

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Мацинин Денис Андреевич

Выпускная квалификационная работа специалиста

Кручение цилиндрического шарнира из гармонического материала Джона

Направление 010501 Прикладные математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Малькова Ю. В.

Рецензент,
кандидат тех. наук,
доцент

Волкова Т. А.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	3
3	Соотношения плоской задачи для материала Джона	3
4	Гармонический материал Джона	5
5	Нахождение комплексных потенциалов	7
6	Решение граничных задач	8
7	Расчет жесткостной характеристики шарнира	10
8	Заключение	11

1. Введение

В данной работе решена нелинейная задача кручения эластомерного шарнира для модели гармонического материала Джона.

Эластомерные цилиндрические шарниры находят широкое применение в различных областях техники. В качестве примера можно назвать шарниры вертолетных винтов и танковых гусениц.

Модель материала Джона [1] позволяет описать большие деформации реальных материалов, в частности, резиноподобных. Её применимость была подтверждена экспериментами [2]. Эта модель позволяет использовать для решения плоских нелинейных задач методы теории комплексных функций, которые широко применимы в линейной теории упругости. Джон показал, что существует класс материалов, которые он назвал гармоническими, для которых уравнение плоской деформации выражается через две аналитические функции комплексной переменной. Это представление является обобщением комплексных методов линейной теории упругости и развитием методов, разработанных Н.И. Мусхелишвили [3]. Комплексная формулировка нелинейной плоской задачи предложена в работе [2], дальнейшее развитие комплексного метода дано в работах [4], [5].

Основная цель данного исследования состояла в том, чтобы получить точное аналитическое решение нелинейной задачи кручения полого цилиндрического шарнира для модели гармонического материала Джона. Применение методов теории функций комплексного переменного позволило получить простое решение в замкнутой форме. Была найдена аналитическая формула зависимости крутящего момента от угла закручивания.

Результаты теоретического и экспериментального исследований кручения цилиндрического шарнира из неогукковского материала приведены в работе [6]. Эксперименты проводились на нескольких образцах эластомерных цилиндрических шарниров при больших деформациях кручения. Углы поворота имели порядок 40 - 90 градусов, а деформации растяжения превышали 300%. В этой же работе показано, что для модели несжимаемого неогукковского материала теоретическая жесткостная характеристика шарнира является линейной, что с высокой точностью соответствует эксперименталь-

ным результатам.

В данной работе показано, какие жесткостные характеристики кручения эластомерного шарнира дает модель материала Джона, примененная к большим деформациям эластомерных материалов. Представлено сравнение результатов расчетов крутящего момента от угла поворота шарнира для гармонического материала Джона с результатами экспериментов [6].

2. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная плоская задача кручения цилиндрического шарнира из эластомерного материала. Для описания механических свойств материала используется упругий потенциал гармонического материала Джона.

Внутренняя и внешняя поверхности шарнира считаются недеформируемыми, причем внутренняя поверхность неподвижна, а внешняя поворачивается на некоторый угол ω крутящим моментом. Задача является плоской и осесимметричной. В цилиндрических координатах отсчетной конфигурации (r, θ) внутренний и внешний радиусы шарнира обозначены r_1 и r_2 соответственно.

Граничные условия имеют вид

$$r = r_1 : r^* = r_1, \theta^* = 0; \quad r = r_2 : r^* = r_2, \theta^* = \omega,$$

где (r^*, θ^*) — текущие полярные координаты точки шарнира.

3. Соотношения плоской задачи для материала Джона

Рассмотрим уравнения равновесия и совместности деформаций [7]

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0},$$

где \mathbf{S} — тензор условных (номинальных) напряжений, \mathbf{G} — градиент деформации.

Существуют следующие зависимости

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A},$$

\mathbf{B} – тензор напряжений Био, $\mathbf{\Lambda}$ – тензор кратности удлинений. Последнее соотношение есть полярное разложение градиента деформации, здесь \mathbf{Q} – ортогональный тензор, $\mathbf{\Lambda}$ – симметричный тензор, представимый в виде соотношения $\mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$.

Пусть \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, – ортонормированный векторный базис отсчётной конфигурации. Для случая плоской задачи градиент деформации и тензор условных напряжений можно представить в следующем виде

$$\mathbf{G} = g_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + g_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + g_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + g_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + g_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{S} = s_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + s_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + s_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

где s_{ij} – компоненты тензора номинальных напряжений, g_{ij} – компоненты градиента деформации, $i, j = 1, 2, 3$.

Ортогональный тензор запишем в виде

$$\mathbf{Q} = q_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + q_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + q_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + q_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + q_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \cos \omega (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) - \sin \omega (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Здесь ω – угол поворота главных осей в результате деформации.

Отсюда получаем соотношения

$$\begin{aligned} q_{11} = q_{22} = \cos \omega; \quad q_{12} = -q_{21} = -\sin \omega, \quad q_{33} = -1, \\ q_{11} + q_{22} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \omega, \quad q_{21} - q_{12} = (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \omega, \\ s_{11} + s_{22} = (b_1 + b_2) \cos \omega, \quad s_{12} - s_{21} = (b_1 + b_2) \sin \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где b_1, b_2 – главные напряжения Био, λ_1, λ_2 – главные кратности удлинений.

Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме имеют вид [5]

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 = 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть (x_1, x_2) – декартовы координаты отсчётной конфигурации, (ζ_1, ζ_2) – декартовы координаты текущей конфигурации. Введем функции z, ζ и комплексную функцию напряжений σ в виде

$$z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2.$$

Функция ζ представляет текущие координаты точки, физический смысл функции σ следует из следующего соотношения

$$\sigma = f_1 + if_2 = i \int s_{n1} + is_{n2} ds + const,$$

$$s_{n1} + is_{n2} = (s_{11} + is_{21}) \cos(n, x_1) + i(s_{22} - is_{12}) \cos(n, x_2),$$

f_1, f_2 – проекции на оси координат главного вектора сил на дуге s , n – нормаль к дуге.

Уравнения (2) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения для ζ и σ

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из системы (3) получим

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= (g_{11} + g_{22}) + i(g_{21} - g_{12}), & 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= (g_{11} - g_{22}) + i(g_{21} + g_{12}), \\ 2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= (s_{11} + s_{22}) + i(s_{21} - s_{12}), & 2 \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} &= (s_{22} - s_{11}) + i(s_{12} + s_{21}). \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнений (1) найдем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)e^{i\omega}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{2}(b_1 + b_1)e^{i\omega}, \quad (4)$$

где угол ω определяется по компонентам тензоров \mathbf{G} или \mathbf{S}

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{g_{21} - g_{12}}{g_{11} + g_{22}} = \frac{s_{12} - s_{21}}{s_{11} + s_{22}}.$$

Из (4) можно записать соотношения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \operatorname{sign}(s_{11} + s_{22}) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right| e^{i\omega}.$$

4. Гармонический материал Джона

Под гармоническими материалами в плоской задаче понимают класс материалов, для которых выполняется соотношения вида

$$\frac{b_1 - b_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 2\mu,$$

где μ – модуль сдвига.

Упругий потенциал гармонического материал Джона определяется удельной энергией деформации по формуле

$$\Phi = 2\mu[F(I) - J], \quad (5)$$

где

$$I = \sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 + (g_{21} - g_{12})^2}, \quad J = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21},$$

I – первый инвариант тензора кратности удлинений, $F(I)$ – некоторый функционал. Для главных напряжений Био имеем

$$b_1 = 2\mu[F'(I) - \lambda_2], \quad b_2 = 2\mu[F'(I) - \lambda_1].$$

Потенциалу (5) соответствует класс гармонических материалов. Чтобы получить конкретную модель материала, надо задать вид функциональной зависимости $F(I)$.

Используя выражение (5), получим закон упругости для компонент тензора номинальных напряжений

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g_{11}} = 2\mu \left[\frac{1}{I} F'(I)(g_{11} + g_{22}) - g_{22} \right], \\ s_{22} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g_{22}} = 2\mu \left[\frac{1}{I} F'(I)(g_{11} + g_{22}) - g_{11} \right], \\ s_{12} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g_{21}} = 2\mu \left[\frac{1}{I} F'(I)(g_{21} - g_{12}) + g_{12} \right], \\ s_{21} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g_{12}} = 2\mu \left[\frac{1}{I} F'(I)(g_{12} - g_{21}) + g_{21} \right]. \end{aligned}$$

Закон упругости в комплексной форме имеет вид [4]

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \\ s_{22} - is_{21} &= 2\mu \left[\frac{2}{I} F'(I) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где инвариант I представим в форме

$$I = 2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}.$$

Подставив в (6) напряжения (3), придем к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}} &= 2\mu \left[\frac{2}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} \right], \\ \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}} &= 2\mu \left[\frac{2}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} \right].\end{aligned}\tag{7}$$

Складывая и вычитая уравнения системы (7) получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 4\mu\frac{1}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} = 0.\tag{8}$$

5. Нахождение комплексных потенциалов

Для нахождения функций ζ и σ необходимо решить систему (8). Из второго уравнения этой системы получим

$$\sigma + 2\mu\zeta = \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ – неизвестная аналитическая функция. Используем это равенство и исключим функцию σ из первого уравнения (8), тогда

$$4\mu\frac{1}{I}F'(I)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \varphi'(z).\tag{9}$$

Согласно (4)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial\zeta}{\partial z} \right| \frac{1}{2\mu F'(I)}\varphi'(z).$$

С другой стороны имеем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \left| \frac{\partial\zeta}{\partial z} \right| e^{i\omega}.$$

Сопоставляя эти соотношения, приходим к равенствам

$$\varphi'(z) = 2\mu F'(I)e^{i\omega}, \quad |\varphi'(z)| = 2\mu |F'(I)|.$$

Далее необходимо задать конкретный вид функционала $F(I)$. Это позволит найти инвариант I как функцию от $\varphi'(z)$. Функционал $F(I)$ выбирается таким образом, чтобы частное решение было максимально простым, а результаты не противоречили физическим представлениям. В работах [4, 5] было предложено следующее выражение

$$2\mu F'(I) = \frac{1}{4b}(I + \sqrt{I^2 - 16bc}) > 0,$$

где

$$4\mu b = 1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}; \quad c = \mu \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) = 2\mu(1 - 2\mu b).$$

Под корнем должна стоять неотрицательная величина и это налагает некоторые ограничения на величину деформаций: $I^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \leq 16bc$, кратности удлинений не могут одновременно быть близки нулю. Предельный переход к случаю малых деформаций возможен. Постоянные b и c определяются из условий перехода нелинейного закона упругости в закон Гука при малых деформациях [5].

В работах [4, 5] было предложено задавать не функционал $F(I)$, а непосредственно инвариант I как функцию от $|\varphi'(z)|$

$$I(|\varphi'(z)|) = 2|\varphi'(z)| \left[b + \frac{c}{|\varphi'(z)|^2} \right], \quad (10)$$

$$|\varphi'(z)| = 2\mu|F'(I)|.$$

Подставив в уравнение (9) функцию (10) и проинтегрировав, получим [5]

$$\zeta = \overline{\psi(z)} + b\varphi(z) + \frac{cz}{\varphi'(z)}. \quad (11)$$

Тогда

$$\sigma = (1 - 2\mu b)\varphi(z) - 2\mu\overline{\psi(z)} - 2\mu\frac{cz}{\varphi'(z)}, \quad (12)$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ — аналитические функции от z .

6. Решение граничных задач

В полярных координатах отсчетной конфигурации (r, θ) уравнения равновесия и совместности имеют вид

$$[r(s_{rr} + is_{r\theta})]'_r + i(s_{\theta\theta} - is_{\theta r})'_\theta - (s_{\theta\theta} - is_{\theta r}) = 0, \quad (13)$$

$$[r(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta})]'_r + i(g_{rr} + ig_{\theta r})'_\theta - (g_{rr} + ig_{\theta r}) = 0.$$

Уравнения (13) тождественно удовлетворяются при подстановке в них выражений

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}e^{-2i\theta}, \quad s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}e^{-2i\theta}, \quad (14)$$

$$g_{rr} + ig_{\theta r} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}, \quad g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta},$$

где функции ζ и σ имеют вид (11), (12).

Имеют место равенства, вытекающие из формул (14), (11), (12)

$$s_{rr} + is_{r\theta} + 2\mu(g_{\theta\theta} - ig_{r\theta}) = \varphi'(z),$$

$$s_{rr} + is_{r\theta} + s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = 2(1 - 2\mu b)\varphi'(z) - 4\mu c \frac{1}{\varphi'(z)}.$$

Поскольку поверхность шарнира $r = r_1$ не деформируется, то на этой поверхности $g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} = 1$ и напряжения определяются только функцией $\varphi'(z)$

$$s_{rr} + is_{r\theta} = \varphi'(z) - 2\mu,$$

$$s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = (1 - 4\mu b)\varphi'(z) - 4\mu c \frac{1}{\varphi'(z)} + 2\mu.$$

Граничные условия задачи при $r = r_1$ и $r = r_2$ для функции ζ имеют вид

$$\left[b\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)} \right]^- = r_1 e^{i\theta},$$

$$\left[b\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \frac{cz}{\varphi'(z)} \right]^+ = r_2 e^{i(\theta+\omega)}.$$

Решение этих граничных задач возьмем в виде

$$\varphi(z) = Az, \quad \psi(z) = B \frac{1}{z},$$

где A, B – неизвестные комплексные постоянные.

Подставим функции (16) в граничные условия (15)

$$bA + \overline{B} \frac{1}{r_1^2} + \frac{c}{A} = 1, \quad bA + \overline{B} \frac{1}{r_2^2} + \frac{c}{A} = e^{i\omega}.$$

Найдем из (17) значения постоянных

$$A = C \frac{1 + \sqrt{1 - 4bc/|C|^2}}{2b},$$

$$B = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (1 - e^{-i\omega}), \quad C = \frac{r_2^2 e^{i\omega} - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Для постоянной A из уравнений (17) имеем два решения, по физическим соображениям подходит только одно, которое выписано. При отсутствии деформаций, когда $\omega = 0$, постоянные $A = 2\mu, B = 0$.

Комплексные потенциалы имеют вид

$$\zeta = Cz + \overline{B}\frac{1}{\overline{z}}, \quad \sigma = Az - 2\mu \left(Cz + \overline{B}\frac{1}{\overline{z}} \right).$$

По формулам (14) получим

$$s_{rr} + is_{r\theta} = A - 2\mu \left(C + e^{-2i\theta} \frac{\overline{B}}{\overline{z}^2} \right) = A - 2\mu \left(C + \frac{B}{r^2} \right),$$

$$s_{\theta\theta} - is_{\theta r} = A - 2\mu \left(C - e^{-2i\theta} \frac{\overline{B}}{\overline{z}^2} \right) = A - 2\mu \left(C - \frac{B}{r^2} \right),$$

$$g_{rr} + ig_{\theta r} = C - \frac{B}{r^2}, \quad g_{\theta\theta} - ig_{r\theta} = C + \frac{B}{r^2}.$$

Крутящий момент на окружности $r = r_1$ находится по формуле

$$M = 2\pi r_1^2 (s_{r\theta} \cos \omega - s_{rr} \sin \omega) = 2\pi r_1^2 \operatorname{Im}[(s_{rr} + is_{r\theta})e^{-i\omega}] = \quad (18)$$

$$= 4\pi\mu r_1^2 \left[1 + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4bc/|C|^2}}{4\mu b} \right] \sin \omega,$$

где

$$4bc = 1 - \frac{\mu^2}{(\lambda + 2\mu)^2}, \quad |C|^2 = \frac{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 \cos \omega}{(r_2^2 - r_1^2)^2}.$$

При малых углах поворота ω из (18) получим

$$M = 4\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \omega. \quad (19)$$

Эта формула совпадает с полученной в работе [6] для модели неогуковского материала.

7. Расчет жесткостной характеристики шарнира

Выполнены расчеты крутящего момента в зависимости от угла поворота ω внешней поверхности шарнира. Внешний радиус равен 4,8 см, внутренний радиус менялся, модули упругости материала: $\mu = 5,235$ кг/см², $\lambda = 2615$ кг/см².

На рисунках 1-3 представлена зависимость момента от угла поворота ω . На рис. 1 внутренний радиус шарнира $r_1 = 1,5$ см, на рис. 2 $r_1 = 2$ см и на рис. 3 $r_1 = 2,5$ см. Прямая линия обозначает крутящий момент, найденный по формуле (19). Эта зависимость соответствует результатам экспериментов, проводимых на эластомерных

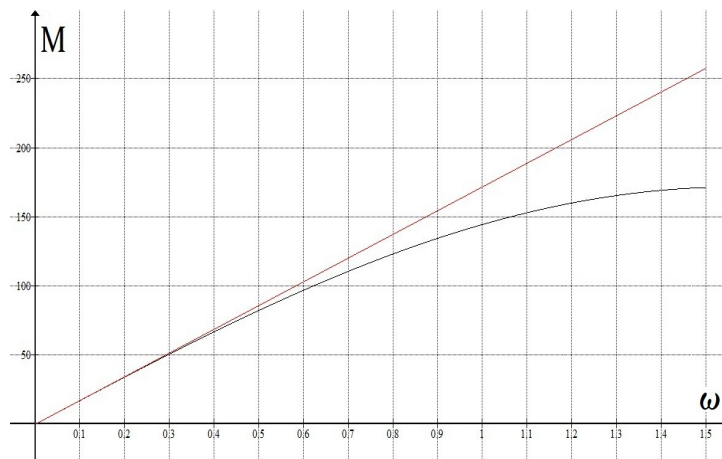


Рис. 1.

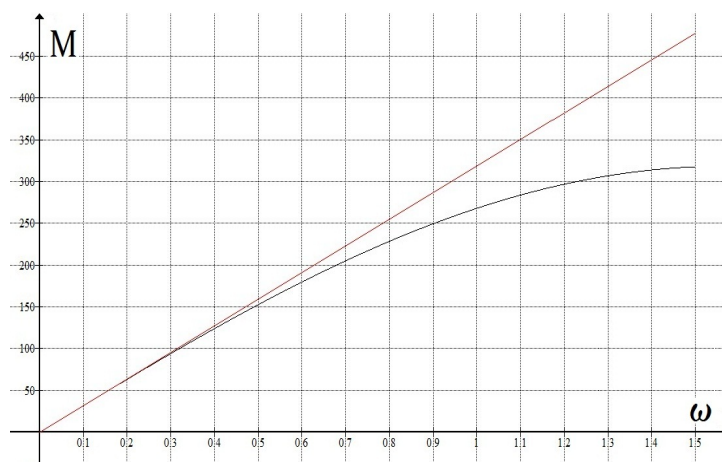


Рис. 2.

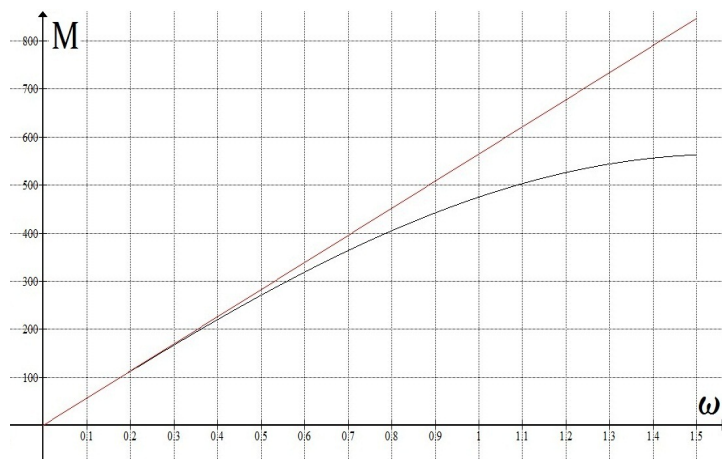


Рис. 3.

шарнирах и представленных в работе [6]. Кривой представлены расчеты по формуле (18).

Результаты расчетов жесткостной характеристики были сопоставлены с экспериментальными данными для шарниров, выполненных из эластомерных материалов. Погрешность между результатами теоретических расчетов крутящего момента и его экспериментальными значениями в зависимости от величины внутреннего радиуса шарнира составляет около 10 % для углов поворота шарнира $\omega \leq 40^\circ - 60^\circ$.

8. Заключение

В данной работе методом комплексных функций получено точное решение задачи кручения цилиндрического шарнира для модели гармонического материала Джона.

Найдена зависимость крутящего момента от угла закручивания и размеров шарнира. Результаты расчетов жесткостной характеристики были сопоставлены с экспериментальными данными для шарниров, выполненных из эластомерных материалов. Наблюдается хорошее соответствие между результатами теоретических расчетов крутящего момента в зависимости от угла поворота и его экспериментальными значениями при углах поворота шарнира $\omega \leq 40^\circ$.

Список литературы

- [1] John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. XIII. P. 239–290.
- [2] Varley E., Cumberbatch E. Finite deformation of elastic materials surrounding cylindrical holes // J. of Elasticity. 1980. Vol. 10, No 4. P. 341–405.
- [3] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
- [4] Ru C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials // Acta Mechanica. 2002. Vol. 156, No 3–4. P. 219–234.
- [5] Мальков В. М. Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2008. № 3. С. 114–126.
- [6] Акчурин Т. Р., Мальков В. М. Теоретическое и экспериментальное исследование кручения эластомерного цилиндрического шарнира // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2004. Вып. 1. С. 73 – 80.
- [7] Мальков В.М. Введение в нелинейную упругость. СПб. 2010. 276 с.