

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления

Чистяков Алексей Евгеньевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Моделирование ходьбы антропоморфного
робота**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Лепихин Т.А.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи и обзор литературы	5
1.1 Постановка задачи	5
1.2 Обзор литературы	6
1.2.1 Метод моделирования с помощью закона сохранения энергии	6
1.2.2 Метод параметрической идентификации	7
Глава 2. Решение задачи	8
2.1 Построение модели	8
2.2 Построение управления	11
Глава 3. Численный эксперимент и программная реализация	16
3.1. Численный эксперимент	16
3.2. Программная реализация	22
Заключение	24
Список литературы	25
Приложение	26

Введение

С самого начала своего существования, человечество пытается облегчить свой труд, сделать его более безопасным. Для этих целей постоянно создаются различные инструменты, помогающие нам в нашей нелегкой жизни.

Одной из категорий данных инструментов являются механизмы роботы. Согласно [1], слово «робот» ввел в нашу речь драматург Карел Чапек. В своей пьесе RUR («Россумские Универсальные Роботы»), опубликованной в 1920 г., он описывает фабрику, производящую «искусственных людей», которых и называет роботами. С тех пор, данное слово плотно вошло в нашу жизнь, как обозначающее нечто автоматическое, но не обязательно антропоморфное (от греч. *anthropos* – человек и *morphe* – форма, вид).

Интересы данной работы лежат в области механики движения робототехнических механизмов по поверхности (плавающие и летающие механизмы здесь не рассматриваются). Передвижные (полу)автоматические механизмы позволяют человеку удаленно, не рискуя жизнью и здоровьем, влиять на опасные или непригодные для жизни участки, либо анализировать собранную с них информацию. Примерами могут послужить различные планетарные миссии, к примеру, на Марсе, ликвидации техногенных аварий, где человеку попросту невозможно находиться без тяжелых последствий, и многое другое.

Модели бывают самых разных типов - гусеничные, колесные, шагающие, ползающие. Каждая модель имеет свои преимущества и недостатки, остановимся на них поподробнее.

Колесные модели движения на данный момент являются наиболее распространенными. Для них создана широчайшая инфраструктура, в частности – дороги. Они обеспечивают высокую устойчивость и скорость перемещения при относительной простоте конструкции. Недостатки заключаются в низкой проходимости вне дорог, которые частично решены в гусеничной модификации. Гусеницы позволяют более равномерно распределить давление на поверхность и создают приемлемую в большинстве случаев внутреннюю «дорожку» для колес. Но и с такой модификацией вне-

дорожные способности механизма весьма скудны по сравнению с другими вариантами.

Проблемы с внедорожьем в свою очередь прекрасно решает другая модель передвижения – ползающая. Механизмы на ее основе обычно имитируют характер передвижения аналогов из природы: змей, улиток, гусениц. Преимущество, по сравнению с остальными моделями, заключается в наибольшей площади соприкосновения с поверхностью, что обеспечивает наименьшее давление на онаю. Также, при достаточной «гибкости» механизма, предоставляется возможным передвигаться по любому рельефу. В недостатки же можно записать сложность модели (нужно описать несколько звеньев, у каждого из которых будет своя динамика) и механизма, построенного на ее основе.

Третий вид конструкции, непосредственно описанный в работе – шагающий. Он сочетает в себе более высокую проходимость по сравнению с колесным вариантом, проигрывая в этом ползучему и гусеничному (на зыбучей поверхности). Также можно отметить наиболее простой механизм среди предоставленных вариантов.

Весьма важная характеристика шагающего механизма – количество опор, которая непосредственно отвечает за устойчивость конструкции. При количестве опор больше либо равным четырем, построение управления можно свести к простому поднятию одной «ноги» и перестановкой ее на новое место, так как в любой момент времени количество опор будет больше либо равно трем, что является достаточным условием для устойчивости при расположении центра масс между ними. В этой же работе количество опор будет две, что уменьшит конструкцию в целом, но добавит сложности в построении модели, так как придется постоянно учитывать неустойчивость механизма.

Кратко, итоговые поставленные задачи можно описать так: дан двуногий механизм с известными параметрами, необходимо построить его математическую модель и добиться устойчивого управления при произвольно наперед заданной траектории ступни.

Глава 1. Постановка задачи и обзор литературы

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи, ранее кратко описанную во введении. В нашей работе мы будем опираться на модель, изображенную на Рис. 1. Она имеет пять тонких звеньев и пять степеней свободы. Допустим, что центры масс звеньев находятся в их геометрических центрах (за исключением тела-«противовеса», у которого центр масс - точка на конце стержня). Углы $\alpha_l, \alpha_r, \beta_l, \beta_r, \gamma$ управляются при помощи моторов. Предполагается, что модель не имеет ступней (point-feet).

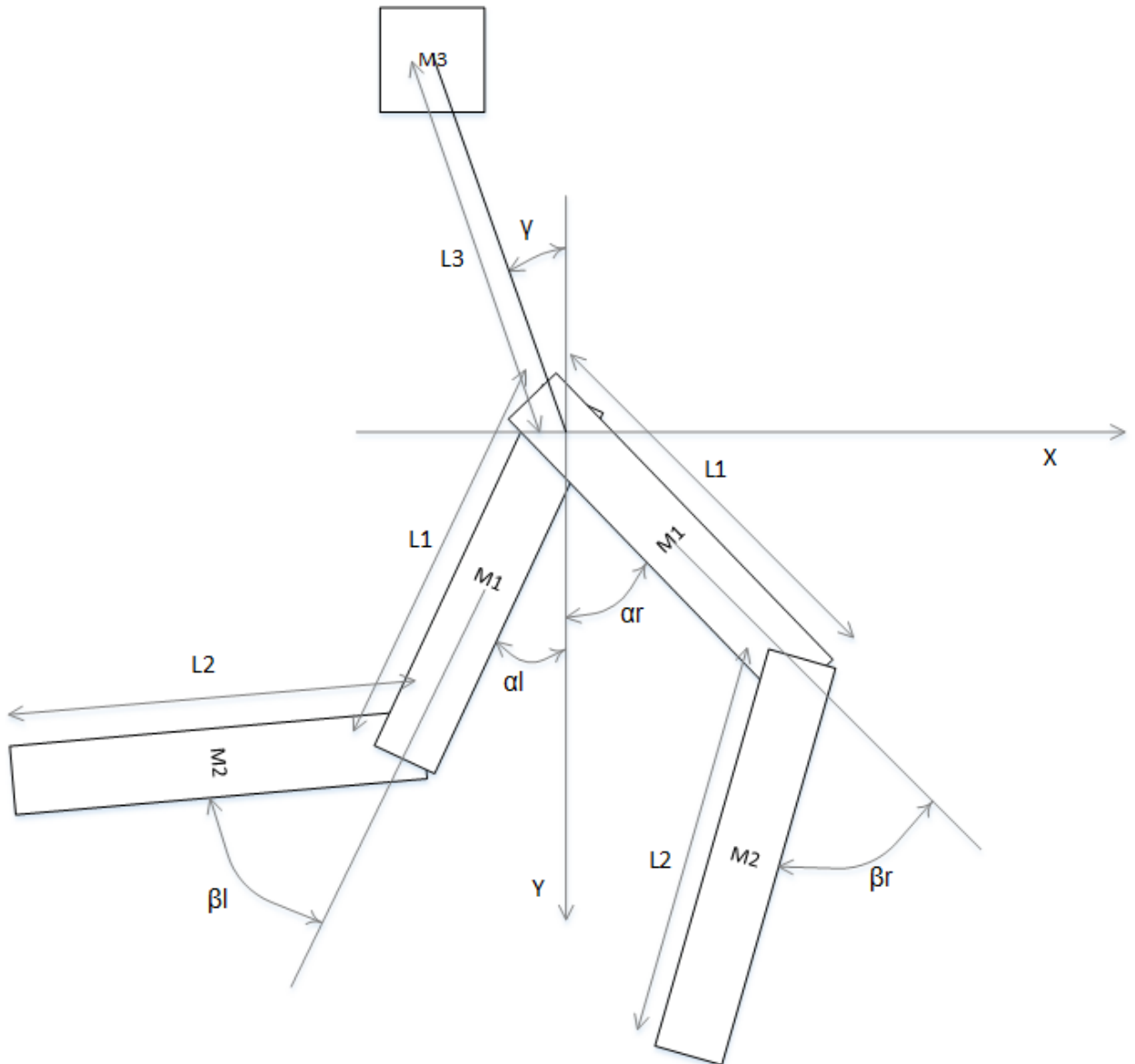


Рис. 1: Схематическое изображение модели двуногого шагающего механизма

На вход также подаются $r_l(t), \psi_l(t), r_r(t), \psi_r(t)$ – полярные уравне-

ния траекторий ступней, которые робот может построить, исходя из анализа ландшафта местности. Вообще говоря, эти уравнения делятся на две фазы – опорная и маховая, опираясь на которые, мы будем строить управление угла «противовеса» (в общем случае, в опорную фазу добавляется сила реакции опоры, которая добавляется в расчет модели, но в нашем, упрощенном, мы ее опускаем).

Сделаем предположения относительно этих фаз. Очевидно, что в каждый момент времени имеется хотя бы одна опорная фаза. Существуют так же отрезки времени, когда траектории обеих ступней находятся в опорной фазе. Этот отрезок будем использовать для переноса центра масс с одной опоры на другую. То есть очередность фаз будет выглядеть следующим образом: левая нога опорная, центр масс над левой ступней, идет мах правой ноги – обе ноги опорные, идет перенос центра масс на правую ступню – правая нога опорная, центр масс над правой ступней, идет мах левой ноги – и так далее, в цикле.

Задача состоит в построении единой математической модели, связывающей изменения углов с силами-управлениями, и построении в дальнейшем управления для устойчивой ходьбы при заданных траекториях ступней.

1.2 Обзор литературы

1.2.1 Метод моделирования с помощью закона сохранения энергии

Весьма распространенный метод, опирающийся на фундаментальные законы физики для достижения устойчивости системы с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ (n - количество степеней свободы), $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ – кинетическая энергия голоморфной механической системы, q_i – обобщенные координаты, t – время, Q_i – обобщенные силы.

Он хорошо описан в [2], [3]. Метод заключается в том, чтобы посчитать кинетические и потенциальные энергии, действующие на систему, и, на основе закона сохранения энергии, вывести модель. Преимущество его заключается в простоте учета сил, действующих на систему, что делает его хорошим инструментом для моделирования устойчивого движения на поверхности. Также можно отметить точность построенной с его помощью модели. Но, в то же время, метод теряет гибкость, когда мы хотим задать произвольные траектории движения, которые, так или иначе, были бы нам интересны.

1.2.2 Метод параметрической идентификации

Данный метод, реализованный в [4], [5], использует выходные данные исследуемого объекта, и на их основе строит модель и необходимое для нее управление. Очевидное преимущество заключается в автоматизации процесса построения модели при некоем известном ее виде. Но, так как метод не основан на законах физики, а лишь на показаниях приборов, то невозможно гарантировать точность построенной модели, что временами бывает критично.

Глава 2. Решение задачи

2.1 Построение модели

Построим математическую модель для конструкции, проиллюстрированной на Рис. 1. Основой будет служить второй закон Ньютона для плоского вращательного движения:

$$m\ddot{\omega}(t)h(t) = f(t),$$

где m – масса вращаемого объекта, $f(t)$ – приложенная сила, а $h(t)$ – расстояние от точки приложения силы до центра масс. Применим его к углам в нашей модели:

$$\ddot{X}(t) = G(X, t) \quad (2)$$
$$X(t) = \begin{bmatrix} \alpha_l(t) \\ \alpha_r(t) \\ \beta_l(t) \\ \beta_r(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}, G(t) = \begin{bmatrix} f_{\alpha l}(X, t) h_{\alpha l}(X, t)^{-1} m_{\alpha l}^{-1} \\ f_{\alpha r}(X, t) h_{\alpha r}(X, t)^{-1} m_{\alpha r}^{-1} \\ f_{\beta l}(X, t) h_{\beta l}(X, t)^{-1} m_{\beta l}^{-1} \\ f_{\beta r}(X, t) h_{\beta r}(X, t)^{-1} m_{\beta r}^{-1} \\ f_{\gamma}(X, t) h_{\gamma}(X, t)^{-1} m_{\gamma}^{-1} \end{bmatrix}$$

Для удобства, запишем правую часть (2) в виде покомпонентного произведения:

$$\ddot{X}(t) = F(X, t) \odot H(X, t) \quad (3)$$
$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{\alpha l}(X, t) \\ f_{\alpha r}(X, t) \\ f_{\beta l}(X, t) \\ f_{\beta r}(X, t) \\ f_{\gamma}(X, t) \end{bmatrix} H(X, t) = \begin{bmatrix} h_{\alpha l}(X, t)^{-1} m_{\alpha l}^{-1} \\ h_{\alpha r}(X, t)^{-1} m_{\alpha r}^{-1} \\ h_{\beta l}(X, t)^{-1} m_{\beta l}^{-1} \\ h_{\beta r}(X, t)^{-1} m_{\beta r}^{-1} \\ h_{\gamma}(X, t)^{-1} m_{\gamma}^{-1} \end{bmatrix}$$

Понизим степень производной в (3):

$$\dot{\hat{X}}(t) = \hat{F}(X, t) \odot \hat{H}(X, t) \quad (4)$$

$$\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_l(t) \\ \hat{\alpha}_l(t) \\ \alpha_r(t) \\ \hat{\alpha}_r(t) \\ \beta_l(t) \\ \hat{\beta}_l(t) \\ \beta_r(t) \\ \hat{\beta}_r(t) \\ \gamma(t) \\ \hat{\gamma}(t) \end{bmatrix}, \hat{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f_{\alpha l}(X, t) \\ 1 \\ f_{\alpha r}(X, t) \\ 1 \\ f_{\beta l}(X, t) \\ 1 \\ f_{\beta r}(X, t) \\ 1 \\ f_{\gamma}(X, t) \end{bmatrix}, \hat{H}(X, t) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_l(t) \\ h_{\alpha l}(X, t)^{-1} m_{\alpha l}^{-1} \\ \hat{\alpha}_r(t) \\ h_{\alpha r}(X, t)^{-1} m_{\alpha r}^{-1} \\ \hat{\beta}_l(t) \\ h_{\beta l}(X, t)^{-1} m_{\beta l}^{-1} \\ \hat{\beta}_r(t) \\ h_{\beta r}(X, t)^{-1} m_{\beta r}^{-1} \\ \hat{\gamma}(t) \\ h_{\gamma}(X, t)^{-1} m_{\gamma}^{-1} \end{bmatrix}$$

Вектор $\hat{F}(t)$ будем считать управляющим, так возможно варьирование его компонент по нашему усмотрению. Задача этого параграфа состоит в нахождении вектора $\hat{H}(X, t)$, то есть в выражении его через известные величины (длины и массы звеньев, элементы вектора состояния \hat{X}).

Начнем с коленных суставов. Они двигают лишь голени, то есть, при предположении, что центр масс находится в центре звена:

$$h_{\beta l}(X, t) = h_{\beta r}(t) = \frac{L_2}{2}, \quad m_{\beta l} = m_{\beta r} = M_2 \quad (5)$$

«Противовесный» сустав двигает лишь тело массы M_3 , соединенное с с суставом стержнем длиной L_3 :

$$h_{\gamma}(X, t) = L_3, \quad m_{\gamma} = M_3 \quad (6)$$

Немного интереснее дела обстоят с тазобедренными суставами. Они двигают и бедра и голени, причем расположение центра масс зависит от коленного угла. Рассмотрим треугольник ABC , изображенный на Рис. 2. Здесь сторона AB является бедром длины L_1 , а BC , соответственно, голем

ную длины L_2 . D, E – расположения центр масс звеньев, делят соответствующие стороны пополам. M – точка искомого центра масс, делящая прямую DE в соотношении $\frac{DM}{ME} = \frac{M_2}{M_1}$. Также известен $\angle ABC = 180 - \beta_l(t)$ (для определенности рассмотрим случай с левой ногой). Задача – найти длину AM , которая и будет соответствовать $h_{ol}(X, t)$. Треугольник ADM можно решить, зная $AD, DM, \cos(\angle ADM)$. По условию, $DM = \frac{M_2}{M_1+M_2}DE = \frac{M_2}{2(M_1+M_2)}AC$. $\cos(\angle ADM) = -\cos(\angle BDE) = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2AB AC}$ по теореме косинусов. По ней же выразим AM через ранее найденные выражения:

$$AM = \sqrt{AD^2 + \frac{AC^2 M_2^2}{4(M_1 + M_2)^2} + \frac{AD M_2 (AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2 AB (M_1 + M_2)}} \quad (7)$$

Известно, что $AD = \frac{1}{2} L_1, AB = L_1, AC = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos(\beta_l(t))}$. Подставив в (7) эти значения, получим итоговое выражение для $h_l(t)$:

$$h_{ol}(X, t) = \sqrt{A + B + C}, \quad (8)$$

$$A = \frac{L_1^2}{4},$$

$$B = \frac{M_2^2 (L_1^2 + 2 \cos(\beta_l(t)) L_1 L_2 + L_2^2)}{4 (M_1 + M_2)^2},$$

$$C = \frac{M_2 (-L_2^2 + 2 L_1^2 + 2 \cos(\beta_l(t)) L_1 L_2 + L_2^2)}{4 (M_1 + M_2)}$$

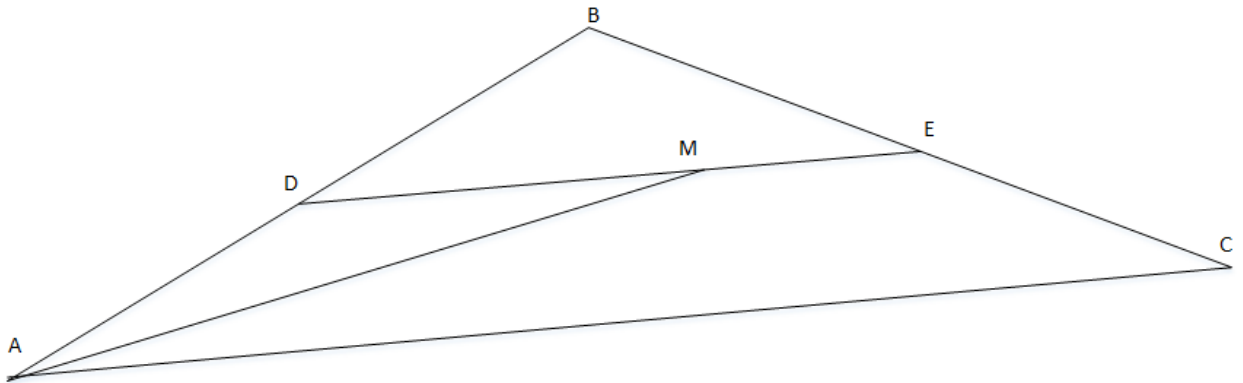


Рис. 2: Треугольник ноги с расположением центра масс

Также, для дальнейшей постройки управления, будет полезным узнать

величину $\angle DAM$, который ищется через три стороны треугольника ADM :

$$\cos(\angle DAM) = \frac{h_{al}(X, t)^2 + \frac{L_1^2}{4} - \frac{M_2^2 (L_1^2 + 2 \cos(\beta_l(t)) L_1 L_2 + L_2^2)}{2(M_1 + M_2)^2}}{h_{al}(X, t) L_1} \quad (9)$$

Аналогично, получаем выражение для $h_{or}(X, t)$. Масса же считается как сумма масс бедра и голени:

$$m_{al} = m_{or} = M_1 + M_2 \quad (10)$$

Итого, подставляя (5), (6), (8), (10) в (4), получаем итоговую модель для двуногого механизма.

2.2 Построение управления

На вход даны $r_l(t), \psi_l(t), r_r(t), \psi_r(t)$ – полярные уравнения траекторий ступней. Необходимо построить управление для (4), при котором это управление достигается. На деле, будем пользоваться видом модели (3), как более наглядной. Алгоритм весьма прост – необходимо найти элементы вектора X , дважды продифференцировать и, с его и ранее найденным $H(X, t)$ помощью найти $F(X, t)$:

$$F(X, t) = \ddot{X}(t) \oslash H(X, t) \quad (11)$$

Где \oslash – покомпонентное деление. Единственный вопрос вызывает $\gamma(t)$. Вообще говоря, его изменение не влияет на траектории ступней, но может возникнуть момент, когда центр масс конструкции выйдет за пределы опор (будет не над опорой, если таковая одна) и потеряет устойчивость. Противовес массы M_3 как раз и нужен для возврата итогового центра масс в нужную точку.

Выведем уравнения углов левой ноги $\alpha_l(t), \beta_l(t)$, исходя из известных $r_l(t), \psi_l(t)$. Уравнения для правой ноги будут выводиться аналогично. Треугольник ноги, на который будем опираться, показан на Рис. 3. По су-

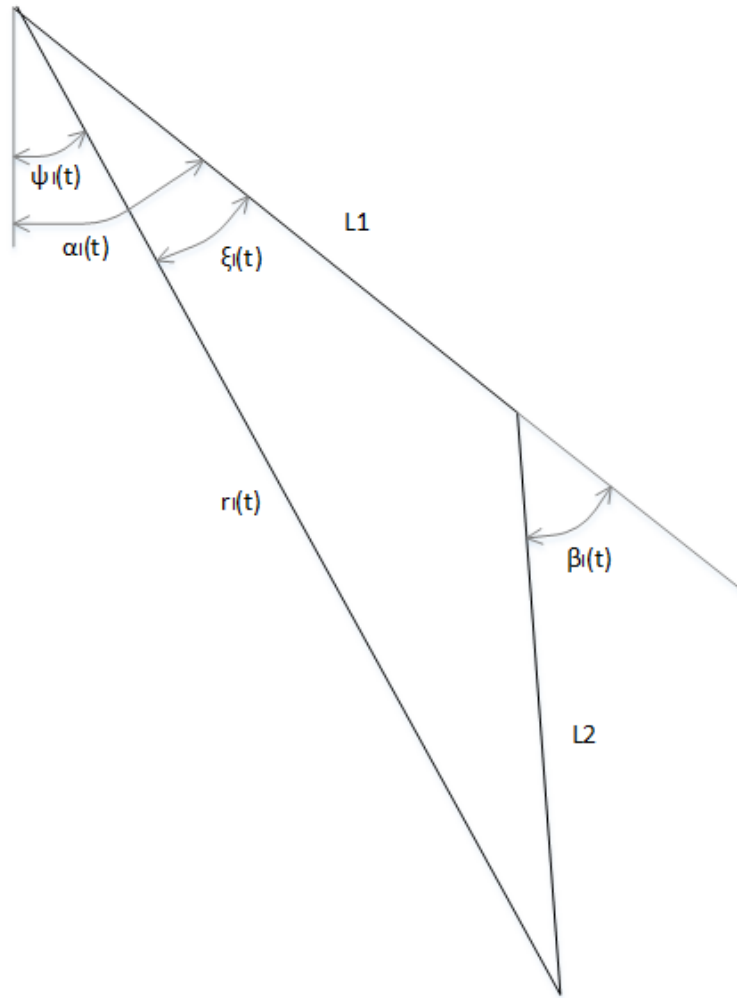


Рис. 3: Треугольник ноги с заданными $r_l(t)$, $\psi_l(t)$

ти, вся необходимая информация по его решению нам уже дана, это три стороны – L_1 , L_2 , $r_l(t)$. Отсюда легко находится угол $\beta_l(t)$:

$$\cos(\beta_l(t)) = \frac{r_l(t)^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2} \quad (12)$$

$\alpha_l(t)$ ищется как сумма известного $\psi_l(t)$ и $\xi_l(t)$, который находится в силу решенности треугольника:

$$\cos(\alpha_l(t)) = \cos(\psi_l(t)) \cos(\xi_l(t)) - \sin(\psi_l(t)) \sin(\xi_l(t)) \quad (13)$$

$$\cos(\xi_l(t)) = \frac{r_l(t)^2 + L_1^2 - L_2^2}{2 r_l(t) L_1}$$

$$\sin(\xi_l(t)) = \sqrt{1 - \cos(\xi_l(t))^2}$$

Положительность $\sin(\xi_l(t))$ обеспечивается ограничениями конструкции, которая не допускает угол $\xi_l(t)$ больший π .

В постановке задачи были сделаны предположения насчет опорной и маховой фаз траекторий. Опираясь на них, будем строить уравнение угла $\gamma(t)$ в три фазы – левая опорная, обе опорные, правая опорная. Для начала, сделаем это для левой и правой опорной фаз. Достаточно будет рассмотреть одну из данных фаз, вторая строится аналогично. Для определенности, возьмем левую.

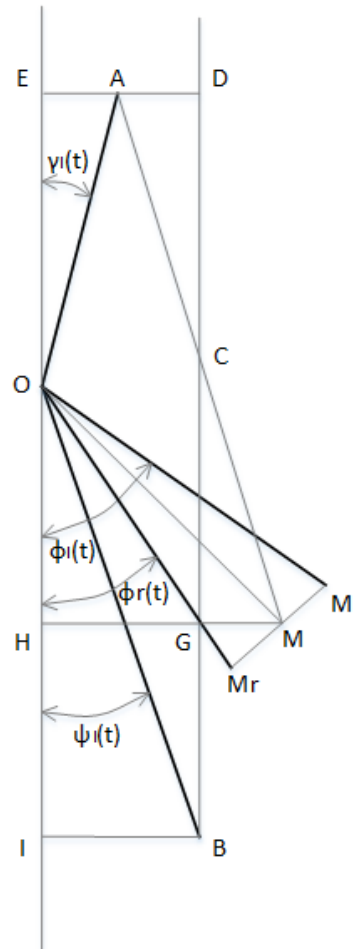


Рис. 4: Вспомогательная схема для расчета угла $\gamma(t)$.

Будем опираться на Рис. 4. Точка O – таз механизма, A – расположение груза-противовеса, B – ступня, M_l , M_r есть расположение центров масс левой и правой ноги. Задача здесь – расположить итоговый центр масс в точку C , то есть в пересечение линии, соединяющей центры масс ног и противовеса, и вертикальной прямой, проведенной из ступни левой (опорной) ноги. Здесь нам известны $OA = L_3$, $OB = r_l(t)$, $\psi_l(t)$. Также, из прошлого параграфа, известны длины OM_l , OM_r , равные $h_{al}(X, t)$, $h_{ar}(X, t)$

соответственно (берется формула (8)). $\phi_l(t)$ нам известен как разность $\alpha_l(t)$ и $\angle DAM$ из формулы (9), аналогично находится $\phi_r(t)$.

Найдем отрезок OM . Заметим, что он является медианой треугольника OM_lM_r , так как $MM_r = MM_l$ в силу равенства масс левой и правой ног. Это значит, что зная длину $M_lM_r = \sqrt{M_l^2 + M_r^2 - 2 M_l M_r \cos(|\phi_l(t) - \phi_r(t)|)}$, возможно его нахождение с помощью теоремы Аполлония:

$$OM = \frac{\sqrt{2OM_r^2 + 2OM_l^2 - M_lM_r^2}}{2}$$

Высчитывая угол HOM , необходимо иметь в виду, что он может быть отрицательным (до этого рассматривались углы в срезе треугольников). Поэтому, будем рассматривать его как сумму наименьшего в конкретный момент времени из $\phi_l(t)$, $\phi_r(t)$ угла и соответственного $\angle MOM_l$, $\angle MOM_r$:

$$\angle HOM = \begin{cases} \phi_l(t) + \angle MOM_l & \text{если } \phi_l(t) < \phi_r(t), \\ \phi_r(t) + \angle MOM_r & \text{если } \phi_r(t) < \phi_l(t), \end{cases}$$

$$\cos(\angle MOM_l) = \frac{OM^2 + OM_l^2 - (\frac{M_lM_r}{2})}{2OMOM_l},$$

$$\cos(\angle MOM_r) = \frac{OM^2 + OM_r^2 - (\frac{M_lM_r}{2})}{2OMOM_r}$$

Далее, легко находится $HM = OM \sin(\angle HOM)$. Найдя $HG = BI = r_l(t) \sin(\psi_l(t))$ (по построению), можно определить итоговое отклонение по горизонтали центра масс ног от опоры: $GM = HM - HG$.

Вернемся к задаче. Условием для расположения центра масс в точке C является выполнение соотношения $\frac{AC}{CM} = \frac{2(M_1+M_2)}{M_3}$. В силу подобия (по трем углам) треугольников GMC и ACD , $\frac{AD}{GM} = \frac{AC}{CM}$. Следовательно, $AD = \frac{2GM(M_1+M_2)}{M_3}$. Далее находится $EA = ED - AD = r_l(t) \sin(\psi_l(t)) - AD$. И, наконец, находим $\gamma(t)$:

$$\sin(\gamma(t)) = \frac{EA}{L_3} \tag{14}$$

Случай с правой опорной фазой рассматривается полностью аналогично ($r_l(t) \rightarrow r_r(t)$, $\psi_l(t) \rightarrow \psi_r(t)$).

Фазу с двумя опорами возьмем упрощенной. Предположим, что единственной ее целью является перенос центра масс с одной ноги на другую в течение некоторого промежутка времени T , и изменяться будет только $\gamma(t)$. То есть:

$$\begin{aligned}\alpha_l(t) &= \text{const}, \beta_l(t) = \text{const}, \alpha_r(t) = \text{const}, \beta_r(t) = \text{const} \\ r_l(t) &= \text{const}, \psi_l(t) = \text{const}, r_r(t) = \text{const}, \psi_r(t) = \text{const}\end{aligned}$$

В таком случае, можно взять фиксированный γ_l , получаемый по формуле (14) при использовании в выводе в качестве опорной ноги левую, аналогично получаемый для правой опорной ноги γ_r и свести изменение угла к перемещению $\gamma_l \rightarrow \gamma_r$ ($\gamma_r \rightarrow \gamma_l$) за время T . Положим, $\gamma_{lr}(t)$ – изменение угла при переносе центра масс с левой на правую ногу, $\gamma_{rl}(t)$ – с правой на левую. Тогда:

$$\gamma_{lr}(t) = \left(\frac{\gamma_r - \gamma_l}{T} \right) t + \gamma_l, \quad \gamma_{rl}(t) = \left(\frac{\gamma_l - \gamma_r}{T} \right) t + \gamma_r \quad (15)$$

Итого, были найдены значения $\alpha_l(t)$, $\alpha_r(t)$, $\beta_l(t)$, $\beta_r(t)$, γ (каждый для своей фазы). Подставляя значения из (13), (12), (14), (15) в вектор X в (11), учитывая фазы, построим итоговое управление для системы (3).

Глава 3. Численный эксперимент и программная реализация

3.1. Численный эксперимент

Опираясь на теоретические выкладки главы 2, построим модель и управление к ней, опираясь на некоторые числовые данные. Допустим, $L_1 = L_2 = 0.5m$, $L_3 = 1m$, $M_1 = M_2 = 1kg$, $M_3 = 4kg$. Построим модель (4), для чего найдем вектор $\hat{H}(X, t)$. Исходя из (5), (6):

$$\begin{aligned} h_{\beta l}(X, t) = h_{\beta r}(X, t) &= 0.25, \quad m_{\beta l} = m_{\beta r} = 1, \\ h_{\gamma}(X, t) &= 1, \quad m_{\gamma} = 4 \end{aligned} \tag{16}$$

Далее найдем конкретные $h_{\alpha l}(X, t)$, $h_{\alpha r}(X, t)$, $m_{\alpha l}$, $m_{\alpha r}$ по формулам (8), (10):

$$\begin{aligned} h_{\alpha l}(X, t) &= \sqrt{\frac{3 \cos(\beta_l(t)) + 5}{32}}, \\ h_{\alpha r}(X, t) &= \sqrt{\frac{3 \cos(\beta_r(t)) + 5}{32}} \\ m_{\alpha l} &= m_{\alpha r} = 2 \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляем (16), (17) в $\hat{H}(X, t)$:

$$\hat{H}(X, t) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_l(t) \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{3 \cos(\beta_l(t)) + 5}} \\ \hat{\alpha}_r(t) \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{3 \cos(\beta_r(t)) + 5}} \\ \hat{\beta}_l(t) \\ 4 \\ \hat{\beta}_r(t) \\ 4 \\ \hat{\gamma}(t) \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Используя (18) в (4), получаем модель для заданных параметров.

Далее, зададим желаемую траекторию по фазам. Пусть маховые и опорные фазы у обеих ног соответственно совпадают.

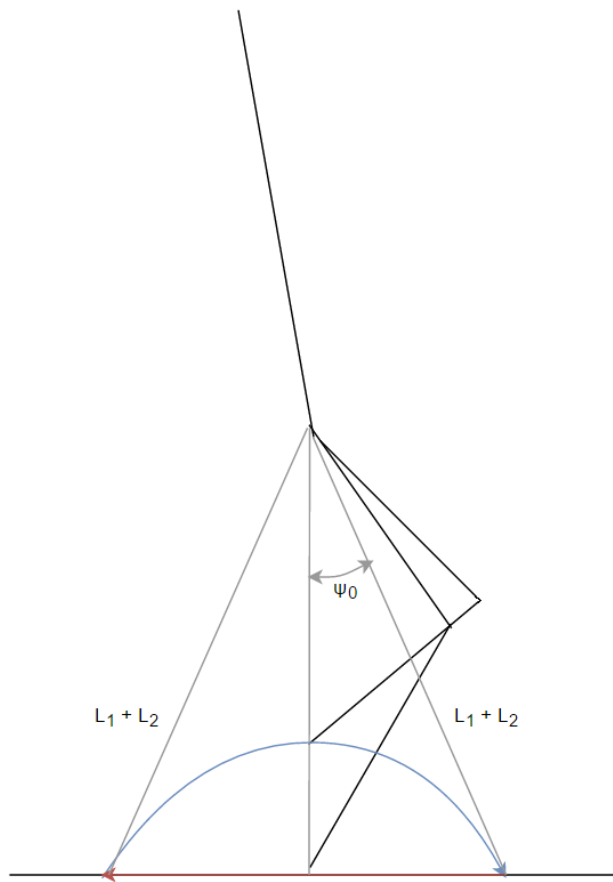


Рис. 5: Маховая и опорная фазы.

В построении траекторий будем опираться на Рис. 5. Начнем с построения маховой фазы (на рисунке – синим цветом). Она будет выглядеть как парабола с вершиной в ступне согнутой под прямым углом ноги. Ширина шага будет равна $2(L_1 + L_2) \sin(\psi_0)$. Возьмем $\psi_0 = \frac{\pi}{6}$, тогда она будет равна 1. Пусть время маха равно $T = 2s$. Тогда траектории для маховой фазы можно составить следующим образом:

$$\psi_m(t) = \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6} \quad (19)$$

$$r_m(t) = \sqrt{(t-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}(t-1)^2}{2}\right)^2}$$

Найдем по (12), (13) необходимые $\alpha_m(t)$, $\beta_m(t)$:

$$\cos(\alpha_m(t)) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{A} - \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{1-A}, \quad (20)$$

$$A = (t-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}(t-1)^2}{2}\right)^2,$$

$$\cos(\beta_m(t)) = 2(t-1)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}(t-1)^2}{2}\right)^2 - 1$$

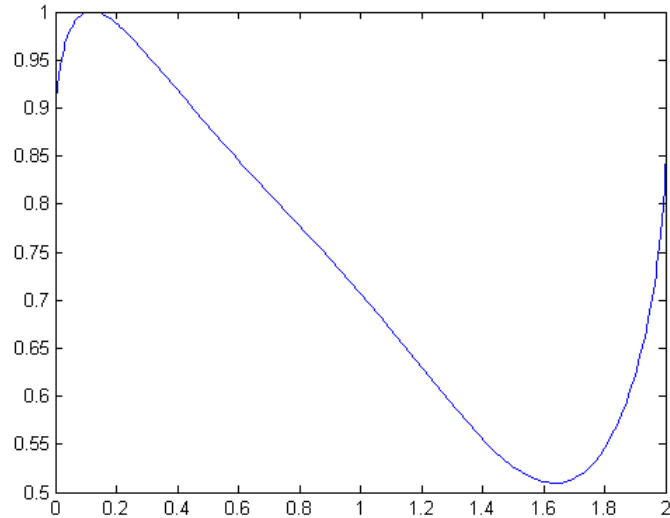


Рис. 6: $\cos(\alpha_m(t))$, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

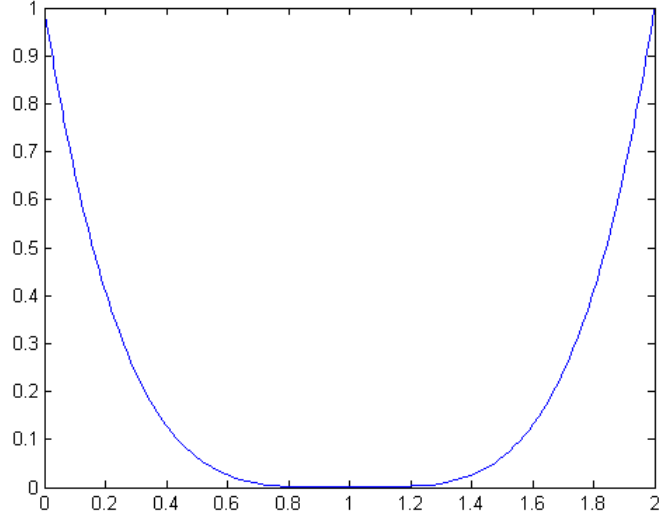


Рис. 7: $\cos(\beta_m(t))$, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

Аналогично распишем углы для опорной фазы. Траектория ступни будет выглядеть следующим образом (берем то же время фазы, как и в махе – 2s):

$$\begin{aligned}\psi_o(t) &= -\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} \\ r_o(t) &= \sqrt{(t-1)^2 + \frac{3}{4}}\end{aligned}\tag{21}$$

Соответствующие углы $\alpha_o(t)$, $\beta_o(t)$ получаются такими:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_o(t)) &= \cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &+ \sin\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}, \\ \cos(\beta_o(t)) &= 2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{22}$$

Далее, вычислим вид $\gamma(t)$. Он, в общем случае, разделяется на три части: при левой опорной, при правой опорной и при обеих опорных. В данном случае, первые две части можно объединить, так как там, в силу симметрии фаз, получится один и тот же закон изменения угла. Для

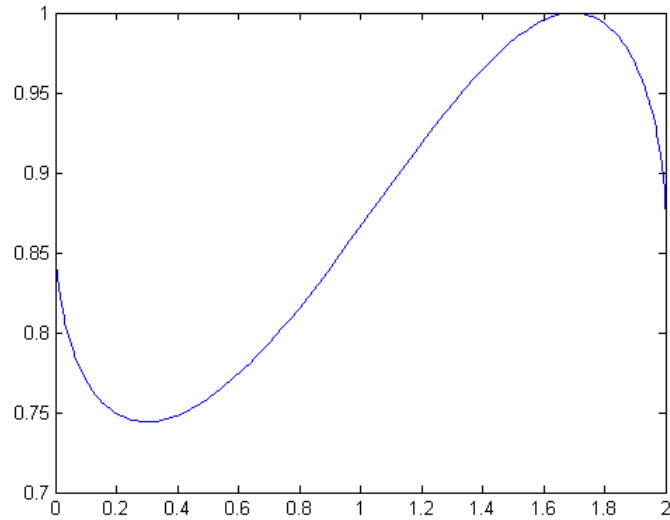


Рис. 8: $\cos(\alpha_o(t))$, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

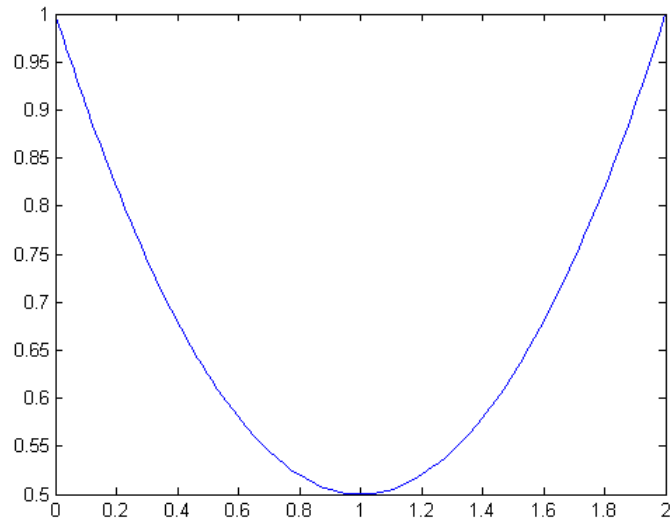


Рис. 9: $\cos(\beta_o(t))$, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

определенности, возьмем за опорную ногу левую, то есть:

$$\begin{aligned}\alpha_l(t) &= \alpha_o(t), \beta_l(t) = \beta_o(t), \\ \alpha_r(t) &= \alpha_m(t), \beta_r(t) = \beta_m(t)\end{aligned}$$

Итоговые расчеты угла $\gamma(t)$ были произведены с помощью формулы (14) численным методом. Результаты показаны на Рис. 10-11.

$\gamma(t)$ для опорной фазы двух ног довольно прост. Допустим, этой фазе предшествовала левая опорная, в таком случае, имея в виду постоянство

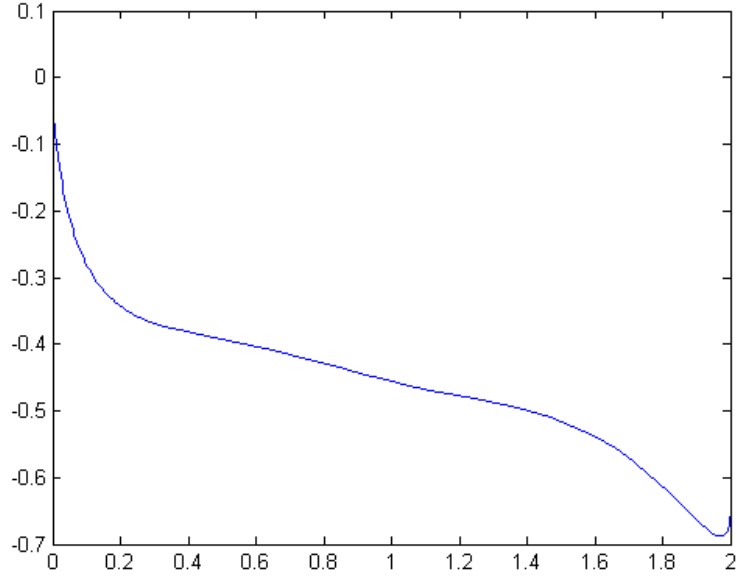


Рис. 10: $\sin(\gamma(t))$ для левой опорной фазы, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

УГЛОВ:

$$\begin{aligned}\alpha_r(t) &= \psi_r(t) = \frac{\pi}{6} \\ \alpha_l(t) &= \psi_l(t) = -\frac{\pi}{6} \\ \beta_l(t) &= \beta_r(t) = 0 \\ r_l(t) &= r_r(t) = L_1 + L_2\end{aligned}$$

В таком случае, $\gamma(t)$ на графиках будет выглядеть весьма просто (Рис. 12-13).

В итоге, подставляя вышенайденные углы $X(t)$ (отдельно для каждой фазы) и параметры модели $H(X, t)$ (18) в (11), получим необходимое управление для данных траекторий.

Можно так же отметить, что построение управления возможно выполнять дискретно. То есть для каждого фиксированных r_l, ψ_l, r_r, ψ_r , которые подались на вход, можно построить углы и управление для их достижения.

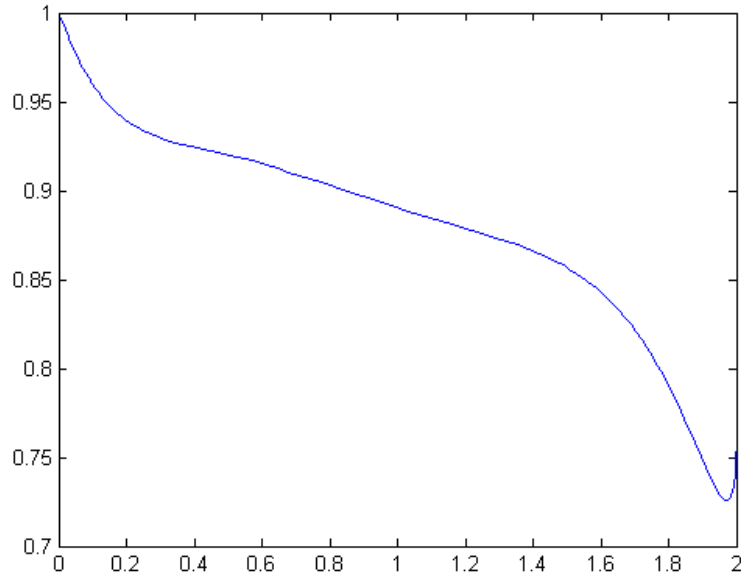


Рис. 11: $\cos(\gamma(t))$ для левой опорной фазы, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

3.2. Программная реализация

Данный алгоритм реализован в среде MATLAB и показан в секции «Приложение». Приведем описание функций.

За построение модели отвечает функция `buildModel`. В качестве входных параметров выступают параметры механизма: длина голени, длина бедра, длина «противовеса», масса голени, масса бедра, масса «противовеса». Функция возвращает матрицу $\hat{G}(X, t) = \hat{F}(X, t) \odot \hat{H}(X, t)$ из (4).

Управление строится функцией `buildControl`. Ее входные параметры: матрица H из (3), траектории движения ступней, описанные в полярных координатах и параметры механизма, описываемые выше. На выход идет результирующий вектор управления $F(X, t)$ из (11).

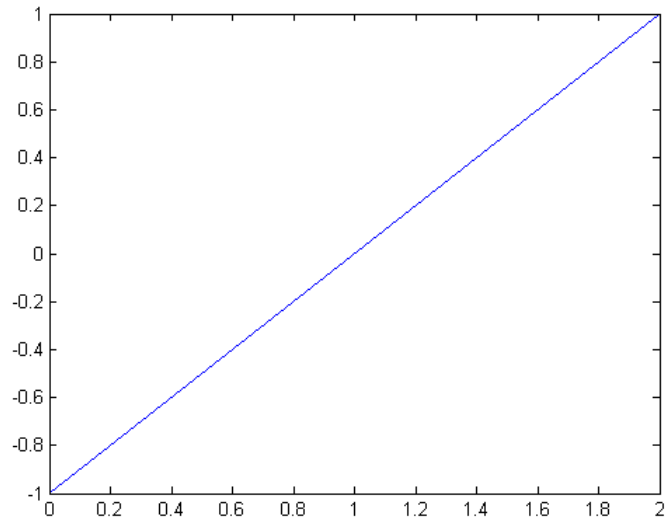


Рис. 12: $\sin(\gamma(t))$ для опорной фазы обеих ног, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

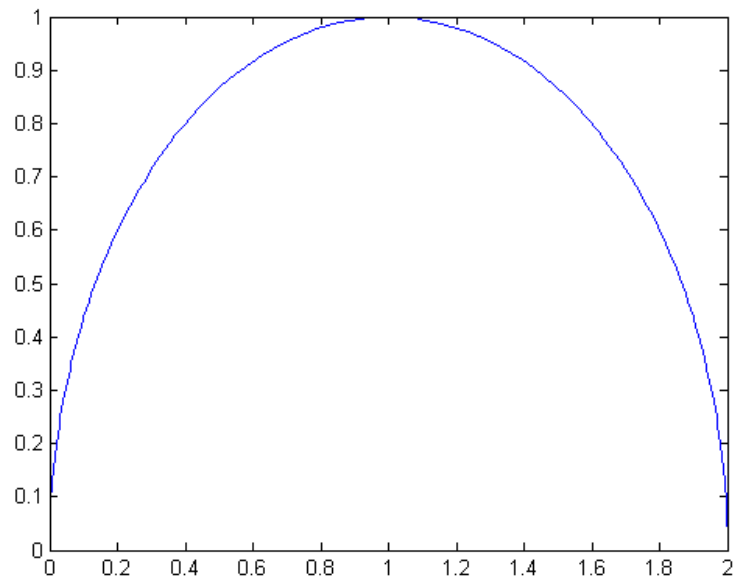


Рис. 13: $\cos(\gamma(t))$ для опорной фазы обеих ног, взятый на промежутке $t = [0, 2]$.

Заключение

В работе проведен анализ методов построения математических моделей робототехнических систем, предложен подход к формированию математической модели двуногого антропоморфного механизма, построено управление, обеспечивающее устойчивое движение механизма для наперед заданных траекторий движения ступней.

Кроме того, исследование динамики подобных систем показало существование определенных трудностей при формировании движения в силу наличия внешних воздействий на объект в реальном мире. Учет таких внешних возмущений является несомненно актуальной задачей, но пока выходит за рамки данной работы. В перспективе можно добавить ступням механизма подвижность и тем самым учесть внешние возмущения.

Список литературы

- [1] Кто на самом деле придумал слово «робот»? http://androbots.ru/istoriya_robototehniki/proishozdenie_slova_robot/slovo_robot.php
- [2] Тертычный-Даури В.Ю. Динамика робототехнических систем. Учебное пособие. — СПб.: НИУ ИТМО, 2012. — 128 с
- [3] Robert D. Gregg, Mark W. Spong (2010). Reduction-based Control of Three-dimensional Bipedal Walking Robots. The international journal of robotics research, 680-702
- [4] Hae-Won Park, Koushil Sreenath, Jonathan W. Hurst and J.W. Grizzle. Identification and Dynamic Model of a Bipedal Robot With a Cable-Differential-Based Compliant Drivetrain, 17
- [5] P.W.M. van Zutven (2014). Control and Identification of Bipedal Humanoid Robots: Stability Analysis and Experiments. Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, the Netherlands, 156

Приложение

```
function resMatrix = buildModel(l1, l2, l3, m1, m2, m3)

syms X F t hbl hbr hal har hy

X = sym('X', [10, 1]);
F = sym('F', [10, 1]);
for i = 1:2:10
    F(i) = 1;
end

hbl(X) = l2/2;
hbr(X) = l2/2;
mbl = m2;
mbr = m2;

hal(X) = sqrt(l1^2/4 + ...
    m2^2*(l1^2 + 2*cos(X(5))*l1*l2 + l2^2)/(4*(m1 + m2)^2) + ...
    m2*(2*l1^2 + 2*cos(X(5))*l1*l2 + l2^2)/(4*(m1 + m2)));
har(X) = sqrt(l1^2/4 + ...
    m2^2*(l1^2 + 2*cos(X(7))*l1*l2 + l2^2)/(4*(m1 + m2)^2) + ...
    m2*(2*l1^2 + 2*cos(X(7))*l1*l2 + l2^2)/(4*(m1 + m2)));
mal = m1 + m2;
mar = m1 + m2;

hy(X) = l3;
my = m3;

H(X) = [
    X(2);
    (hal(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10))*mal)^(-1);
    X(4);
    (har(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10))*mar)^(-1);
    X(6);
    (hbl(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10))*mbl)^(-1);
    X(8);
    (hbr(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10))*mbr)^(-1);
    X(10);
    (hy(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10))*my)^(-1);
];

resMatrix = H(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8), X(9), X(10)) .* F;

end
```

```

function ctrl = buildControl(H, rl, rr, psil, psir, ...
    l1, l2, l3, m1, m2, m3, isLeftOp)

betal = acos(rl^2 - 1/2)/(1/2);
ksil = acos(rl^2 + l1^2 - l2^2)/(2*rl*l1);
alphal = acos(cos(psil)*cosksi - sinksi*sin(psil));

betar = acos(rr^2 - 1/2)/(1/2);
ksir = acos(rr^2 + l1^2 - l2^2)/(2*rr*l1);
alphar = acos(cos(psir)*cosksi - sinksi*sin(psir));

if isLeftOp
    cosdam = (H(1)^2 + l1^2/4 - (m2^2*(l1^2+2*cos(betar)*l1*l2))/4*(m1+m2)^2)/(H(1)*l1);
    sindam = sqrt(1 - cosdam^2);
    sinfi = sindam*cos(alphal) + cosdam*sin(alphal);
    hm = H(1)*sinfi;
    gm = hm - rl*sinfi;
    ad = 2*gm*(m1+m2)/m3;
    gamma = asin((rl*sinfi - ad)/l3);
else
    cosdam = (H(3)^2 + l1^2/4 - (m2^2*(l1^2+2*cos(betar)*l1*l2))/4*(m1+m2)^2)/(H(3)*l1);
    sindam = sqrt(1 - cosdam^2);
    sinfi = sindam*cos(alphar) + cosdam*sin(alphar);
    hm = H(3)*sinfi;
    gm = hm - rr*sinfi;
    ad = 2*gm*(m1+m2)/m3;
    gamma = asin((rr*sinfi - ad)/l3);
end

ctrl = diff([alphal; alphar; betal; betar; gamma], 2) ./ H;

end

```