, который мы рассматриваем и от порядка нелинейности, отображения, которые нам необходимо построить в рамках матричного представления, будут иметь различный вид. Например  $R_i$  в общем случае для квадрупольной линзы для нелинейности второго порядка будут выглядеть следующим образом:

$$R_i = \begin{pmatrix} R^{11} & R^{12} \\ 0 & R^{22} \end{pmatrix},$$

где  $R^{11}$  - решение линейного уравнения,  $R^{22}$  - вторая Кронекеровская степень матрицы  $R^{11}$ ,  $R^{12}$  - находится из уравнения:

$$R^{12}(s|s_0) = \int_{s_0}^s R^{11}(s|\tau) P^{12}(\tau) R^{22}(\tau|s_0) d\tau.$$

Для свободных промежутков  $R^{12}$  будет нулевой матрицей. ([3], [11])

Для получения оператора эволюции, соответствующего своей системе, необходимо перемножить все  $R_i$ , отвечающие за отдельные участки этой системы.

Необходимость построения нелинейной модели заключается в том, что она позволяет учесть дополнительные эффекты, которые не рассматриваются в линейной модели.

**Понятие "невидимой вставки".** ИОС являются очень громоздкими, например одна из таких систем показана на Рис.1, поэтому иногда при установке такой системы могут столкнуться с проблемой, что она физически не помещается в лаборатории. Для решения подобных проблем существуют "невидимые вставки". "Невидимая вставка"— это набор управляющих элементов, обеспечивающих сохранение входных характеристик пучка на выходе. Данный эффект достигается за счет того, что оператор, отвечающий за весь набор элементов во вставке, равен единичной матрице. "Невидимые вставки" бывают прямолинейные и поворачивающие, как например, в Гантри (см., например, Рис.1).

## 1.4 Выбор информационных технологий

Поскольку задачи моделирования ЗФС и аппроксимации краевых полей носят сложный характер для реализации вычислительного эксперимента необходимо наличие программного обеспечения, позволяющего проводить расчеты и обрабатывать полученные результаты. В связи с этим можно выделить ряд требований, выдвигаемых к программному обеспечению. В первую очередь это наличие удобного, интуитивно понятного пользовательского интерфейса. Во-вторых использование достаточно простого языка программи-



рования, позволяющего объявлять переменные, выполнять арифметические операции, иметь гибкую настройку процесса вычисления. Для решения подобных задач необходима чрезвычайная точность так как как уже было упомянуто выше некоторые прикладные задачи могут быть связаны с человеческой жизнью. Это значит, что необходимы значительные вычислительные затраты. К тому же достаточно часто вычисления приходится повторять многократно, так как например, в таких установках как большой адронный коллайдер, однократное прохождение частиц по большому кольцу не даст необходимых результатов, необходимо отслеживать зависимость многократного прохождения.

На данный момент существует ряд пакетов, предназначенных для решения задач физики пучков: MAD [18], UAL [15], COSY INFINITY [13]. К сожалению данные пакеты не удовлетворяют требованиям, выдвинутым к программному обеспечению, так как для более специфических задач необходимо перепроверять корректность вычислений на каждом этапе, к тому же для использования этих пакетов необходимо изучить обширные спецификации.

Существует ряд универсальных пакетов символьной алгебры, не специализированных для задач, связанных с физикой пучков: Mathematica, Matlab, Maple, Mathcad. Данные пакеты предоставляют мощные средства для проведения вычислительных расчетов, а так же визуализации полученных результатов. В данной работе используется пакет Maple так как из перечисленных математических пакетов он является наиболее подходящим для символьных вычислений, к тому же он отвечает всем требованиям к программному обеспечению.

## 2 Краевые поля

### 2.1 Начальные условия

Оператор эволюции, описанные выше, позволяют переводить пучок из начального состояния в конечное. Для корректной работы данной системы необходимо задать начальные условия. Для описания пучка частиц используют фазовые множества. Пусть  $M_0$  - множество в фазовом пространстве,  $\delta M_0$  - граница этого множества. Тогда  $\delta M_0$  можно назвать фазовым портретом.

Огибающая - наблюдаемая (измеряемая) числовая характеристика фазового портрета пучка. Огибающие можно представить в конфигурационном пространстве и в пространстве скоростей в следующем виде соответственно:

$$\begin{aligned} s_x(M) &= \sup_M x, & s_y(M) &= \sup_M y \\ s_{x'}(M) &= \sup_M \frac{dx}{ds}, & s_{y'}(M) &= \sup_M \frac{dy}{ds}. \end{aligned}$$

Для удобства фазовый портрет чаще аппроксимируют эллипсоидом, причем эллипсоид может быть либо вписан в  $M_0$  с максимально возможным объемом, либо описан вокруг  $M_0$  с минимально возможным объемом. В этом случае граница фазового множества будет задаваться уравнением:

$$X_0^* A_0 X_0 = 1,$$

где  $X_0$  - вектор начальных фазовых координат,  $A_0$  - симметричная, положительно определенная матрица. Введем в рассмотрение матрицу огибающих ( $\sigma$ -матрица) :  $\Sigma_0 = A_0^{-1}$ . При этом:

$$\sup_{E_0} x_i^2 = \{\sigma_0\}_{ii},$$

где  $x_i$  -  $i$ -ая компонента фазового вектора  $X$ ,  $E_0$  - рассматриваемый эллипсоид. Из чего следует, что при  $X = (x, x', y, y')^*$ :

$$s_x(E_0) = \sqrt{\sigma_{11}}, \quad s_y(E_0) = \sqrt{\sigma_{33}}, \quad s_{x'}(E_0) = \sqrt{\sigma_{22}}, \quad s_{y'}(E_0) = \sqrt{\sigma_{44}},$$

При фокусировке частиц могут накладываться требования на выходной пучок, что особенно актуально в медицине, следовательно пучок должен быть описан на входе. Выше описанные уравнения не рассматривают распределение фазовых точек в  $M_0$ . Реальные распределения, обычно приближают модельными (равномерное нормальное и т.д.) в зависимости от типа источника. Входной пучок можно описать с помощью матрицы среднеквадратичных отклонений для функции распределения  $f_0(X) = f_0(x, x', y, y')$  в фазовом пространстве:

$$\Sigma^{rms}(M_0) = \int_{M_0} f_0(X) X X^* dX.$$

## 2.2 Учет краевых полей в математической модели

Краевое поле можно разбить на три части: входное поле, выходное поле и центральная часть. Так как поле является симметричным, входное и выходное поле будут равны по площади. Схематический вид распределения краевого поля представлен на Рис.5.



Рис.5 Распределение краевого поля.

В связи с тем, что мы можем разделить краевое поле на три части, для каждой из них мы можем составить свою матрицу  $R$ , тогда оператор для линзы будет выглядеть следующим образом:  $R_{lens} = R_{out}R_cR_{in}$ . Данная методология позволяет учесть краевые эффекты в рамках одного формализма, что является несомненным ее преимуществом.

Методы, которыми можно аппроксимировать краевое поле:

- Кусочно-постоянная функция. Поле приближается постоянным значением, которое представляет собой среднюю величину поля
- Некоторый класс функций. Самыми простыми из них являются трапеция и синусоида. Так же может быть использована аппроксимация несколькими функциями сразу, сшитыми в точках перехода.

**Условия, налагаемые на краевые поля.** Одним из условий, налагаемых на подбираемую функцию является выполнение следующего равенства:

$$L_{eff}K_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds,$$

где  $L_{eff}$  -эффективная длинная линзы,  $K_{max}$  - максимальное значение градиента поля линзы,  $f(s)$  - функция распределения краевого поля. Другими словами мы подбираем функцию описывающую краевое поле так, чтобы ее площадь равнялась площади прямоугольника.

На Рис.6 синим прямоугольником обозначены физические размеры линзы, красным прямоугольником - поле линзы.  $S_1S_2$  - физическая длина линзы,  $S_0S_3$  - эффективная длина линзы,  $K_m - K_{max}$ .

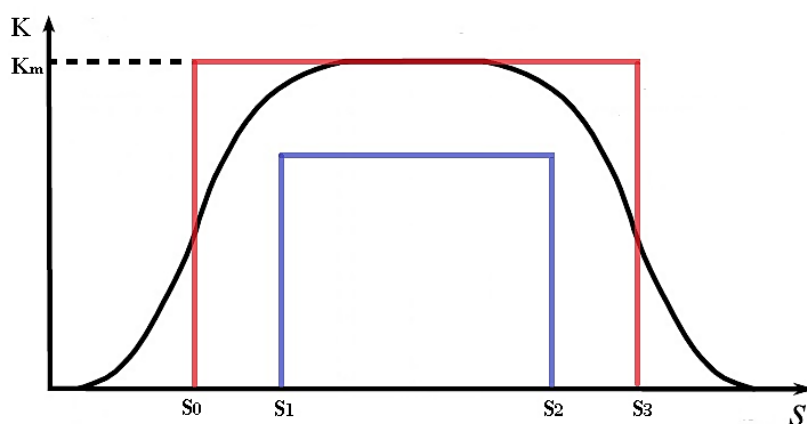


Рис.6 Краевое поле.

Аппроксимирующая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа ( $\Delta\psi = 0$ ) и должна быть гладкой. Функции, которые приводились в качестве примера выше (трапеция и синусоида) не удовлетворяют этим условиям, а значит они не физичны. Возникает вопрос о подборе такой модельной функции, которая удовлетворяла бы всем условиям, перечисленным выше, а также обладала достаточным количеством параметров, чтобы можно было варьировать краевое поле, при этом она не должна быть такой сложной как например разложение в ряд.

В данной работе в качестве модельной функции рассматривается функция Энге(англ. Enge), которая имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i}}.$$

В качестве аппроксимирующей функции функция Энге рассматривается в работах [12] и [7], но в данных работах не рассматривался вопрос о параметризации данной функции.

## 2.3 Управляющие параметры

Управляющие параметры могут быть разделены на два типа: те, которые изменить достаточно просто и те, которые не могут быть изменены (или их изменение затруднительно в процессе эксплуатации системы). К просто изменяющимся параметрам могут быть отнесены: токи на обмотках линз, объектное и рабочее расстояния. К неизменяющимся (затруднительно изменяющимся) относятся параметры, определяющие функционирование установки. Так же в рамках различных моделей в качестве управляющих параметров могут быть рассмотрены: эффективная длина магнитных линз, расстояния между линзами и диафрагмами, форма и длина краевого поля.

Особенность данной работы заключается в том, что в качестве управляющих параметров рассматриваются параметры аппроксимирующих и модельных функций. Для аппроксимации параметрами будет шаг ступенек, для модельных функций непосредственно параметры самих этих функций. В этой работе большое внимание уделяется функции Энге, так как она обладает достаточным количеством свободных параметров, для осуществления аппроксимации с максимальным приближением к экспериментальным данным и поиска оптимальных решений.

## 2.4 Параметризация функции Энге

Для упрощения вычислений, функцию Энге можно нормировать по высоте к 1. Недостатком функции Энге является то, что к значениям 1 и 0 стремиться асимптотически и точного значения не достигает, в связи с чем, мы будем рассматривать то, что функция достигает этих значений с определенной точностью. В качестве точности возьмем  $10^{-5}$ . Во всех приведенных ниже примерах параметр  $a_0$  задается точностью.

Стоит отметить, что при увеличении количества параметров нельзя точно сказать какой из параметров за что отвечает, т. к. все параметры влияют на форму кривой в совокупности.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{a_0 + a_1 x}}.$$

В данной функции параметр  $a_0$  отвечает за высоту функции и ее сдвиг относительно оси ОХ. Параметр  $a_1$  отвечает за форму кривой. На Рис.7 приведены примеры изменения параметра  $a_1$ , чем больше параметр  $a_1$ , тем больше кривая сдвигается в сторону оси ОУ. В Таблице 1 представлены значения параметров.

Таблица 1: Значение параметров для 2 параметров

a0	a1
-11.51291	5.75645
-11.51291	9.90359
-11.51291	7

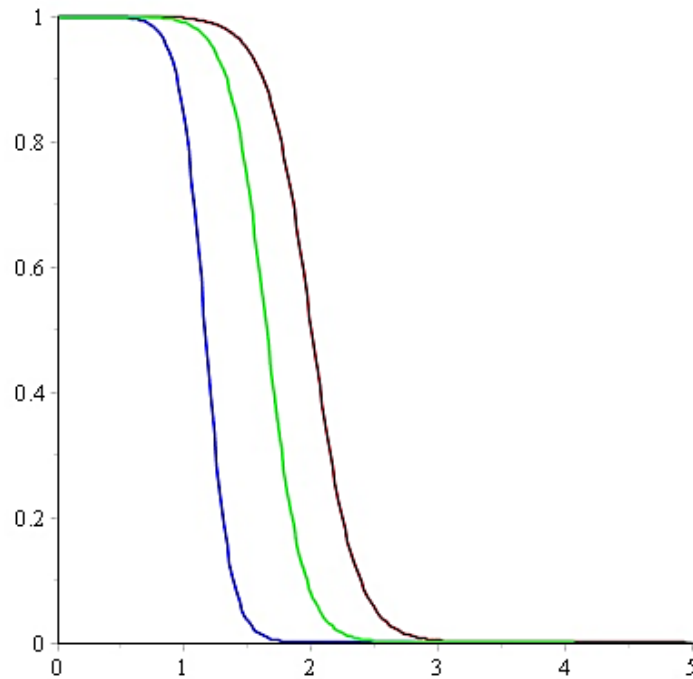


Рис.7 Функция Энге для 2 параметров.

Ввиду малого количества параметров влияющих на форму кривой варьировать её достаточно сложно, поэтому рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}}.$$

На Рис.8 показаны изменения кривой. По одному из условий, налагаемых на модельную функцию площадь кривой должна равняться площади прямоугольника. На Рис.8 все кривые равны площади прямоугольника с точностью до  $10^{-5}$ . По заданному условию можно построить бесконечное множество кривых, отличающихся только формой. На Рис.6 показано, что при уменьшении параметра  $a_2$  и увеличении параметра  $a_1$  "хвостовая" часть функции увеличивается. В Таблице 2 представлены значения параметров.



Таблица 2: Значение параметров для 3 параметров

a0	a1	a2
-11.51291	-22.76206	14.24926
-11.51291	-8.20974	6.96803
-11.51291	-2.30083	4.01071
-11.51291	-1.81210	1.95439
-11.51291	5.75649	-0.00001
-11.51291	6.79500	-0.5008

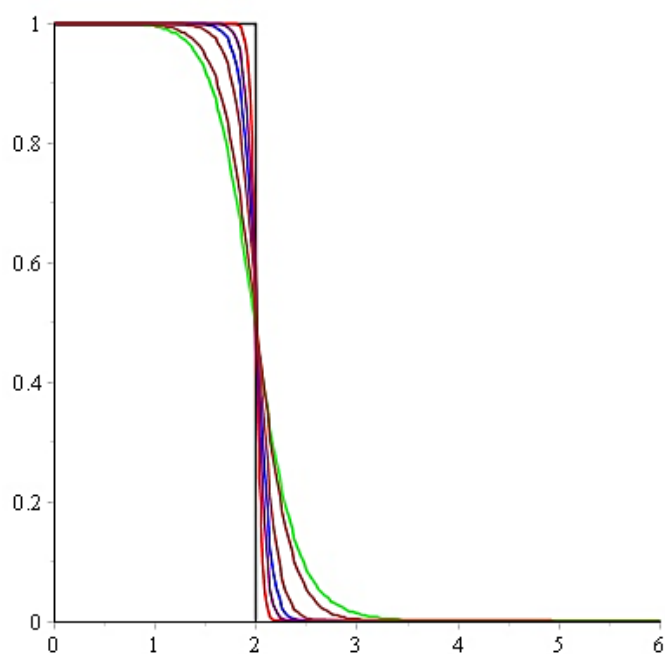


Рис.8 Функция Энге для 3 параметров.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}.$$

"Хвостовая" часть функции увеличивается, при уменьшении параметра  $a_3$  и,

как следствие, увеличении параметра  $a_2$ , это можно увидеть на Рис. 9 и в Таблице 3.

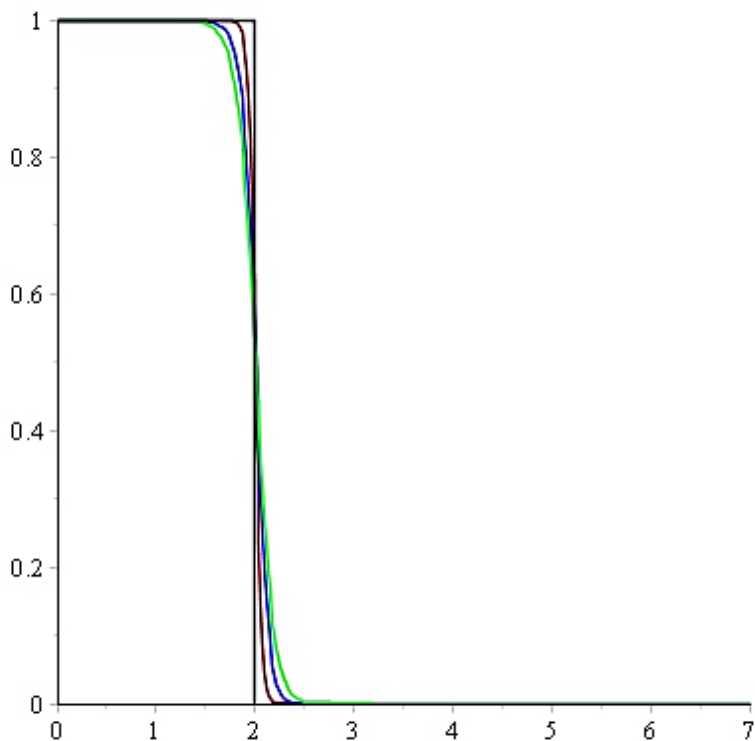


Рис.9 Функция Энге для 4 параметров.

Таблица 3: Значение параметров для 4 параметров

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
-11.51291	1.00001	-8.03922	5.19876
-11.51291	1.00001	0.11999	1.11599
-11.51291	1.00001	2.28421	0.03754

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}}.$$

При уменьшении параметра  $a_4$  и увеличении параметра  $a_3$  "хвостовая" часть функции увеличивается (Рис.10 Таблица 4).

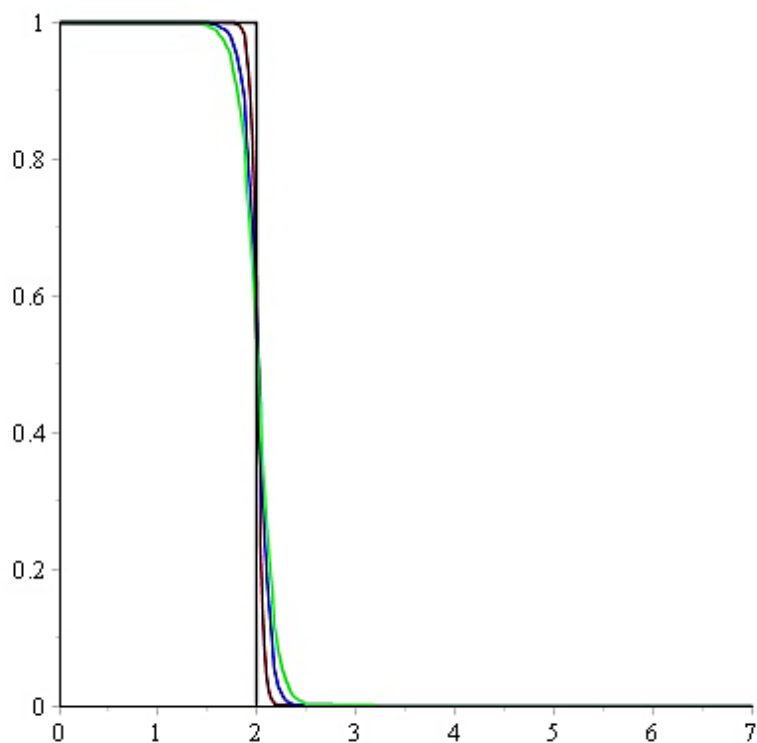


Рис.10 Функция Энге для 5 параметров.

Таблица 4: Значение параметров для 5 параметров

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
-11.51291	1.00001	0.00001	-2.34817	1.76157
-11.51291	1.00001	0.00001	1.22284	-0.02335
-11.51291	1.00001	0.00001	1.97536	-0.39661

## 3 Вычислительный эксперимент

### 3.1 Оценка точности

Для оценки точности модельной функции краевого поля большую ценность представляет собой сравнение матрицантов для модельной функции ( $R_m$ ) и аппроксимирующей ее функции ( $R_a$ ), а не сравнение модельной функции с реальным краевым полем, так как в уже работающих установках измерение краевого поля практически невозможно, а все получаемые дискретные данные имеют дискретный вид.

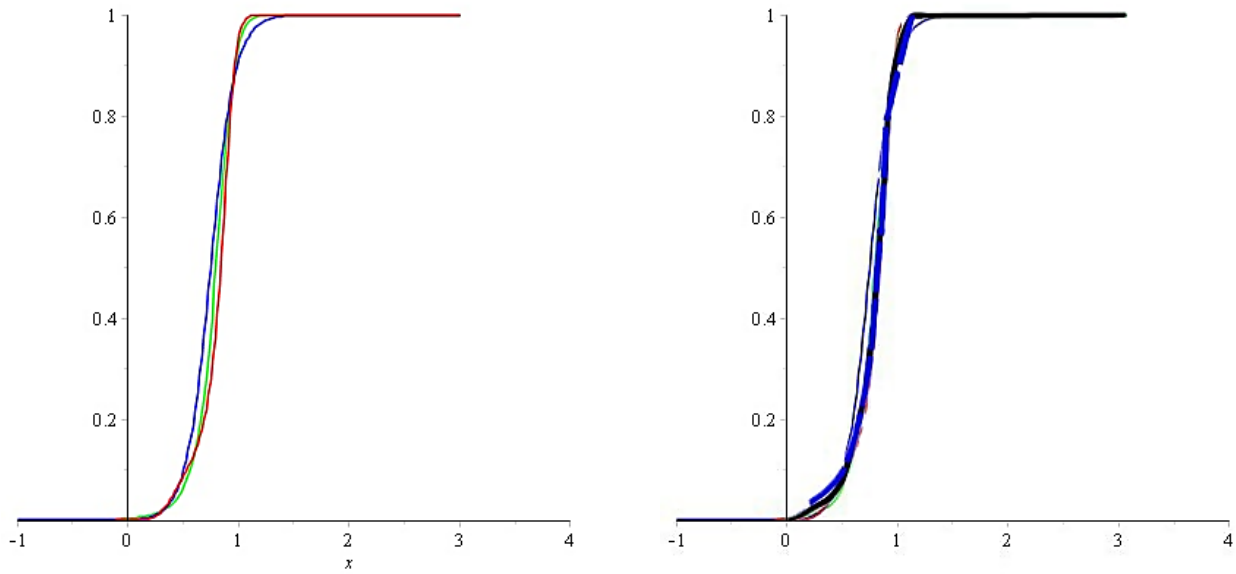
Для оценки точности приближения матрицантов модельной и аппроксимирующей функций, можно использовать следующую формулу:

$$\frac{2\|R_m(s_k|s_0) - R_a(s_k|s_0)\|}{\|R_m(s_k|s_0) + R_a(s_k|s_0)\|} < \varepsilon$$

### 3.2 Аппроксимация экспериментальных данных

Экспериментальные данные, которые используются в этом параграфе, взяты из работы [10]. На Рис. 11 (б) черная линия - экспериментальные данные для линзы из Швеции микрозонда Загреба. На Рис. 11 (а) представлены построенные функции Энге. Функции Энге в данном примере построены по точкам (из экспериментальных данных) по принципу  $f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$ , где  $(x_i, y_i)$  - точка, полученная из экспериментальных данных,  $(f(x_i))$  - значение функции Энге в  $x_i$ .

В Таблице 5 представлены значения полученных функций Энге. Чем больше параметров в функции Энге, тем точнее аппроксимирующую функцию можно приблизить к экспериментальным данным. Точность так же зависит от количества выбранных точек.



а)

б)

Рис.11 Краевое поле.

Таблица 5: Значение параметров функции Энге, представленных на Рис. 11

цвет	a0	a1	a2	a3	a4
синий	5.04113	-9.28162	0.16145	-	-
красный	22.55487	-70.21329	84.78794	-36.65629	-
зеленый	13.16759	-5.08856	-1.96294	2.38902	-0.72137

### 3.3 Влияние краевых полей на фокусировку частиц

Как уже отмечалась выше, по заданным  $L_{eff}$  и  $K_{max}$  можно построить бесчисленное множество функций, в связи с чем, возникает вопрос - поле какой формы будет лучше влиять на фокусировку, то, где хвостовая часть больше или меньше? Для ответа на этот вопрос было проведено следующее исследование влияния на фокусировку в терминах функции Энге. В качестве ЗФС рассматривался русский квадруплет. Параметры системы приведены в

работе [1]. Для реализации исследования был написан комплекс программ с использованием пакета Maple. Можно выделить следующие этапы построения программы:

1. Построение функции Энге, описывающей краевое поле;
2. Кусочно-постоянная аппроксимация функции Энге для дальнейшего построения оператора эволюции;
3. Построение матриц  $R_i$ , отвечающих за каждый участок (свободные промежутки, линзы) ;
4. Построение общего оператора эволюции;

1. Для построения корректного оператора эволюции необходимо перейти к безразмерным величинам. На Рис 12 часть кода по построению функции Энге с безразмерными величинами. Так как входное и выходное краевое поле квадрупольной линзы симметричны, достаточно построить только входное (выходное) поле, а для получения выходного (входного) поля можно отразить и сместить на необходимо расстояние построенную часть.

```

> with(plots):
#для 5-ми параметров
h := x -> 1 / (1 + exp(a0 + a1*x + a2*x^2 + a3*x^3 + a4*x^4));
eps := 0.00001;
a0 := ln((1 - eps) / eps); p := 100.4; b2 := 1.93 / p;

Leff2 := 9.65 / p;
T := plot([[0, 1], [b2, 1], [b2, 0]], x = 0..0.01, style = line, color = black);
k := eps / sqrt(1 - eps^2);
x2 := 2.1 / p;
a4 := 1346900000000;
a1 := k * (1 + exp(a0))^2 / exp(a0);

a2 := (eps * (1 + exp(a0))^2) / (2 * exp(a0) * sqrt(1 - eps^2)) + (a1^2 * exp(a0)) / (1 + exp(a0)) - a1 / 2;
a3 := (ln((1 - eps) / eps) - a0 - a1*x2 - a2*x2^2 - a4*x2^4) / x2^3;

```

Рис.12 Построение функции Энге.

2. Для того, чтобы учесть построенную функцию Энге в матричном формализме, функция разбивается на  $N$  частей, строится кусочно-постоянная аппроксимация. Для каждого участка кусочно-постоянной функции строится матрица  $R_i$  (Рис. 13).

```

> R_F := Matrix(4, 4, [[cos(l*w),  $\frac{\sin(l*w)}{w}$ , 0, 0], [-w*sin(l*w), cos(l*w), 0, 0], [0, 0, cosh(l*w),  $\frac{\sinh(l*w)}{w}$ ], [0, 0, w*sinh(w*l), cosh(w*l)]]):
  R_D := Matrix(4, 4, [[cosh(l*w),  $\frac{\sinh(l*w)}{w}$ , 0, 0], [w*sinh(w*l), cosh(w*l), 0, 0], [0, 0, cos(l*w),  $\frac{\sin(l*w)}{w}$ ], [0, 0, -w*sin(l*w), cos(l*w)]]):

for i from 1 to N do
  R[i] := subs(l = k*i, w = sqrt(abs(m[i])), R_F);
  Ra[i] := subs(l = k*i, w = sqrt(abs(m[i])), R_D);
end do;

```

Рис.13 Построение  $R_i$ .

3. Для построения матрицы перехода, отвечающей за всю линзу необходимо перемножить все матрицы, построенные в результате кусочно-постоянной аппроксимации, для выходного поля, для центральной части и для входного поля.

4. Для построения общего оператора эволюции необходимо перемножить все матрицы, построенные для линз и для свободных промежутков.

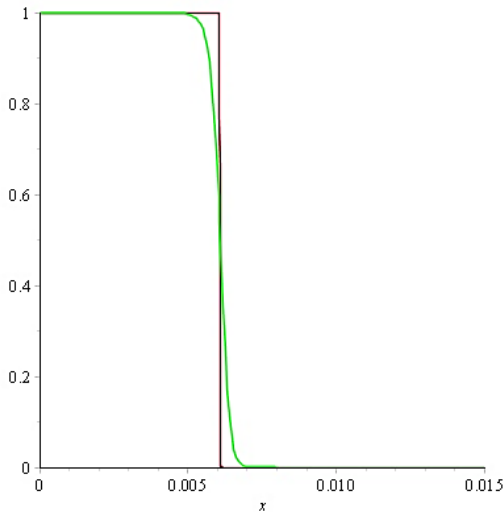


Рис.14 Краевое поле

На Рис. 14 приведены примеры построения краевого поля для линзы  $L_{eff} = 12.15$  см, а на Рис. 15 представлены матрицы для линзы с такими краевыми полями. Первая матрица соответствует зеленой функции. Если сравнить элементы матриц, то можно заметить, что для функции, отмеченной коричневым цветом фокусирующее свойство больше. Следовательно, чем меньше хвостовая часть функции, тем лучше это отразится на фокусировке.

$$R1_f := \begin{bmatrix} 1.93264177364469 & 2.06676891668605 & 0. & 0. \\ 1.93264177364469 & 2.06676891668605 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.17473872548722 & 2.17540462237745 \\ 0. & 0. & 2.17473872548722 & 2.17540462237745 \end{bmatrix}$$

$$R1_f := \begin{bmatrix} 1.93041160371128 & 2.09162940483084 & 0. & 0. \\ 1.93041160371128 & 2.09162940483084 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.19252166400795 & 2.19734871472313 \\ 0. & 0. & 2.19252166400795 & 2.19734871472313 \end{bmatrix}$$

Рис.15 Матрицы для краевых полей с Рис.14

В результате исследования было выявлено, что краевое поле оказывает существенное влияние на фокусировку, наблюдается расхождение с идеальной прямоугольной моделью примерно в 2 раза. На Рис. 16 представлены матрицы, построенные для линзы  $L_{eff} = 12.15$  см.  $R1_Pf$  - матрица для фокусирующей линзы для прямоугольной модели,  $R1_f$  - матрица для фокусирующей линзы, построенная для краевого поля с учетом функции Энге.

$$R1_Pf := \begin{bmatrix} 0.9995387152 & 0.03037032935 & 0 & 0 \\ -0.03037032935 & 0.9995387152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000461356 & 0.03037967108 \\ 0 & 0 & 0.03037967108 & 1.000461356 \end{bmatrix}$$

$$R1_f := \begin{bmatrix} 1.93264177364469 & 2.06676891668605 & 0. & 0. \\ 1.93264177364469 & 2.06676891668605 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.17473872548722 & 2.17540462237745 \\ 0. & 0. & 2.17473872548722 & 2.17540462237745 \end{bmatrix}$$

Рис.16 Матрицы для линзы  $L_{eff} = 12.15$ .



Данный подход является универсальным, не зависит от начальных данных, может быть применен для любой ЗФС, может быть использован для более глубокого исследования влияния краевых полей на фокусировку в ЗФС.

## Заключение

В данной работе рассматривается унифицированная модель краевых полей для высокопрецизионных фокусирующих установок, удовлетворяющая физическим ограничениям. В работе показано, что использованный подход (матричное представление) позволяет учесть эффекты краевых полей в рамках одного формализма. Так же в работе продемонстрированы плюсы матричного представления: универсальность, гибкость и полиморфизм. А так же, что при изменении модельной или аппроксимирующей функции в описанной выше модели достаточно изменить только оператор, отвечающий за эту функцию, при этом логическая структура всей модели и связи между элементами остаются неизменны, что позволяет достаточно легко использовать различные функции для сравнения. В работе так же был проведен анализ параметризации аппроксимирующей функции, результат которого может быть использован на этапе конструирования магнитной линзы.

# Литература

## Список литературы

- [1] Абрамович С. Н., Завьялов Н. В., Звенигородский А. Г., Игнатъев И. Г., Багилин Д. В., Мельник К. И., Пономарев А. Г. Оптимизация зондоформирующей системы ядерного сканирующего микрозонда на базе электростатического перезарядного ускорителя ЭСП-10. Ж. техн. физ. N 2, 2005, т.75, стр.6-12
- [2] Агафонов А.В. Ускорители в медицине. // 15-е совещ. по ускорит. зарядж. част. Т. 2. Протвино, 1996.
- [3] Андрианов С. Н. Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. СПбГУ, СПб, 2004
- [4] Брехна Г. Сверхпроводящие магнитные системы. М. Мир, 1976. 704 с.
- [5] Гаврилов Н.М., Сомов С.В. Оборудование для работы с ускоренными пучками. М. НИЯУ МИФИ, 2010. 224 с.
- [6] Забаев В.Н. Применение ускорителей в науке и промышленности Томск: Изд-во ТПУ, 2008. -190 с.
- [7] Иванов А. Н. Нелинейное матричное интегрирование спин-орбитальной динамики заряженных частиц. СПбГУ, СПб, 2015
- [8] Мартиросян, Ю. Л. Исследование эффектов краевых магнитных полей в накопительных кольцах. Журнал технической физики. 2003 Т. 73, Выпуск 10, с. 113-115.

- [9] Роузен Л. Применение ускорителей заряженных частиц. УФН, 1972 т. 106, вып.4, с.664-671
- [10] Терешонков Ю. В. Математическое моделирование зондоформирующих систем с учетом краевых полей. СПбГУ, СПб, 2010
- [11] Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. М. Мир, 1969. 223 с.
- [12] Berz M., Erdelyi B., Makino K. Fringe field effects in small rings of large acceptance. // Phys. Rev. ST Accel. Beams 2000. Vol. 3. № 124001, P. 1-11
- [13] Berz M., Makino K. COSY INFINITY Version 8.1 User's Guide and Reference Manual. Michigan State University, 2002. 77p.
- [14] Minea, R.; Oproiu, C.; Pascanu, S.; Matei, C.; Ferdes, O. Preliminary research concerning the use of electron accelerators to improve the conservability and to extend the shelf-life of fruits and vegetables. Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, B, Volume 113, Issue 1, p. 99-102
- [15] Malitsky N., Talman R. UAL User Guide. Brookhaven National Laboratory, 2002, 110p.
- [16] Venturini M. Scaling of third-order quadrupole aberrations with fringe field extension. // IEEE Particle Accelerator Conference, 1999, vol.3 p.1590 - 1592
- [17] R.M.G.M. Trines, J.I.M. Botman, S.J.L. van Eijndhoven, H.L. Hagedoorn, T.J. Schep Modeling the fringe fields of a multipole device. // 1998 European particle accelerator conf. v.3, p. 1969-1971
- [18] <http://mad.web.cern.ch/mad/>