Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математической теории игр и статистических решений

Берзиньш Андрей Айнарович

Дипломная работа

Стохастические модели оценки стоимости финансовых инструментов

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
старший преподаватель,
Тур А.В.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

1. Введение и обзор литературы

Дипломная работа посвящена исследованию стохастических моделей расчета стоимости финансовых инструментов. Расчет безарбитражных цен финансовых инструментов – это задача, которой во всем мире уделяется в настоящее время большое внимание. Сделки с производными инструментами заключаются как на биржевом, так и на внебиржевом рынке. Конкуренция биржевого и внебиржевого секторов послужила дополнительным стимулом к развитию рынка производных финансовых инструментов. Особенно широкое распространение получили операции с опционами. Изначально опционы задумывались как инструмент, предназначенный для страхования результатов деятельности крупных игроков, таких как банки или торговые дома. Существовали как реальные поставки товаров, так и чисто финансовые операции. И в настоящее время опционы не утратили своего первоначального значения. Оно интересно тем инвесторам, которые не гонятся за высокой доходностью, и которым важнее всего снижение рисков. Такие операции называются операциями хеджирования[1]. Принцип хеджирования – заключить сделку на срочном рынке на поставку акций в будущем, зафиксировав цены сделки в момент покупки (продажи) контракта. Стратегия хеджирования – пожертвовать возможностью получения выгоды от благоприятного изменения цены, с целью получения защиты от неблагоприятного изменения цены. Однако вскоре выяснилось, что опционы хорошо подходят и для спекулятивных целей. После этого операциями с опционами стали заниматься и мелкие инвесторы. Очень многие, попробовав работать с опционами, практически перестают использовать фьючерсы и сделки с реальным активом в повседневной работе. Такая притягательность опционов объясняется рядом их замечательных свойств. Прежде всего, это такая краеугольная характеристика опционов, как волатильность. С ее помощью описывают изменчивость цены актива. Использование волатильности позволяет получать прибыль, даже если цена на актив не изменяется. Аналогичного свойства нет больше ни у одного финансового инструмента. Периодические колебания волатильности носят более регулярный характер, чем колебания актива, при повышении волатильности опционы растут в цене. Поэтому очень распространены торговые методики продажи дорогих опционов в периоды высокой волатильности и покупки дешевых опционов в периоды низкой волатильности[2]. Другая особенность опционов – это обилие их различных комбинаций. У обычных людей опцион ассоциируется именно с этим их свойством. Так, широко распространено мнение, что работа в том и заключается, чтобы в поисках недооцененных комбинаций перебрать все возможные варианты. Отчасти это верно, однако перебрать все комбинации просто невозможно, и у каждого трейдера есть свои методики и «поля деятельности», с которыми они и работают. Применение комбинаций опционов позволяет делать ставки на какое-либо особенное поведение актива. Например, на то, что он останется в каком-то ценовом интервале в течение ограниченного времени, в предположении, что скоро будет сильное движение и при этом неизвестно его направление, что скоро на рынке изменится представление о будущем росте и т. д. Подобные возможности отсутствуют при использовании простых покупок или продаж базового актива. Применение опционов часто позволяет не ждать нужной точки входа в позицию по торговой стратегии. Для примера рассмотрим простейший вариант стратегии торговли в диапазоне. Предполагается, что цена актива не может выйти за некоторые границы. Поэтому, как только цена приближается к верхней границе, надо продавать, а при выходе на нижнюю границу – покупать. При торговле по этой стратегии следует ждать, пока цена окажется на границе диапазона, чего, кстати, может и не произойти. А при использовании опционов можно сразу продать опцион кол со страйком на верхней границе и опцион пут со страйком на нижней границе. В этом случае появляется возможность регулярно зарабатывать на данном предположении, даже если цены не выходят за границу диапазона, например, повторяя продажи каждый месяц. К недостаткам опционов необходимо отнести их относительно низкую ликвидность по сравнению с ликвидностью актива. Это порождает проблемы с открытием, изменением и закрытием позиций. По этой же причине при работе с опционами не получается заключать сделки на большие суммы. Из всего вышеизложенного становится очевидным важность быстрого и точного нахождения цены опциона в любой момент времени. И здесь исследователи этого вопроса столкнулись с определенными проблемами. Дело в том, что для количественной оценки стоимости опциона нельзя использовать ставшие уже традиционными методы дисконтирования. Они предполагают прогнозирование потока денежных средств, связанного с владением каким-либо активом (или его эксплуатацией), а также приведение этих денежных потоков к настоящему моменту времени для определения текущей стоимости (ценности) актива. При этом ожидаемый денежный поток должен дисконтироваться по ставке, равной альтернативным издержкам. Определить же их точную величину для опциона традиционными методами невозможно, так как риск его изменяется при каждом изменении стоимости и срока жизни лежащего в основе опциона актива. Использование в этом случае одной ставки, типа средневзвешенной стоимости капитала (WACC), приводит к ошибочным результатам. Расчет эффективности инвестиций в условиях неопределенности обычно сопровождается использованием метода «дерева решений», учитывающего многовариантность развития ситуации. Однако этот метод не дает никакого руководства по поводу выбора ставки дисконтирования и ее изменению (вследствие различного риска) по мере движения по «дереву» состояний. Кроме того, если оценивать опцион на основе «дерева решений», то может получиться очень большое, возможно бесконечное, число стратегий, проанализировать которое в явном виде очень сложно. Таким образом, как показывает анализ, опцион является специфическим объектом, и ни одним из традиционных методов его нельзя адекватно оценить. Для решения этой проблемы был разработан целый ряд различных моделей, таких как модели Black, Black-Scholes, Cox-Ross-Rubinstein, Whaley, Garman-Kohlhagen, Merton. Среди этих моделей модель Блэка-Шоулса [3], несмотря на многочисленные ограничивающие предположения, остаётся наиболее широко используемой для расчета стоимости опциона. Как показывает практика, её использование обосновано в большинстве случаев, а расхождения между фактической ценой опциона и теоретической у ликвидных инструментов лежит в пределах рыночного спрэда между ценами покупки и продажи. Это наилучший выбор для Европейских опционов на ценные бумаги, индексов или долговых обязательств правительства. Открытие данной модели привело к повышенному интересу к производным инструментам и взрывному росту опционной торговли. Опубликование формулы Блэка-Шоулса в 1973г. позволило отойти от субъективно-интуитивных оценок при определении цены опционов и подвести под него теоретическую базу, применимую и к другим производным инструментам. Для начала 70-х сама идея использовать математический подход для оценки производных инструментов была революционна. Современное управление рисками, применяемое в страховании, торговле на фондовом рынке и инвестировании, основывается на возможности использовать математические методы для предсказания будущего. Конечно, не со 100%-ной вероятностью, но достаточно точно для того, чтобы принять взвешенное инвестиционное решение. Основополагающий принцип работы на финансовых рынках состоит в следующем: чем больший риск вы готовы на себя принять, тем на большее вознаграждение вы вправе рассчитывать. Использование математики никогда не сможет полностью элиминировать риск, но может помочь правильно оценить степень принимаемого на себя риска и решить вопрос о справедливом вознаграждении.

2. Основы опционов

2.1. Основные понятия

Опционы представляют своему владельцу право купить или продать некоторый базовый актив. Они являются, таким образом, условным требованием или производной ценной бумагой, посколльку их стоимость зависит от стоимости базового актива. Помимо того, что опционы представляют собой один из важных классов финансовых инструментов, они находят широкое применение в финансах вообще и за их пределами в частности. Ну а в том, что касается соответствия теории экспериментальным данным, то теория оценки стоимости опционов рассматривается как наиболее успешная в финансах и экономике. Существуют четыре основных типа опционов:
Европейские опционы колл и **пут**;
Американские опционы колл и **пут**.
Более сложные инструменты могут быть представлены в виде пакетов из них. Европейский опцион колл (пут) дает право его держателю право купить (продать) определенное колличество базового актива по заранее оговоренной цене исполнения или цене покупки в момент окончания действия контракта. Американский опцион колл (пут) дает право его держателю право купить (продать) определенное колличество базового актива по заранее оговоренной цене исполнения в любое время до момента окончания действия контракта. Разница между Американским и Европейским опционом лишь в том что Американский опцион можно исполнить в любой момент до истечения срока контракта а Европейский опцион только в момент истечения контракта. В роли базового актива могут выступать акции, индексы акций, опционы, иностранная валюта и др. В опционном контракте всегда присутствует две стороны: держатель опциона, имеющий право выбора совершить или не совершить ту или иную операцию (купли или продажи), и сторона выпустившая или подписавшая опцион, которая обязана совершить указанную операцию если того пожелает держатель опциона. Говорят, что сторона, выпустившая или подписавшая опцион, занимает **короткую позицию**, а соответсвенно, сторона купившая опцион, — **длинную позицию**. Так как стороны в опционном контракте не равноправны, то при заключении опционного контракта, занявший длинную позицию, покупатель опционна обязан уплатить второй стороне определенную **премию**. Эта премия, по существу, и является ценой опциона. Кроме того, короткий продавец не получает дивиденды от акций; точнее говоря, он должен возместить дивидендные выплаты тому, кому эти акции были проданы. Поэтому каждая дивидендная выплата уменьшает прибыль короткого продавца опциона колл, и увеличивает прибыль короткого продавца опциона пут.

Введем следующие обозначения:
C – цена опциона колл;
P – цена опциона пут;
X – цена исполнения опциона;
S – цена акции;
T – время исполнения опциона;
t – произвольный момент времени до окончания срока действия опциона;
$FV = \hat{P}e^{\vec{r}T}$ – будущая стоимость инвестиций денежной суммы $\hat{P}$, при непрерывном начислении процентов $\vec{r}$, сроком T лет;
$PV(X) = FVe^{-\vec{r}T}$ – приведенная стоимость денежного потока, по своей сути, сумма денег которую необходимо инвестировать сегодня, на T лет под непрерывную процентную ставку $\vec{r}$, чтобы через определенное время получить данную будущую стоимость X.
Владельца опциона никто не заставляет исполнять опцион, так как, длинная позиция в опционном контракте это не обязательство, а право его исполнить, чего не скажешь о короткой позиции в опционном контракте. Следовательно опцион будет исполнен только тогда когда это выгодно держателю опциона. Тогда, **стоимость опциона** или **выплата по нему** в момент исполнения опциона колл ровна $C = \max(0, S - X)$, а для опциона пут – $P = \max(0, X - S)$. Выплата, в отличии от прибыли, никак не связанна с первоначальной ценой. Величину $\max(0, S_t - X)$, будем называть **внутренней стоимостью опциона колл**, а величину $\max(0, X - S_t)$ – **внутренней стоимостью опциона пут**. Часть стоимости опциона, которая превышает внтурненнюю стоимость, называеться – **его временной стоимостью** и отражает возможность опциону стать более ценным до истечения срока действия. Из этого следует что **премия по опциону состоит из внутренней стоимости и временной стоимости**, причем последняя уменьшается с приближением времени исполнения опциона. Говорят, что опцион колл **с выигрышем** или **в деньгах**, если $S > X$, **при своих** или **околло денег**, если $S = X$ и, наконец, **с проигрышем**, если $S < X$. Аналогично, в отношении опциона пут говорят, **с выигрышем** или **в деньгах**, если $S < X$, **при своих** или **около денег**, если $S = X$ и **с проигрышем**, если $S > X$.

2.2. Арбитражные возможности

Безрисковая арбитражная возможность характеризуется тем, что при ней без начальных капиталовложениях и при любых обстоятельствах возникает неотрицательный доход, а в некоторых случаях положительный. Это может быть следствием разницы в ценах связанных друг с другом финансовых инструментов на двух и более рынках. Арбитражер заключает равноценные сделки с целью получения выгоды на основе имеющихся различий в ценах на ценные бумаги, биржевые товары или валюты. Арбитражная торговля считается менее рискованной, по сравнению с трендовыми стратегиями. Одним из примеров финансового арбитража является торговля какой-либо ценной бумагой или другим активом, обращающимся одновременно на несколльких международных рынках. Если цены на рынке не дают возможности для осуществления прибыльного арбитража, это означает, что цены находятся в арбитражном равновесии, а рынок не является благоприятным для проведения арбитражных сделок. Арбитражное равновесие является предварительным условием общего экономического равновесия. Если же цены на один и тот же актив на разных биржах разошлись друг относительно друга, то появляется арбитражная возможность купить более дешевую бумагу того или иного эмитента, и продать одновременно на другой бирже более дорогую бумагу этого же эмитента. В случае выравнивания цен на один и тот же актив на разных биржах арбитражер получает прибыль не зависимо от того, куда пошел рынок – вверх или вниз. Он получает прибыль либо по «длинной» позиции, либо по «короткой». При этом сам арбитражер своими операциями способствует такому выравниванию цен.

Следствие отсутствия арбитража состоит в том, что портфель, приносящий нулевой доход при любом развитии событий должен иметь нулевую приведенную стоимость денежного потока $PV = 0$. Любое другое значение приведет к арбитражным возможностям, которые можно будет реализовать с помощью короткой позиции[1] по портфелю, если $PV > 0$ или покупая этот портфель, если $PV < 0$.

Американский опцион не может стоить меньше своей внутренней стоимости, посколльку тогда появляется возможность купить опцион, быстро его исполнить и продать актив с прибылью. С другой стороны, любой опцион должен иметь неотрицательную стоимость, иначе его можно купить не затратив, а получив положительную сумму сейчас и закончить операцию с неотрицательной суммой при истечении срока [4].

Лемма 1. *Стоимость любого опциона колл не может быть больше цены акции $C \leqslant S$, Американский опцион пут не может стоить больше цены исполнения $P_{\mathrm{A}} \leqslant X$, а Европейский опцион пут не может стоить больше, чем приведенное значение цены исполнения $P_{\mathrm{E}} \leqslant PV(X)$*

Доказательство. Если стоимость опциона колл превосходит цену акции, то позиция с покрытым коллом может привести к арбитражной прибыли.

[1]**Короткой позицией** или **продажей без покрытия**, называется ситуация, когда сделка открывается продажей бумаг, отсутствующих в портфеле. В этом случае бумаги предоставляет брокер в долг, и у инвестора появляется обязательство эти бумаги вернуть в будущем, откупив их на бирже при закрытии позиции. Для получения прибыли по позиции необходимо откупить бумаги по цене меньшей, чем цена открытия короткой позиции. Одновременное открытие и закрытие короткой позиции возможно только при наличии арбитража.

Если стоимость опциона пут больше цены исполнения, то безарбитражная прибыль возникает при продаже опциона пут, обеспеченного наличными. Указанная точная оценка для Европейского опциона пут выполняется потому, что до окончания срока действия, наличные могут «заработать» безрисковые проценты. ■

2.3. Паритет цен пут-колл

Рассмотрим два рынка: спот-рынок[1] акций и рынок опционов на эти акции.
Будем считать что выполняются следующие условия:

- рынки являются совершенными;
  - отсутствуют транзакционные расходы и налоги;
  - ни один инвестор, покупая или продавая активы, не может повлиять на цены;
  - разрешены короткие продажи;
- можно неограниченно брать ссуды или кредитовать под соответственную по срокам (T) безрисковую процентную ставку ($\vec{r}$) (при непрерывном начислении);
- отсутствуют прибыльные арбитажные возможности.

Предположим, что дивиденды наличными по акции не выплачиваются, опционы имеют одинаковую дату и цену исполнения, равные T и X соответственно. Составим портфель из одного короткого Европейского опциона колл, одного длинного Европейского опциона пут, одной акции S и ссуды в размере $PV(X)$. Первоначально, полученная сумма денег, ровна

$$C - P - S + PV(X).$$

Тогда, в момент (T), исполнения опциона, если $S_T \leqslant X, \text{то} P_T = X - S_T$, а опцион колл окажется бесполезным, с другой стороны, если $S_T > X$, тогда $C_T = S_T - X$, а опцион пут окажется бесполезным, и как только ссуда, на тот момент в размере X, будет возвращена, мы получаем:

$$S_T \leqslant X \Rightarrow \begin{cases} PV(X) = -X; \\ P_T = \max(0, X - S_T) = X - S_T; \quad \Rightarrow \; S_T - X + X - S_T = 0. \\ C_T = \max(0, S_T - X) = 0; \end{cases}$$

[1]**Спот-рынок** (англ. Spot Market) – является рынком ценных бумаг, валютным рынком или товарным рынком, на котором за наличные средства продаются и покупаются как скоропортящиеся, так и нескоропортящиеся товары либо с немедленной поставкой, либо в пределах короткого промежутка времени (обычно не позднее второго рабочего дня с момента заключения сделки). Спот-рынок также известен как «наличный рынок» (англ. Cash Market) или «физический рынок» (англ. Physical Market)[2].

$$S_T > X \Rightarrow \begin{cases} PV(X) = -X; \\ P_T = \max(0, X - S_T) = 0; \\ C_T = \max(0, S_T - X) = S_T - X; \end{cases} \Rightarrow \ S_T - X - (S_T - X) = 0.$$

Как видно из уравнений, чистое накопление значения приведенной стоимости $PV(X)$ денежного потока окажется нулевым в обеих случаях. Принцип отсутствия арбитража означает, что сумма, позволяющая приобрести вышеуказанный портфель также должна быть нулевой. Таким образом доказано равенство для Европейских опционов, называемое
паритет пут-колл:

$$C = P + S - PV(X). \tag{1}$$

Из паритета пут-колл вытекает, что что по сути существует лишь один тип Европейского опциона, поскольку другой может быть воссоздан по нему с помощью комбинации с базовой акцией и безрисковым кредитованием или заимствованием. Подобные комбинации создают так называемые **синтетические (вспомогательные) Ценные Бумаги (ЦБ).** Записав равенство (1) в виде $S = C - P + PV(X)$, видно что акция эквивалентна портфелю состоящему из длинного опциона колл, короткого опциона пут и предоставление кредита на сумму PVX. Кроме этого, использовать паритет пул-колл можно по другому. Рассмотрим следующее равенство $C - P = S - PV(X)$, которое означает, что длинный опцион колл и короткий опцион пут сводятся к длинной позиции по акции и займу на сумму приведенной стоимости цены исполнения – другими словами к покупке акции с маржой, что конечно же предпочтительнее в веду того, что покупка акций с маржой обусловлена строгими требованиями по марже. Запишем паритет пут-колл в следующем виде:

$$C = (S - X) + (X - PV(X)) + P \geqslant S - X.$$

Поскольку $C \geqslant 0$, то отсюда следует, что $C \geqslant \max(S - X, 0)$, т.е. больше внутренней стоимости. Тогда сраведлива следующая лемма.

Лемма 2. *Любой Американский или Европейский опцион колл по бездивидендной акции не может стоить меньше своей внутренней стоимости.*

Европейский опцион пут может продаваться по более низкой цене, чем его внутренняя стоимость. Представив паритет пут-колл в следующем виде:

$$P = (X - S) + (PV(X) - X + C)$$

Мы видим что по мере погружения опциона пут «в деньги» стоимость опциона колл преблежается к нулю и поэтому $P \approx (X - S) + (PV(X) -$

$X < X + C$, т.е. меньше его внутренней стоимости при положительных процентных ставках. В силу паритета пут-колл для Европейского опциона имеет место быть следующая оценка снизу.

Лемма 3. *Для Европейского опциона пут* $P \leqslant \max(PV(X) - S, 0)$.

Предположим что PV дивидендов, чьи даты выплат предшествовали моменту окончания срока действия опциона, равно D. Тогда паритет пут-колл принимает следующий вид:

$$C = P + S - D - PV(X).$$

3. Стохастические модели оценки стоимости финансовых инструментов

3.1. Постановка задачи

Используя стохастические модели оценки стоимости финансовых инструментов, оценить стоимость опциона пут на акции компании ОАО Газпром с котировками акций за 2013 г., срок исполнения опциона 3 месяца.

3.2. Теория ценообразования опционов

Теория ценообразования опционов исходит из того, что на цену опциона влияют шесть базовых факторов:

1) Цена базового актива (S) и цена страйк (X) (цена исполнения). Соотношение между ценой лежащего в основе опциона актива и ценой экспирации является наиболее важным фактором,влияющим на цену опциона. Очевидно, что чем больше это соотношение, тем дороже опцион колл и дешевле опцион пут.

2) Время, остающееся до даты истечения опциона (T). Время работает против покупателя опционов, так как цена опционов вне денег снижается ускоренными темпами с приближением даты их истечения. Больший срок, остающийся до окончания срока действия опциона, означает большую неопределенность.

3) Степень колебаний (σ) (волатильность). Этот показатель отражает подверженность базового актива ценовым колебаниям. Величина премии по опционам в деньгах прямо пропорциональна ожидаемой ценовой неустойчивости базового актива.

4) Дивидендные выплаты (D) по базовому активу за время жизни опциона. Повышенные дивиденды сокращают цену опционов колл и увеличивают цену опционов пут, потому что выплата дивидендов сокращает цену лежащих в основе опциона акций на сумму дивиденда. Дивиденды увеличивают привлекательность покупки и держания акций по сравнению с покупкой опционов колл и хранением резервов наличности.

5) Уровень процентных ставок (r). Растущие процентные ставки увеличивают форвардную цену базовых акций, которая рассчитывается как цена акции плюс ставка по безрисковым активам на период действия опциона. Форвардная цена в модели понимается как стоимость акции на дату истечения опциона.

Эти факторы используются при построении математических моделей теоретической цены опционов, получивших широкое распространение на опционном рынке.

Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из рискового актива S и безрискового банковского счета B, представляющего собой возможность кредитования и вложения под фиксированную процентную ставку r. Относительно условий покупки и продажи ценных бумаг делаются следующие предположения:

1) Предполагается, что все ценные бумаги являются абсолютно ликвидными. Это значит, что в любой момент времени можно купить или продать любое количество ценных бумаг любого вида. Цена покупки совпадает с ценой продажи.

2) Предполагается также, что все ценные бумаги являются бесконечно делимыми. То есть можно продать и купить, например, не только акцию, но и любую долю акции.

3) Издержки, связанные с покупкой и продажей ценных бумаг, отсутствуют. Отсутствуют и налоги.

4) Еще одно предположение состоит в том, что рынки являются эффективными и ни один из участников рынка своими действиями не может повлиять на цены активов. Но совместные действия всех участников рынка определяют процесс изменения цен активов.

5) На рынке не существует возможности арбитража. На самом деле, временами на рынках возникает возможность арбитража. Но на рынке работают специальные люди - арбитражеры, чьей работой и является поиск арбитражных портфелей. Таким образом, в результате активной скупки этих портфелей, арбитражные возможности мгновенно исчезают.

6) Модель основывается на логнормальном распределении цен акций. Хотя функция нормального распределения является составной частью модели, использование экспоненты делает распределение логнормальным. Проблема при использовании нормального распределения состоит в том, что оно предполагает возможность для цены акций принимать отрицательные значения. Поэтому в случае цены акций чаще всего используется логнормальное распределение, предполагающее, что цены на акции могут принимать значения в интервале от нуля до бесконечности.

3.3. Расчет волатильности акций на основе исторических данных

Пусть Y_t – цена акции, наблюдаемая в день t, $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Положим:

$$X_t = 100 \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Случайная величина X_t представляет собой натуральный логарифм[1] относительно изменения цены акции за один день, выраженный в процентах. Тогда дневную волатильность акции можно оценить следующим образом:

$$\sigma_{дн} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2}{T-1}}, \qquad \overline{X} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{T} X_t}{T}.$$

Расчет волатильности акций ОАО «Газпром».
В таблице (1) отображены значения цены акций в период с 01.03.2013 по 31.05.2013 [5]

t	Стоимость акций ($\mathbf{Y}$)	$\mathbf{X_t = 100 \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}}$	$(\mathbf{X_t} - \overline{\mathbf{X}})^2$
01.03.13	134,75		
04.03.13	133,03	-1,2847	1,31
05.03.13	136,45	2,5384	7,18
06.03.13	134,85	-1,1795	1,08
07.03.13	133,73	-0,834	0,48
11.03.13	136,6	2,1234	5,13
12.03.13	137,25	0,4747	0,38
13.03.13	140,56	2,383	6,38
14.03.13	142,08	1,0756	1,48
15.03.13	144,5	1,6889	3,35
18.03.13	144,28	-0,1524	0
19.03.13	142,34	-1,3537	1,47
20.03.13	142,09	-0,1758	0
21.03.13	142,32	0,1617	0,09
22.03.13	140,18	-1,5151	1,89

25.03.13	138,6	-1,1335	0,98
26.03.13	136,58	-1,4682	1,76
27.03.13	136,36	-0,1612	0
28.03.13	133,17	-2,3672	4,95
29.03.13	134,08	0,681	0,68
01.04.13	132,85	-0,9216	0,61
02.04.13	130,81	-1,5475	1,98
03.04.13	130,38	-0,3293	0,04
04.04.13	131,29	0,6955	0,7
05.04.13	130,5	-0,6035	0,21
08.04.13	129,01	-1,1483	1,01
09.04.13	130,42	1,087	1,51
10.04.13	129,53	-0,6847	0,29
11.04.13	126,08	-2,6996	6,54
12.04.13	126,7	0,4905	0,4
15.04.13	125,95	-0,5937	0,2
16.04.13	124,15	-1,4394	1,68
17.04.13	121,8	-1,911	3,13
18.04.13	120,45	-1,1146	0,95
19.04.13	120,11	-0,2827	0,02
22.04.13	119,9	-0,175	0
23.04.13	120,17	0,2249	0,13
24.04.13	124,7	3,7003	14,76
25.04.13	122,96	-1,4052	1,6
26.04.13	122,82	-0,1139	0
29.04.13	122,5	-0,2609	0,01
30.04.13	124,15	1,3379	2,19
02.05.13	122,96	-0,9631	0,67
03.05.13	128,7	4,5625	22,13
06.05.13	129,38	0,527	0,45
07.05.13	130,55	0,9002	1,09

08.05.13	131,81	0,9605	1,22
10.05.13	132,89	0,816	0,92
13.05.13	129,8	-2,3527	4,89
14.05.13	125,54	-3,337	10,21
15.05.13	122,3	-2,6147	6,11
16.05.13	122,81	0,4161	0,31
17.05.13	125,49	2,1588	5,29
20.05.13	126,4	0,7225	0,75
21.05.13	126,95	0,4342	0,33
22.05.13	127,39	0,346	0,24
23.05.13	121,6	-4,6516	20,34
24.05.13	120	-1,3245	1,4
27.05.13	119,68	-0,267	0,02
28.05.13	120,87	0,9894	1,28
29.05.13	118,63	-1,8706	2,99
30.05.13	119,81	0,9898	1,28
31.05.13	123,4	2,9524	9,57
$\sum$		**-8,7992**	**168,2**

Таблица 1: Стоимость акций ОАО «Газпром» в период с 01.03.2013 по 31.05.2013.

$$n = 63, \quad \overline{X} = \frac{-8,7992}{63} = -0,14, \quad \sigma_{дн} = \sqrt{\frac{168,2}{62}} = 1,65$$

Таким образом, дневная волатильность акций оценивается в 165%

Так как случайные величины X_t не коррелируют между собой, то, зная дневную волатильность можно оценить волатильность за период времени:

$$\sigma_{пер} = \sigma_{дн} \cdot \sqrt{\tau_{пер}}$$

$\sigma_{пер}$ — волатильность цены акции за рассматриваемый период времени;
$\sigma_{дн}$ — дневная волатильность;
$\tau_{пер}$ — число дней в периоде;

Поскольку в период с 1.06.2013 по 31.08.2013 торги на бирже велись 85 раз, то $\tau_{пер} = 85$, тогда:

$$\sigma = 1,65 \cdot \sqrt{85} = 15,18$$

т.е. волатильность цены акций ОАО «Газпром» в период с 1.06.2013 по 31.08.2013 оценивается в 15,18%.

3.4. Биномиальная модель

Случайный процесс $\beta(\omega, t)$ определенный на множестве V $= \{t_0,\, t_0 + h,\, t_0 + 2h,\, \ldots,\, t_0 + kh,\, \ldots\}$, называется биномиальной моделью, если

$$\begin{cases} \beta_{t_0}(\omega) = x & (x\ \text{— некоторое число}), \\ \beta_{t_0+kh}(\omega) = \beta_{t_0+(k-1)h}(\omega) \cdot \varepsilon_k(\omega), & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} u & \text{с вероятностью p} \\ & \\ d & \text{с вероятностью 1 – p} \end{cases} ,(u > 1, 0 < d < 1).$$

Сечением биномиальной модели в момент времени $t_0 + kh$ является дискретная случайная величина, закон распределения которой имеет вид:

X	xd^k	xud^{k-1}	$\ldots$	$xu^i d^{k-1}$	$\ldots$	$xu^{k-1} \cdot d$	xu^k
P	$(1-p)^k$	$c_k^1 p \cdot (1-p)^{k-1}$	$\ldots$	$c_k^i p^i \cdot (1-p)^{k-i}$	$\ldots$	$c_k^{k-1} p^{k-1} \cdot (1-p)$	p^k

Траектории биномиальной модели изображены на рис. 1

Если случайный процесс $\beta(\omega, t)$ является биномиальной моделью с параметрами u, d, p, то его математическое ожидание (m) и дисперсия (D) соответственно ровны:

$$m_\beta(t_0 + kh) = x[up + d(1-p)^k],$$
$$D_\beta(t_0 + kh) = x^2([u^2 p + d^2(1-p)^k - [up + d(1-p)]^{2k}),$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

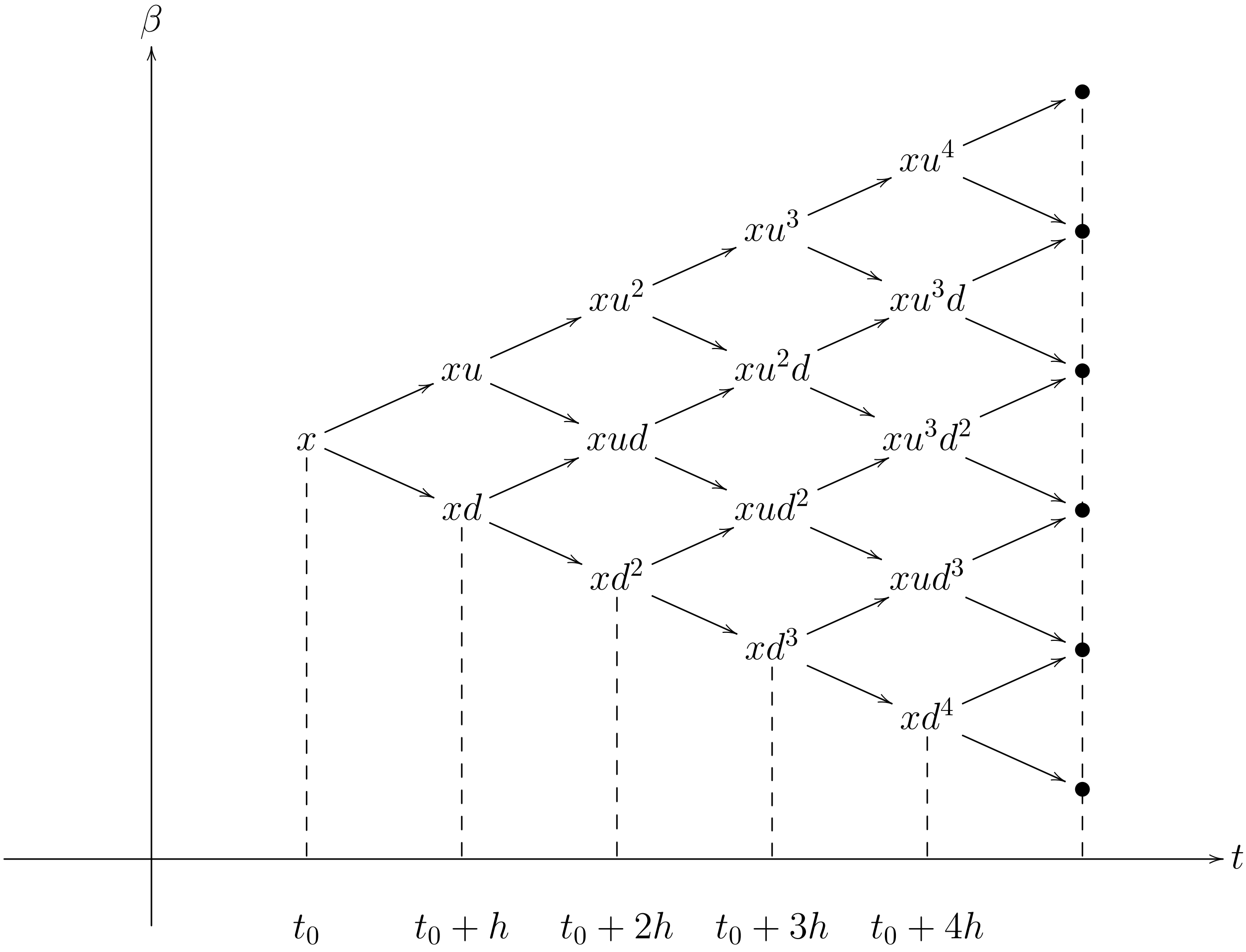

Рис. 1: Траектории биномиальной модели.

3.5. Биномиальная модель для оценки стоимости акций

Финансовый инструмент называется инструментом Европейского типа, производным от некоторых активов, если существует функция $F(z)$, такая что в определенный будущий момент времени T, стоимость финансового инструмента ровна $F(S_T)$, где S – стоимость базисных активов в момент времени T.

В этом случае функция $F(z)$ называется платежной функцией производного инструмента. Для Европейского типа опционов колл и пут, платежные функции имеют вид:

$$C(S_T) = \max(S_T - X, 0), \quad P(S_T) = \max(X - S_T, 0)$$

соответственно, где X – цена исполнения опциона.

Предположим, что базисные активы обладают постоянной дивидендной доходностью q, а их стоимость определяется следующей одноэтапной биномиальной моделью:

$$S_t = S$$

$$S_T \begin{cases} Su & \text{с вероятностью } p, \\ Sd & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases} \quad \text{где} \quad u > 0, \quad 0 < d < 1.$$

Иными словами, в начальный момент времени t стоимость базисных активов известна и равна S, а к моменту T, она может подняться до Su с вероятностью p или упасть до Sd, с вероятностью $1-p$

При отсутствии прибыльных арбитражных возможностей на спотрынке базисных активов должно выполняться неравенство:

$$d < \left(\frac{1+r}{1+q}\right)^{T-t} < u, \tag{2}$$

где $r-$ безрисковая процентная ставка на $T-t$ лет.

Рассмотрим финансовый инструмент Европейского типа, производный от рассматриваемых базисных активов, платежная функция которого $F(z)$.

В начальный момент времени t сформируем инвестиционный портфель, состоящий из покупки базисных активов и короткой продажи x опционов колл на эти активы. Начальные затраты на данный портфель составят $S - xC$, начальная стоимость одного опциона колл.

Доход инвестора к моменту T обределяется следующим образом:

$$\begin{cases} Su(1+q)^{T-t} - xC(Su) & \text{с вероятностью } p, \\ Sd(1+q)^{T-t} - xC(Sd) & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

Если подобрать x так, чтобы:

$$Su(1+q)^{T-t} - xC(Su) = Sd(1+q)^{T-t} - xC(Sd), \tag{3}$$

То в независимости от событий на рынке, доход останется одинаковый, так как стратегия окажется безрисковой. А так как прибыльные арбитражные возможности отсутствуют, то доходность инвестиционного портфеля должна совпадать с безрисковой процентной ставкой, т.е.

$$(S - xC)(1+r)^{T-t} = Su(1+q)^{T-t} - xC(Su), \tag{4}$$

при x, определяемом соотношением (3).

$$x = \frac{Su(1+q)^{T-t} - Sd(1+q)^{T-t}}{C(Su) - C(Sd)}$$

Подставив x в (4), получаем:

$$C = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}(\pi^* C(Su) + (1-\pi^*)C(Sd)), \tag{5}$$

$$\text{где} \quad \pi^* = \frac{\left(\frac{1+r}{1+q}\right)^{T-t} - d}{u-d}. \qquad (6)$$

Из неравенства (2) следует $0 < \pi^* < 1$. Кроме того, выполняется равенство:

$$Su(1+q)^{T-t}\pi^* + Sd(1+q)^{T-t}(1-\pi^*) = S(1+r)^{T-t}. \qquad (7)$$

Поскольку $0 < \pi^* < 1$, то это число можно считать вероятностью. Из (7) сдедует, что в биномиальной модели ожидаемая доходность по акции ровна безрисковой ставке r в предположении, что $\pi^* = p$. Назовем инвестора **нейтральным к риску**, если ему все равно, получит ли он гарантированный доход или неопределенный доход, но с тем же средним значением. Нейтрального к риску инвестора беспокоит лишь средний доход. И если инвесторы нейтральны к риску, то ожидаемая ставка доходности по всем Ценным Бумагам должна ровняться безрисковой ставке. По этой причине величина π^* называется **риск-нейтральной вероятностью**. Поскольку же отношение p прямо не вовлечены в оценку стоимости опционов, то любое отношение к риске, и в том числе нейтральное, должно приводить к одному результату. Поэтому, стоимость опциона в **риск-нейтральной экономике** можно интерпретировать как математическое ожидание дисконтированной будущей выплаты по нему. Поэтому же оказывается, что ставкой дисконтирования приведенной стоимости (PV) в риск-нейтральной экономике является безрисковая ставка.

Если в (5), платежные функции $C(Su)$ и $C(Sd)$ заменить на $P(Su)$ и $P(Sd)$ соответственно, то получим стоимость опциона пут:

$$P = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}(\pi^* P(Su) + (1-\pi^*)P(Sd)) \qquad (8)$$

Пусть τ означает время до окончания срока действия опциона, измеряемое в годах, и r – ежегодная ставка непрерывного начисления процентов. При n периодах действия опциона, следовательно, каждый период равен $\frac{\tau}{n}$. Необходимо подобрать параметры u, d, и процентную ставку $\widehat{r}$, что бы модель приводила к результатам, совпадающим с эмпирическими данными при n, стремящемся к бесконечности. При этом понятно что $\widehat{r} = r\frac{\tau}{n}$, пусть R обозначает грубый доход $\widehat{r}$ за период.

В биномиальной модели, велечины $\ln u$ и $\ln d$ можно интерпретировать как две возможные ставки доходности акции непрерывного начисления. Сама же доходность, как случайная величина, в каждом периоде, характеризуется следующей бернуллиевской с.в.:

$$B_i = \begin{cases} \ln u & \text{с вероятностью q,} \\ \ln d & \text{с вероятностью 1-q,} \end{cases} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

имеющей математическое ожидание и дисперсию, соответственно, равные

$$\widehat{\mu} \equiv EB_i = q \ln \frac{u}{d} + \ln d, \qquad \widehat{\sigma^2} \equiv DB_i = q(1-q) \ln^2 \frac{u}{d} \tag{9}$$

Если S_τ означат цену акции в момент окончания срока действия опциона, то совокупная непрерывная доходность акции $\ln \frac{S_\tau}{S}$ является суммой n независимых вышеуказанных бернуллиевских случайных велечин и

$$\ln \frac{S_\tau}{S} = B \equiv \sum_{i=1}^{n} B_i = \ln \frac{S u^z d^{n-z}}{S} = z \ln \frac{u}{d} + n \ln d,$$

где z– число скачков цены акции вверх за n периодов. Причем, как известно, с.в. z имеет биномиальное распределение, точнее говоря,

$$P\{z = j\} = b(j; n, q), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

и $Ez = nq$, $Dz = nq(1-q)$.
Промежуток в τ лет разбит на n периодов длинны $\frac{\tau}{n}$ лет, каждому из которых поставили в соответствие с.в. B_i с параметрами $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\sigma}^2$. Для того чтобы математическое ожидание и дисперсия истинных ставок ежегодной доходности акции непрерывного начисления за каждый из τ лет сходились, соответственно, к некоторым положительным числам μ и σ^2, должны выполняться условия:

$$n\widehat{\mu} \to \mu\tau, \;\; n\widehat{\sigma}^2 \to \sigma^2\tau. \tag{10}$$

Назовем σ (ежегодной) **волатильностью** акции. И предположим, что выполнено условие $ud = 1$, благодаря которому цены в узлах на одной горизонтальной линии биномиального графа будут одинаковыми (ровны0). В этом случае убедится в справедливости соотношений (10) нетрудно, если предположить, что:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}}, \;\; d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}}, \;\; q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{\tau}{n}} \tag{11}$$

При выполнении (11) и с учетом (9)

$$n\widehat{\mu} = \mu\tau, \;\; n\widehat{\sigma}^2 = \left[1 - \left(\tfrac{\mu}{\sigma}\right)^2 \tfrac{\tau}{n}\right] \sigma^2\tau \to \sigma^2\tau.$$

Стоит отметить, что кроме того, что безарбитражные неравенства $< R < u$, в условиях (9) могут не выполнятся, а риск-нейтральная вероятность может находится вне интервала $[0, 1]$. [**?**]

Будем считать, что базисные активы обладают постоянной дивидендной доходностью, равной q, а их стоимость на временном промежутке

$[t_0, T]$ определяется геометрическим броуновским движением, заданным условиями:

$$dS_\tau = (aS_\tau)d\tau + (\sigma S_\tau)d\omega_\tau$$

$S_t = S$ – стоимость акций в момент времени t.

a — коэффициент смешения;

σ — волатильность;

$\omega_\tau = \omega(\omega, \tau)$ — винеровский случайный процесс.

Временной промежуток $[t, T]$ разобьем на n равных частей точками: $t, t + h_n, \ldots, t + kh_n, \ldots, t + nh_n = T,\ T - t = \tau \quad h_n = \frac{\tau}{n}$,

Рассмотрим опцион пут Европейского типа на акции, стоимость которого в момент времени T определяется платежной функции $C(S_T)$. Обозначим через $C_k(i), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k$, стоимость опциона пут в момент времени $t + kh_n$ при условии, что до этого момента времени цена акции поднималась i раз. Тогда C_0 — это искомая стоимость опциона в момент времени t, а

$$Cn(i) = F(Su_n^i d_n^{k-i}), \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Если до момента времени $t + kh_n$ цена акции поднималась i раз,
то в этот момент времени она окажется равной $Su_n^i d_n^{k-i}$,
а стоимость опциона – $C_i(i)$.

К моменту времени $t + (k+1)h_n$ цена акций может подняться до $Su_n^{i+1}d_n^{k-i} = (Su_n^i d_n^{k-i})u_n$ с вероятностью p_n или опуститься
до $Su_n^i d_n^{k+1-i} = (Su_n^i d_n^{k+1-i})d_n$ с вероятностью $1 - p_n$, а стоимость опциона сможет принять только два значения: $C_{k+1}(i+1)$ и $C_{k+1}(i)$

$$C_k(i) = \frac{1}{(1+r)^{h_n}}\Big(p_n \cdot C_{k+1}(i+1) + (1-p_n)C_{k+1}(i)\Big); \tag{13}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k;$$

Рассмотрим 3-месячный Европейский опцион пут на акции ОАО «Газпром». при цене исполнения 120 р.,($X = 120$), когда цена акции 120,75 р. ($S = 120, 75$), безрисковая процентная ставка 6% ($r = 0, 6$ взята кроткосрочная ставка рынка ГКО-ОФЗ от 13.06.2013), волатильность акции оценивается в 15% ($\sigma = 0, 15$, из расчетов на странице 17)

$$X = 120,\ S = 120, 75,\ T - t_0 = \frac{3}{12},\ r = 0, 6,\ \sigma = 0, 15.$$

Для оценки стоимости опциона построим 3-этапную биномиальную модель (рис. (2)) с параметрами:

$$u_3 = e^{\sigma\sqrt{h_3}} = e^{0{,}15\sqrt{\frac{1}{12}}} = 1, 04, \qquad d_3 = e^{-\sigma\sqrt{h_3}} = e^{-0{,}15\sqrt{\frac{1}{12}}} = 0, 96.$$

Используя формулу (12), определим значение стоимости опциона пут через 3 месяца:

$$C_3(3) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1 = \max\{120{,}75 - 135{,}83; 0\} = 0,$$

$$C_3(2) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^2 \cdot 0{,}96 = \max\{120{,}75 - 125{,}38; 0\} = 0,$$

$$C_3(1) = 120{,}75 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}96^2 = \max\{120{,}75 - 115{,}73; 0\} = 5{,}02,$$

$$C_3(0) = 120{,}75 \cdot 1 \cdot 0{,}96^3 = \max\{120{,}75 - 106{,}83; 0\} = 13{,}92,$$

Чтобы найти значение стоимости опциона через два месяца, вычислим вероятность одного подъема цены акций в мире, нейтральном к риску:

$$p_3 = \frac{(1 + 0{,}06)^{\frac{1}{12}} - 0{,}96}{1{,}04 - 0{,}96} = 0,56.$$

Используя формулу (13), вычислим значение стоимости опциона пут через 2 месяца:

$$C_2(2) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 0 + 0,44 \cdot 0) = 0,$$

$$C_2(1) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 0 + 0,44 \cdot 5{,}02) = 2,2,$$

$$C_2(0) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 5{,}02 + 0,44 \cdot 13{,}92) = 8,89,$$

Используя формулу (13), вычислим значение стоимости опциона пут через 1 месяц:

$$C_1(1) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 0 + 0,44 \cdot 2,2) = 0,96,$$

$$C_1(0) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 2,2 + 0,44 \cdot 8,89) = 5,12,$$

Используя формулу (13), вычислим значение стоимости опциона пут в момент заключения сделки:

$$C_0(0) = \frac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{12}}}(0,56 \cdot 0,96 + 0,44 \cdot 5,12) = 2,78,$$

Используя формулу (12) вычислим значения цены акций через 1 и 2 месяца:

$$S_2(2) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^2 \cdot 0{,}96^0 = 130{,}60,$$

$$S_2(1) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^1 \cdot 0{,}96^1 = 120{,}56,$$
$$S_2(0) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^0 \cdot 0{,}96^2 = 111{,}28,$$
$$S_1(1) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^1 \cdot 0{,}96^0 = 125{,}58,$$
$$S_1(0) = 120{,}75 \cdot 1{,}04^0 \cdot 0{,}96^1 = 115{,}92,$$

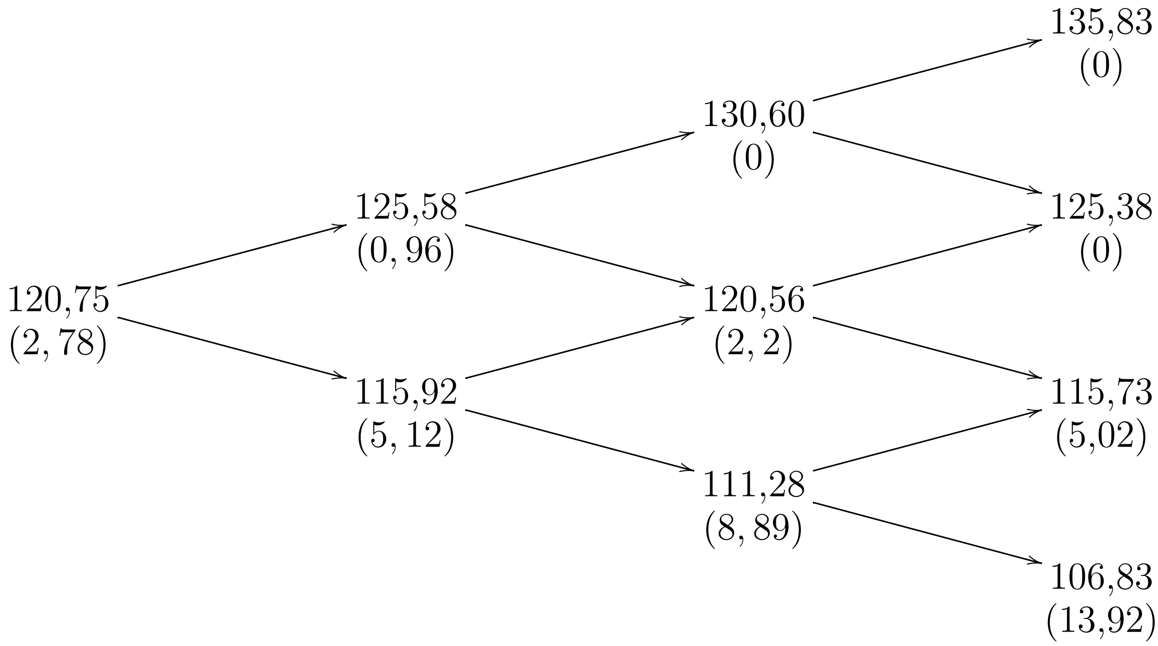

Рис. 2: Трехэтапная биномиальная модель

3.6. Модель Блэка-Шоулза

Каким же является предельное распределение вероятностей ставки доходности непрерывного начисления процентов (10)? Центральная предельная теорема говорит, что при некоторых слабых условиях суммы независимых с.в., такие как B, сходятся к нормальному распределению, т.е. равномерно по y

$$P\left\{\frac{\ln\frac{S_\tau}{S} - n\widehat{\mu}}{\sqrt{n}\widehat{\sigma}} \leqslant y\right\} \to \Phi(y), \text{ где } \Phi(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

Одним из простых условий, гарантирующих справедливость центральной предельной теоремы, является условие Ляпунова,[6] дробь Ляпунова должна сходится к нулю и которое для сумм независимых и одинаково распределенных с.в. с конечным третьим абсолютным моментом выполняется со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}$. В нашем случае это записать в следующем виде

$$\frac{q|\ln u - \widehat{\mu}|^3 + (1-q)|\ln d - \widehat{\mu}|^3}{\widehat{\sigma}^3\sqrt{n}} = \frac{(1-q)^2+q^2}{\sqrt{nq(1-q)}} \to 0.$$

С учетом соотношений (11) это условие выполняется.

Ставка доходности непрерывного начесления за τ лет сближается с нормальным законом со средним $\mu\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$. Как следствие, $\ln S_\tau$ сближается с нормальным законом, со средним $\mu\tau + \ln S$ и дисперсией $\sigma^2\tau$. Таким образом, величина S_τ в пределе имеет логнормальное распределение.

Лонгнормальные цены всегда остаются полоэжительными, если первой была положительная. Маловероятны скачки, хоть цена и не ограничена. В силу симметрии нормального закона: S_1 и S_2 равновероятны, если $\frac{S_1}{S} = \frac{S}{S_2}$.

Лемма 4. *Ставка доходности и непрерывного начисления B из* (10) *в риск-нейтральной экономике при $n \to \infty$ сближается с нормальным распределением со средним $\mu\tau$ и дисперсией $\sigma^2\tau$, причем $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$*

Доказательство. Используя представление $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2!}+\ldots$ для записи вероятности p получаем, что

$$p \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{\tau}{n}}. \tag{14}$$

Из (11) для q следует что $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Сходимость распределения суммы B к нормальному закону с указанными параметрами, то она установлена ранее в силу (10), и справедливости условий Ляпунова при q из (11). ■ Из леммы 4 и свойств и логнормального распределения следует что ожидаемая цена акции в момент окончания срока действия опциона в риск-нейтральной экономике ровна $Se^{r\tau}$. Таким образом, ожидаемая ежегодная ставка доходности акции совпадает с безрисковой ставкой r.

Теорема. (формула Блэка-Шоулза) Если $q = p$ и $n \to \infty$, то в пределе получается, что

$$C = S\Phi(x) - Xe^{-r\tau}\Phi(x - \sigma\sqrt{\tau}),$$
$$P = Xe^{-r\tau}\Phi(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - S\Phi(-x),$$

где

$$x \equiv \frac{\ln\frac{S}{X} + (r + frac\sigma^2 2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Доказательство. Поскольку для вывода формулы стоимости Европейского опциона пут из формулы опциона кол можно использовать паритете пут-колл, то установим форму лишь для опциона колл. $\Phi(a;n;p)$ есть вероятность получения не меньше а успехов из серии n испытаний, в каждом из которых вероятность успеха ровна p. Пусть z обозначает число успехов (т.е. скачков цены вверх) в n таких испытаниях. Тогда в силу (10) и (**??**)

$$1-\Phi(a;n,p)=P\{z<a\}=P\{B<a\ln\frac{u}{d}+n\ln d=$$
$$=P\left\{\frac{B-\widehat{\mu}n}{\widehat{\sigma}\sqrt{n}}<\frac{a\ln\frac{u}{d}+n\ln d-\widehat{\mu}n}{\widehat{\sigma}\sqrt{n}}\sim\frac{\ln\frac{X}{S}-\epsilon\ln\frac{u}{d}-\mu\tau}{\sigma\sqrt{n}}\right\}$$

если учесть, что из определения велечины a вытекает равенство
$(a+\epsilon)\ln\frac{X}{S}=\ln\frac{X}{S}-n\ln d$ при некотором фискированом $0\leqslant\epsilon\leqslant 1$.
Но $\epsilon\ln\frac{u}{d}\to 0, n\to 0$, в силу (11). Поэтому доказано, что
$1-\Phi(a;n,p)\to\Phi(-y)$, где $\frac{\ln\frac{X}{S}+\mu\tau}{\sigma\sqrt{n}}$. А это и означает, что
$\Phi(a;n,p)\to\Phi(x-\sigma\sqrt{n})$ Поскольку $1-\Phi(-y)=\Phi(y)$, а $y=x-\sigma\sqrt{n}$

∎

3.7. Оценка опциона на основе формул Блэка-Шоулза

Формуле Блэка-Шоулза нужны пять параметров: S, X, σ, τ, и r. Однако, олгаритмы биномиального дерева используют шесть входов: $S, X, y, d, \vec{r}$, и n. Связи между ними просты:

$$u=e^{\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}},$$
$$d=e^{-\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}},$$
$$\vec{r}=r\frac{\tau}{n}.$$

Рассчитаем 3-месячный Европейский опцион пут на акции ОАО «Газпром», с помощью формул Блэка-Шоулза. при цене исполнения 120 р.,($X=120$), когда цена акции 120,75 р. ($S=120,75$), безрисковая процентная ставка 6% ($r=0,6$ взята кроткосрочная ставка рынка ГКО-ОФЗ от 13.06.2013), волатильность акции оценивается в 15% ($\sigma=0,15$)

$$d_1=0,3;$$
$$d_2=0,34-0,75=0,23;$$

Методом линейной интерполяции находим необходимые значения функции нормального распределения.

$$\Phi(-d1) = 1 - 0,63 = 0,37;$$
$$\Phi(-d2) = 1 - 0,57 = 0,43.$$

$$p = 120e^{-0,06\cdot 0,25} \cdot 0,43 - 120,75 \cdot 0,37 = 120 \cdot 1,01 \cdot 0,23 - 27,77 = 120 \cdot$$
$$\cdot 0,98 \cdot 0,43 - 120,75 \cdot 0,37 = 50,56 - 44,67 = 5,89.$$

При расчете стоимости с помощью биномиального дерева, из-за короткого промежутка времени цена получилась в 2 раза больше. Как известно биномиальная модель сходится к модели Блэка-Шоулза при $n \to \infty$.

Список литературы

[1] Чугунова А.В. Лобанова А.А. *Энциклопедия финансового риск-менеджмента.* Альпина Паблишер, 2003.

[2] Интернет ресурс «Финансовые инвестиции – образовательный центр», 2016.

[3] *Финансовая математика.* Издаткельство "Дело 2010.

[4] Люу Ю-Д. *Методы и алгоритмы финансовой математики.* БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.

[5] Котировки акций ОАО "Газпром". http://www.finam.ru.

[6] Буре В. М. Парилина Е. М. *Теория вероятности и математическая статистика.* Лань. Санкт-Петербург, 2013.