Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра моделирования экономических систем

Касаткин Евгений Георгиевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Исследование вероятностной модели конкуренции

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

Ковшов А.М.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

В 1929 году была опубликована статья американского экономиста и статистика Гарольд Хотеллинг «Stability in competition»[3], с описанием модели, с помощью которой была исследована конкуренция на рынке одного товара с пространственной дифференциацией продукции. Итогом данной работы стало обнаружение взаимосвязи между идеей неценовой конкуренции и географическим размещением конкурирующих фирм. Тем самым было показано, что принцип максимизации прибыли автоматически вынуждает конкурентов располагаться близко друг к другу. Основным свойством данной модели Хотеллинга является расположение продавцов в линейном городе, на прямой улице, с равномерным распределением покупателей. Главной дифференциацией продукции является разное расположение продавцов относительно покупателей, т.е. разное расстояние от них.

На данный момент Дуополия Хотеллинга занимает главное место в математических моделях ценообразования. В отличие от модели Жозефа Бертрана[1] в модели Хотеллинга принимается во внимание расстояние от покупателя до потребителя, у которого надо купить товар. Стоит заметить, что модель Хотеллинга является идейным продолжением работы Бертрана, в которой рассматривалась только цена. Но поскольку модель относится к линейному рынку, это накладывает ограничение на её прикладное применение. Именно поэтому работа Хотеллинга дала импульс для целого ряда исследований, которые посвящены анализу конкурентного поведения фирм в условиях, когда на величину покупательского спроса влияет цена продукта, транспортные затраты и количество денег у потребителей, что в свою очередь предоставило возможность применять данные модели на практике.

Через пол века американский экономист Стивен Салоп ввёл понятие «циркулярной модели»[6], рассмотрев при этом модель Хотеллинга, т.е. ввёл «циркулярную модель», в которой продавцы с одинаковым товаром находятся вдоль окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. Салоп [7] рассмотрел задачу о размещении фирм на плоскости, на которой расположены два продавца, которые объявляют цены на товар, а потребители покупают товар у того продавца, до которого дешевле доехать. То есть покупатели сравнивают расходы на преодоление расстояния до продавцов. Затраты представляются в виде суммы цены на товар и затраты на преодоление расстояния от покупателя до продавца. Также в данной работе находится равновесие по Нэшу для моделей, в которых расстояние между продавцом и покупателем вычисляется в евклидовой и манхэттенской метрике. Город в данной работе представлен в виде круга, на котором равномерно распределены покупатели. Благодаря работам [8] и [9] были рассмотрены задачи наилучшего, или оптимального расположения продавцов в условиях конкуренции на плоскости и на графе. В работе [10] рассматривается задача о размещении на плоскости. На единичном квадрате, который выступает в роли города, располагаются два продавца, которые назначают цену на свой товар. Данный квадрат разбивается равномерной сеткой и движение покупателей происходит по ней. Решается задача о ценообразовании и размещении на произвольной сетке и исследуется асимптотика решения.

Основной же проблемой в модели Хотеллинга является проблема поиска равновесных цен, при которых будет иметь место максимальная прибыль для всех продавцов.

Данная работа посвящена исследованию непрерывного случая модели дуополии с вероятностью покупки товара покупателем с учетом транспортных расходов до продавца. На первый взгляд работа может показаться такой же, как и работа Хотеллинга. Однако сходство данной работы с оригинальной работой 1929 года лишь в том, что учитываются транспортные расходы, но покупатель тратит везде всю сумму, которой располагает. Расчеты, приведённые в данной работе, выполнены в среде Wolfram Mathematica.

Постановка задачи

Рассмотрим прямую на которой расположены покупатели. Данная прямая будет являться линейным городом. Покупатели всегда имеют достаточное количество средств для преодоления расстояния до продавца и покупки товара, но эта покупка совершается с вероятностью, которая зависит от расстояния до продавца и транспортных расходов. На прямой расположены два продавца, которые продают один и тот же товар по цене C_1 и C_2 соответственно. Покупатели с вероятностью P_1 и P_2 покупают товар у первого и второго продавца. Имеют место в данной модели транспортные расходы покупателя на преодоления единицы длины, которые равны а. Требуется найти такие равновесные цены продавцов, чтобы их прибыли были максимальными.

Глава 1. Решение задачи в случае монополии

Для решения поставленной задачи целесообразно рассмотреть модель монополии, когда на линейном городе задан только один продавец и вероятность покупки товара покупателем. Данный подход даст более детальное понимание модели дуополии, когда на линейном городе будут заданы два продавца.

Обозначения:

a > 0 – затраты на преодоление единицы расстояния до продавца

C > 0 – цена на товар у продавца

1.1.Формулы для вычисления выручки без учета затрат на перемещение

Рассмотрим вероятность P покупки покупателем товара.

Cmax – максимально разумная или допустимая цена на товар;

Cmax ≥ $\max\limits_{i}(c_i + s_i)$

Cmin ≥ 0 - минимальная цена на товар

Вероятность вычисляется по формуле:

$$P = 1 - \frac{C - Cmin}{Cmax - Cmin}$$

Для вывода данной формулы мы использовали линейную обратную пропорциональную зависимость от цены на товар, т.е. при увеличении цены уменьшается вероятность покупки товара покупателем.

Прибыль продавца от продажи товара вычисляется по формуле:

$$H = \text{С} * P$$

Найдем производную для формулы по цене C :

$$\frac{\partial H}{\partial \text{С}} = \frac{\partial P}{\partial \text{С}} C + P = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \text{С}} = -\frac{1}{Cmax - Cmin}$$

Приравнивая полученную производную к нулю, решаем уравнение относительно цены С. Получим оптимальную цену для максимальной прибыли:

$$\text{С} = \frac{Cmax}{2}$$

1.2.Формулы для вычисления выручки с учетом затрат на перемещение

Теперь рассмотрим монопольный случай с учетом затрат на перемещение:

$$C = c + s$$

Тогда вероятность вычисляется по формуле:

$$P = 1 - \frac{c + s - Cmin}{Cmax - Cmin}$$

$$s = ra$$

Где s – затраты на перемещение, r – расстояние между продавцом и покупателем.

Прибыль продавца от продажи товара вычисляется по формуле:

$$H = C * P$$

Найдем производную для формулы по цене С:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \frac{\partial P}{\partial C} C + P = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial C} = -\frac{1}{Cmax - Cmin}$$

Приравнивая полученную производную к нулю, решаем систему относительно цены С. Получим равновесную цену для максимальной прибыли:

$$c = -\frac{ar}{2} + \frac{Cmax}{2}$$

Глава 2. Решение задачи в случае дуополии

Рассмотрев монопольный случай модели конкуренции, перейдем к модели дуополии.

Необходимые обозначения:

a > 0 – затраты на преодоление единицы расстояния до продавца

$C_1 > 0$ – цена товара у первого продавца.

$C_2 > 0$ – цена товара у второго продавца.

2.1. Случай с двумя продавцами и одним покупателем без учета затрат на перемещение от покупателя до продавца

Рассмотрим вероятность покупки товара у первого продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + \frac{C_2 - C_1}{Cmax - Cmin})(1 - \frac{C_1 - Cmin}{Cmax - Cmin})$$

Вероятность покупки товара у второго продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_2 = (½)(1 + \frac{C_1 - C_2}{Cmax - Cmin})(1 - \frac{C_2 - Cmin}{Cmax - Cmin})$$

C – цена на товар

Cmax – максимально разумная или допустимая цена на товар;

Cmax ≥ $\max_i(c_i + s_i)$

Cmin ≥ 0 - минимальная цена на товар

Для простоты вычислений сделаем замену:

$C_1 = x$

C_2 = y

Cmax = k

Cmin = l

Прибыль первого продавца вычисляется по формуле:

$$H_1 = P_1\ (C_1, C_2)\ C_1$$

Прибыль второго продавца вычисляется по формуле:

$$H_2 = P_2\ (C_1, C_2)\ C_2$$

Равновесие по совершенным покупкам:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dC_1} = 0 \\ \dfrac{dP_2}{dC_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dP_1}{dC_1} = -\frac{1-\frac{-l+x}{k-l}}{2(k-l)} - \frac{1+\frac{-x+y}{k-l}}{2(k-l)} = \frac{3Cmin-2Cmax-C_2}{2(Cmax-Cmin)^2}$$

$$\frac{dP_2}{dC_2} = -\frac{1+\frac{x-y}{k-l}}{2(k-l)} - \frac{1-\frac{-l+y}{k-l}}{2(k-l)} = \frac{Cmin-2Cmax+2C_2-C_1}{2(Cmax-Cmin)^2}$$

$$\begin{cases} C_1 = Cmin - 2Cmax + 2C_2 \\ C_2 = Cmin - 2Cmax + 2C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -Cmin + 2Cmax \\ C_2 = -Cmin + 2Cmax \end{cases}$$

Найдем производные каждой из формул по цене C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dC_1} = \dfrac{dP_1}{dC_1} C_1 + P_1 = 0 \\ \dfrac{dH_2}{dC_2} = \dfrac{dP_2}{dC_2} C_2 + P_2 = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему относительно цен C_1 и C_2. Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$C_2 = \frac{-Cmax^2 + CmaxCmin + 4CmaxC_1 - 2CminC_1 - 3{C_1}^2}{Cmax - 2C_1},$$

$$C_1 = \frac{-Cmax^2 + CmaxCmin + 4CmaxC_2 - 2CminC_2 - 3{C_2}^2}{Cmax - 2C_2},$$

Далее нужно выразить c_1 и c_2 соответственно. Ввиду того, что формулы получатся довольно громоздкими, целесообразно рассмотреть гипотетический пример и взять численные значения для Cmin, Cmax.

Пусть Cmax = 10, Cmin = 0 тогда получим

$$c_1 = 3{,}819660112501052\ ,\ c_2 = 3{,}819660112501052$$

$$c_1 = 26{,}18033988749895\ ,\ c_2 = 26{,}18033988749895$$

$$c_1 = 4{,}319468473735902\ ,\ c_2 = 12{,}34719819293077$$

$$c_1 = 12{,}34719819293077\ ,\ c_2 = 4{,}319468473735902$$

2.2. Случай с двумя продавцами и одним покупателем с учетом затрат на перемещение от покупателя до продавца

Необходимые обозначения:

a > 0 – затраты на преодоление единицы расстояния

$C_1 > 0$ – сумма, потраченная первым покупателем на покупку товара и перемещение

$C_2 > 0$ – сумма, потраченная вторым покупателем на покупку товара и перемещение

$c_1 > 0$ – цена на товара у первого продавца.

$c_2 > 0$ – цена на товара у второго продавца.

$r_1 > 0$ – расстояние между первым продавцом и покупателем.

$r_2 > 0$ – расстояние между вторым продавцом и покупателем.

Теперь усложним задачу и добавим в неё расстояние от покупателя до продавца и затраты на его преодоление:

$$C_1 = c_1 + s_1$$

$$C_2 = c_2 + s_2,$$

Где c_1 и c_2 это цена на товар у первого и второго продавца соответственно, а s_1 и s_2 это затраты на перемещение покупателя

$$s_1 = r_1 a$$

$$s_2 = r_2 a$$

Cmax – максимально разумная или допустимая цена на товар;

Cmax $\geq \max_i (c_i + s_i)$

Cmin ≥ 0 - минимальная цена на товар

Рассмотрим вероятность покупки товара у первого продавца с учетом затрат на перемещение, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + (c_2 + r_2\,a - c_1 - r_1 a)/(Cmax - Cmin))(1 - (c_1 + c_1 a - Cmin)/(Cmax - Cmin))$$

Вероятность покупки товара у первого продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + (c_1 + r_1 a - c_2 - r_2 a)/(Cmax - Cmin))(1 - (c_2 + r_2 a - Cmin)/(Cmax - Cmin))$$

Для простоты вычислений сделаем замену:

$C_1 = x$

C_2 = y

Cmax = k

Cmin = l

Прибыль первого продавца вычисляется по формуле:

$$H_1 = P_1\,(C_1, C_2)\,c_1$$

Прибыль второго продавца вычисляется по формуле:

$$H_2 = P_2\,(C_1, C_2)\,c_2$$

Равновесие по совершенным покупкам:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dc_1} = 0 \\ \dfrac{dP_2}{dc_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dP_1}{dc_1} = \frac{-2Cmax+Cmin+2c_1-c_2+2ar_1-ar_2}{2(Cmax-Cmin)^2}$$

$$\frac{dP_1}{dc_1} = \frac{-2Cmax+Cmin-c_1+2c_2+2ar_2-ar_1}{2(Cmax-Cmin)^2}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2Cmax - Cmin + 2c_2 + 2ar_2 - ar_1 \\ c_2 = 2Cmax - Cmin + 2c_1 + 2ar_1 - ar_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -2Cmax + Cmin - ar_1 \\ c_2 = -2Cmax + Cmin - ar_2 \end{cases}$$

Найдем производные каждой из формул по цене c_1 и c_2 соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dc_1} = \dfrac{dP_1}{dc_1} c_1 + P_1 = 0 \\ \dfrac{dH_2}{dc_2} = \dfrac{dP_2}{dc_2} c_2 + P_2 = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему относительно цен c_1 и c_2 . Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$c_2 = \frac{\begin{gathered} Cmax^2 + 2c_1Cmin + 3c_1{}^2 + ar_1Cmin + 4ac_1r_1 + a^2r_1{}^2 - \\ 2ac_1r_2 - a^2r_1r_2 - \\ \mathrm{Cmax}(Cmin + 4c_1 + 2ar_1 - ar_2) \end{gathered}}{-Cmax + 2c_1 + ar_1},$$

$$c_1 = \frac{\begin{gathered} Cmax^2 + 2c_2Cmin + 3{c_2}^2 - 2ac_2r_1 + ar_2Cmin + \\ 4ac_2r_2 - a^2r_1r_2 + a^2{r_2}^2 - \\ Cmax(Cmin + 4c_2 - ar_1 + 2ar_2) \end{gathered}}{-\mathrm{Cmax} + 2c_2 + ar_2},$$

2.3. Случай с двумя продавцами и n покупателями без учета затрат на перемещение от покупателя до продавца

Рассмотрим вероятность покупки товара у первого продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + \frac{C2-C1}{Cmax-Cmin})(1 - \frac{C1-Cmin}{Cmax-Cmin})$$

Вероятность покупки товара у второго продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_2 = (½)(1 + \frac{C1-C2}{Cmax-Cmin})(1 - \frac{C2-Cmin}{Cmax-Cmin})$$

Прибыль первого продавца вычисляется по формуле:

$$H_1 = \mathrm{n}\ P_1\ (C_1, C_2)\ C_1$$

Прибыль второго продавца вычисляется по формуле:

$$H_2 = \mathrm{n}\ P_2\ (C_1, C_2)\ C_2$$

Найдем производные каждой из формул по цене C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dC_1} = \frac{dP_1}{dC_1}C_1 + P_1 = 0 \\ \frac{dH_2}{dC_2} = \frac{dP_2}{dC_2}C_2 + P_2 = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему относительно цен C_1 и C_2. Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$C_2 = \frac{-Cmax^2 + CmaxCmin + 4CmaxC_1 - 2CminC_1 - 3{C_1}^2}{Cmax - 2C_1},$$

$$C_1 = \frac{-Cmax^2 + CmaxCmin + 4CmaxC_2 - 2CminC_2 - 3{C_2}^2}{Cmax - 2C_2},$$

Равновесие цены не зависит от количества покупателей n.

2.4. Случай с двумя продавцами и n покупателями с учетом затрат на перемещение от покупателя до продавца

Необходимые обозначения:

a > 0 – затраты на преодоление единицы расстояния

$C_1 > 0$ – сумма, потраченная первым покупателем на покупку товара и перемещение

$C_2 > 0$ – сумма, потраченная вторым покупателем на покупку товара и перемещение

$c_1 > 0$ – цена на товара у первого продавца.

$c_2 > 0$ – цена на товара у второго продавца.

$r_1 > 0$ – расстояние между первым продавцом и покупателем.

$r_2 > 0$ – расстояние между вторым продавцом и покупателем.

Теперь усложним задачу и добавим в неё расстояние от покупателя до продавца и затраты на его преодоление:

$$C_1 = c_1 + s_1$$

$$C_2 = c_2 + s_2,$$

Где c_1 и c_2 это цена на товар у первого и второго продавца соответственно, а s_1 и s_2 это затраты на перемещение покупателя

$$s_1 = r_1 a$$

$$s_2 = r_2 a$$

Cmax – максимально разумная или допустимая цена на товар;

Cmax $\geq \max_i(c_i + s_i)$

Cmin ≥ 0 - минимальная цена на товар

Рассмотрим вероятность покупки товара у первого продавца с учетом затрат на перемещение, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + (c_2 + r_2\, a - c_1 - r_1 a)/(Cmax - Cmin))(1 - (c_1 + c_1 a - Cmin)/(Cmax - Cmin))$$

Вероятность покупки товара у первого продавца, которая вычисляется по формуле:

$$P_1 = (½)(1 + (c_1 + r_1 a - c_2 - r_2 a)/(Cmax - Cmin))(1 - (c_2 + r_2 a - Cmin)/(Cmax - Cmin))$$

Прибыль первого продавца вычисляется по формуле:

$$H_1 = c_1 \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Прибыль второго продавца вычисляется по формуле:

$$H_2 = c_2 \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Далее нужно найти производные от каждой формулы по c_1 и c_2 соответственно. Полученные производные приравниваем к нулю и, решая систему относительно c_1 и c_2 , получим равновесные цены для максимальной прибыли продавцов. Ввиду того, что формулы получатся очень громоздкими, целесообразно рассмотреть гипотетический пример и взять численные значения для a,n, Cmin, Cmax, r_1 и r_2.

1. Пусть a=1, n=4, Cmin = 0, Cmax = 10, $r_{1,1} = 1, r_{1,2} = 2, r_{2,1} = 3, r_{2,2} = 4, r_{3,1} = 4, r_{3,2} = 3, r_{4,1} = 2, r_{4,2} = 1$ тогда получим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} P_i = \frac{1}{2(k-l)^2}(&\mathrm{a}r_{1,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{2,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{3,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}\mathrm{a}r_{3,2} + \mathrm{a}r_{4,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{4,1}\mathrm{a}r_{4,2} \\ &+ \mathrm{a}r_{1,2}k + \mathrm{a}r_{2,2}k - 2\mathrm{a}r_{3,1}k + \mathrm{a}r_{3,2}k - 2\mathrm{a}r_{4,1}k + \mathrm{a}r_{4,2}k + 4k^2 \\ &+ \mathrm{a}r_{3,1}l + \mathrm{a}r_{4,1}l - 4kl - \mathrm{a}r_{1,2}c_1 - \mathrm{a}r_{2,2}c_1 + 2\mathrm{a}r_{3,1}c_1 - \mathrm{a}r_{3,2}c_1 \\ &+ 2\mathrm{a}r_{4,1}c_1 - \mathrm{a}r_{4,2}c_1 - 8kc_1 + 4lc_1 + 4c_1{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}c_2 - \mathrm{a}r_{4,1}c_2 \\ &+ 4kc_2 - 4c_1y - \mathrm{a}r_{1,1}(\mathrm{a}r_{1,2} + 2k - l - 2c_1 + c_2) - \mathrm{a}r_{2,1}(\mathrm{a}r_{2,2} + 2k \\ &- l - 2c_1 + c_2))\end{aligned}$$

Где k = Cmax, l = Cmin

Найдем производные каждой из формул по цене C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dc_1} = 0 \\ \dfrac{dH_2}{dc_2} = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему

относительно цен c_1 и c_2. Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$\frac{dH_1}{dc_1} = \frac{1}{100}(151 + 6{c_1}^2 + 15c_2 - c_1(35 + 2c_2))$$

$$\frac{dH_2}{dc_2} = \frac{1}{100}(151 + c_1(15 - 4c_2) - 70c_2 + 6{c_2}^2)$$

$$c_2 = \frac{151 - 70c_1 + 6{c_1}^2}{-15 + 4c_1}$$

$$c_1 = \frac{151 - 70c_2 + 6{c_2}^2}{-15 + 4c_2}$$

$$c_1 = 3{,}093429257026442\ , c_2 = 3{,}093429257026442$$

$$c_1 = 24{,}40657074297356\ , c_2 = 24{,}40657074297356$$

$$c_1 = 3{,}365321618570843\ , c_2 = 10{,}80134504809582$$

$$c_1 = 10{,}80134504809582\ , c_2 = 3{,}365321618570843$$

2. Пусть a=2, n=4, Cmin = 0, Cmax = 10, $r_{1,1} = 1, r_{1,2} = 2, r_{2,1} = 3, r_{2,2} = 4, r_{3,1} = 4, r_{3,2} = 3, r_{4,1} = 2, r_{4,2} = 1$ тогда получим

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = \frac{1}{2(k-l)^2}(\mathrm{a}r_{1,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{2,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{3,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}\mathrm{a}r_{3,2} + \mathrm{a}r_{4,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{4,1}\mathrm{a}r_{4,2}$$
$$+ \mathrm{a}r_{1,2}k + \mathrm{a}r_{2,2}k - 2\mathrm{a}r_{3,1}k + \mathrm{a}r_{3,2}k - 2\mathrm{a}r_{4,1}k + \mathrm{a}r_{4,2}k + 4k^2$$
$$+ \mathrm{a}r_{3,1}l + \mathrm{a}r_{4,1}l - 4kl - \mathrm{a}r_{1,2}c_1 - \mathrm{a}r_{2,2}c_1 + 2\mathrm{a}r_{3,1}c_1 - \mathrm{a}r_{3,2}c_1$$
$$+ 2\mathrm{a}r_{4,1}c_1 - \mathrm{a}r_{4,2}c_1 - 8kc_1 + 4lc_1 + 4c_1{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}c_2 - \mathrm{a}r_{4,1}c_2$$
$$+ 4kc_2 - 4c_1y - \mathrm{a}r_{1,1}(\mathrm{a}r_{1,2} + 2k - l - 2c_1 + c_2) - \mathrm{a}r_{2,1}(\mathrm{a}r_{2,2} + 2k$$
$$- l - 2c_1 + c_2))$$

Где k = Cmax, l = Cmin

Найдем производные каждой из формул по цене C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dc_1} = 0 \\ \dfrac{dH_2}{dc_2} = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему

относительно цен c_1 и c_2. Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$c_2 = \frac{52 - 30\,c_1 + 3c_1{}^2}{-5 + 2c_1}$$

$$c_1 = \frac{52 - 30c_2 + 3c_2{}^2}{-5 + 2c_2}$$

$$c_1 = 2{,}289711071668931\,,\ c_2 = 2{,}289711071668931$$

$$c_1 = 22{,}71028892833107\,,\ c_2 = 22{,}71028892833107$$

$$c_1 = 2{,}374849400869412\,,\ c_2 = 9{,}291817265797255$$

$$c_1 = 9{,}291817265797255,\ c_2 = 2{,}374849400869412$$

3. Пусть a=1, n=4, Cmin = 0, Cmax = 10, $r_{1,1} = 2, r_{1,2} = 4, r_{2,1} = 6,$

$r_{2,2} = 8, r_{3,1} = 8, r_{3,2} = 6, r_{4,1} = 4, r_{4,2} = 2$, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = \frac{1}{2(k-l)^2}(\mathrm{a}r_{1,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{2,1}{}^2 + \mathrm{a}r_{3,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}\mathrm{a}r_{3,2} + \mathrm{a}r_{4,1}{}^2 - \mathrm{a}r_{4,1}\mathrm{a}r_{4,2}$$
$$+ \mathrm{a}r_{1,2}k + \mathrm{a}r_{2,2}k - 2\mathrm{a}r_{3,1}k + \mathrm{a}r_{3,2}k - 2\mathrm{a}r_{4,1}k + \mathrm{a}r_{4,2}k + 4k^2$$
$$+ \mathrm{a}r_{3,1}l + \mathrm{a}r_{4,1}l - 4kl - \mathrm{a}r_{1,2}c_1 - \mathrm{a}r_{2,2}c_1 + 2\mathrm{a}r_{3,1}c_1 - \mathrm{a}r_{3,2}c_1$$
$$+ 2\mathrm{a}r_{4,1}c_1 - \mathrm{a}r_{4,2}c_1 - 8kc_1 + 4lc_1 + 4c_1{}^2 - \mathrm{a}r_{3,1}c_2 - \mathrm{a}r_{4,1}c_2$$
$$+ 4kc_2 - 4c_1y - \mathrm{a}r_{1,1}(\mathrm{a}r_{1,2} + 2k - l - 2c_1 + c_2) - \mathrm{a}r_{2,1}(\mathrm{a}r_{2,2} + 2k$$
$$- l - 2c_1 + c_2))$$

Где k = Cmax, l = Cmin

Найдем производные каждой из формул по цене C_1 и C_2 соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dc_1} = 0 \\ \dfrac{dH_2}{dc_2} = 0 \end{cases}$$

Приравнивая полученные производные к нулю, решаем систему относительно цен c_1 и c_2. Получим равновесные цены для максимальной прибыли:

$$c_2 = \frac{52 - 30x + 3c_1{}^2}{-5 + 2c_1}$$

$$c_1 = \frac{52 - 30c_2 + 3c_2{}^2}{-5 + 2c_2}$$

$$c_1 = 2{,}289711071668931, \; c_2 = 2{,}289711071668931$$

$$c_1 = 22{,}71028892833107, \; c_2 = 22{,}71028892833107$$

$$c_1 = 2{,}374849400869412, \; c_2 = 9{,}291817265797255$$

$$c_1 = 9{,}291817265797255, \; c_2 = 2{,}374849400869412$$

При повышении стоимости проезда за единицу длины, продавцы понижают цены на свой товар. Такое явление можно объяснить тем, что за счёт увеличения расстояния до покупателя или увеличения цены на проезд уменьшается вероятность покупки товара покупателем.

Глава 3. Вычисления

Для простоты вычислений была использована программа Wolfram Mathematica.

Wolfram Mathematica — это программное обеспечение от компании Wolfram Research, которое нашло широкое применение не только в математических вычислениях, но и в моделировании, симуляции, визуализации, документации, а также в создании веб-сайтов. Wolfram Mathematica обладает возможностью осуществлять вызовы функций и принимать вызовы с C, .NET, Java и других языков, генерировать C код. Также средствами Mathematica можно компилировать автономные библиотеки и исполняемые файлы.

В работе были задействованы вычислительные возможности данного программного пакета, что позволило вычислить громоздкие формулы как в общем в так и в частном случаях.

Заключение

В данной работе рассмотрено поведение двух продавцов в условиях конкуренции на рынке товаров одного вида с вероятностью покупки зависящей от характеристик, которыми для покупателя являются цена, а также транспортные расходы. Найдены равновесные цены, от которых каждому из продавцов невыгодно отклоняться. Вычисления были произведены в среде Wolfram Mathematica, что позволило искать численные решения поставленной задачи при разном подборе параметров. Из результатов данной работы видно, что цена на преодоление единицы расстояния до продавца сильно влияет на образование цен у продавцов.

Список литературы

1. Bertrand, J. (1883) "Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses", Journal de Savants 67: 499–508

2. Dresner, Z. Competitive location strategies for two facilities// Regional Science and Urban Economics, Vol. 12, 1982, 485-493. 5. Hakimi, S.L. On locating new facilities in a competitive environment // European Juornal of Operational Research, Vol. 12, 1983, 29-35.

3. Hotelling H. Stability in Competition // Economic Journal . 1929. Vol . 39.

4. Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, N 1. P. 1–13.

5. Nickel S., Puerto J. Location Theory: A Unified Approach, Springer, Berlin, 2005.

6. Salop S. Monopolistic competition with outside goods // Bell journal of Economi cs. 1979. Vol . 1 0. P. 141–156.

7. Мазалов В. В., Щипцова А. В., Токарева Ю. С. Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. т. 46, Вып. 4.

8. Nickel S., Puerto J. Location Theory: A Unified App roach, Springer, Berlin, 2005.

9. Dresner, Z. Competitive location strategies for two facilities// Regional Science

and Urban Economics, Vol. 12, 1982, 485-493. 5. Hakimi, S.L. On locating new facilities in a competitive environment // European Juornal of Operational Research, Vol. 12, 1983, 29-35.

10. Мазалова А. В. Дуополия Хотеллинга на плоскости в метрике Манхеттена // Вестн. С. -Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Т. 2. С. 33–43.

9. Рускоязычная поддержка Wolfram Mathematica. http://wolframmathematica.ru

Приложение

обозначения

Cmax=k

Cmin=l

c_1 = x

c_2 = y

r - расстояние от покупателя до продавца, где первый индекс это номер покупателя, а второй номер продавца

Монопольный случай без учета затрат на перемещение

```
p= 1 - (x-l)/(k-l)
sol=D[p,x]
solution=Solve[sol*x+p==0]
```

Монопольный случай с учетом затрат на перемещение

```
p= 1 - (x + ar-l)/(k-l)
sol=D[p,x]
solution=Solve[sol*x+p==0]
```

Случай с двумя продавцами и одним покупателем без учета затрат на перемещение от покупателя до продавца

```
pde = (1/2 )(1+ (y-x)/(k-l))(1 - (x-l)/(k-l))

soln=D [pde,x]
solu=Solve[soln==0]
profit=Solve[soln*x+pde==0]

pde1 = (1/2 )(1+ (x-y)/(k-l))(1 - (y-l)/(k-l))

soln1=D [pde1,y]
solu1=Solve[soln1==0]
profit1=Solve[soln1*y+pde1==0]
```

Случай с двумя продавцами и одним покупателем с учетом затрат на перемещение от покупателя до продавца

```
x= o +r1*a
y= p +r2*a
pde = (1/2 )(1+ (x-y)/(k-l))(1 - (y-l)/(k-l))

soln=D [pde,p]
solu=Solve[soln==0]

profit=Solve[soln*p+pde==0]

Simplify[profit]

x= o +r1*a
y= p +r2*a
pde = (1/2 )(1+ (y-x)/(k-l))(1 - (x-l)/(k-l))

soln=D [pde,o]
solu=Solve[soln==0]

profit=Solve[soln*p+pde==0]

Simplify[profit]
```

Случай с двумя продавцами и 4 покупателями с учетом затрат на перемещение от покупателя до продавца

```
ar11=1
ar12=2
ar21=3
ar22=4
ar31=4
ar32=3
ar41=2
ar42=1
k=10
l=0
pde1 = (1/2 )(1+ (y+ar12-x-ar11)/(k-l))(1 - (x+ar11-l)/(k-l))
pde2 = (1/2 )(1+ (y+ar22-x-ar21)/(k-l))(1 - (x+ar21-l)/(k-l))
pde3 = (1/2 )(1+ (y+ar32-x-ar31)/(k-l))(1 - (x+ar31-l)/(k-l))
```

```
pde4 = (1/2 )(1+ (y+ar42-x-ar41)/(k-l))(1 - (x+ar41-l)/(k-l))

sol = pde1 + pde2 + pde3 + pde4

Simplify[sol]

solution = sol * x

Simplify[solution]

soln=D [solution,x]
profit=Solve[soln==0]

ar11=1
ar12=2
ar21=3
ar22=4
ar31=4
ar32=3
ar41=2
ar42=1
k=10
l=0
pde1 = (1/2 )(1+ (-y-ar12+x+ar11)/(k-l))(1 - (y+ar12-l)/(k-l))
pde2 = (1/2 )(1+ (-y-ar22+x+ar21)/(k-l))(1 - (y+ar22-l)/(k-l))
pde3 = (1/2 )(1+ (-y-ar32+x+ar31)/(k-l))(1 - (y+ar32-l)/(k-l))
pde4 = (1/2 )(1+ (-y-ar42+x+ar41)/(k-l))(1 - (y+ar42-l)/(k-l))
sol= pde1+pde2+pde3+pde4
Simplify[sol]
solution= sol*y
Simplify[solution]
soln=D [solution,y]
profit=Solve[soln==0]
Simplify[soln]

Solve[{x == (151 - 70y + 6y * y)/(-15 + 4y) , y =
        = (151 - 70x + 6x * x)/(-15 + 4x)}, {x, y}]
```