

Санкт–Петербургский государственный университет

КИРИЛЛОВ Роман Борисович

Выпускная квалификационная работа

***Методы градиентного спуска на основе метода
Рунге – Кутты с разложением Лагранжа – Бюрмана***

Уровень образования: бакалавриат

Направление 27.03.03 «Системный анализ и управление»

Основная образовательная программа СВ.5164.2020 «Прикладные
компьютерные технологии»

Научный руководитель:

профессор, кафедра моделирования

электромеханических и компьютерных систем,

д.ф.-м.н. Кривовичев Герасим Владимирович

Рецензент:

доцент, кафедра теории систем управления

электрофизической аппаратурой,

к.ф.-м.н. Головкина Анна Геннадьевна

Санкт-Петербург

2024 г.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор литературы	5
1.1. Явные методы Рунге – Кутты	6
1.2. Разложение Лагранжа – Бюрмана	8
1.2.1 Формула разложения Лагранжа – Бюрмана	8
1.2.2 Явные методы Рунге – Кутты с разложением Лагранжа – Бюрмана	9
1.2.3 Метод второго порядка точности	10
1.3. Применение методов Рунге – Кутты к решению оптимизационных задач	12
1.4. Выводы	13
Глава 2. Построение и анализ градиентных методов	14
2.1. Случай квадратичной функции	14
2.1.1 Одношаговый метод	15
2.1.2 Двухшаговый метод	21
2.2. Случай возмущенной квадратичной функции	28
2.3. Результаты	30
Глава 3. Решение задач	31
3.1. Решение двумерной задачи для уравнения Пуассона	32
3.2. Решение трехмерной задачи для уравнения Пуассона	34
3.3. Решение задачи минимизации интегрального функционала	36
3.4. Решение задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения	38
3.5. Решение задачи логистической регрессии	40
3.6. Результаты	42
Заключение	43
Список литературы	44

Введение

В настоящее время методы оптимизации широко используются во многих областях науки и техники. Эти методы активно применяются в задачах машинного обучения [14], теории управления [23] и линейной алгебры [15, 28]. Их использование позволяет находить наилучшие решения в условиях ограниченного времени и ресурсов. На практике большинство задач оптимизации можно решить только численно. В связи с этим разработка и исследование численных методов оптимизации являются актуальными задачами в вычислительной математике.

Наиболее часто при решении оптимизационных задач используются градиентные методы, которые основаны на движении вдоль антиградиента — направления наискорейшего убывания функции. Примерами таких методов являются градиентный спуск, метод Нестерова [26] и метод тяжелого шарика [8]. Также в задачах оптимизации широко применяются численные методы второго порядка, среди которых наиболее распространен метод Ньютона. Стоит отметить, что методы первого порядка не используют матрицу Гессе, вычисление которой может потребовать значительных вычислительных ресурсов для решения задач большой размерности.

В последние годы идет активное исследование методов оптимизации, построенных на аналогии между градиентным спуском и задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [12, 17, 18, 19, 25, 27, 30, 31, 33, 34, 35]. Наиболее популярными численными методами решения задачи Коши являются методы Рунге – Кутты (РК), которые основаны на разложении решения в ряд Тейлора. Однако, решение можно разложить в ряд по степеням некоторой функции, зависящей от шага метода. Эту задачу можно эффективно решить с помощью разложения Лагранжа – Бюрмана (ЛБ) [5]. Использование нестандартных разложений позволяет получить увеличенную область устойчивости метода и проводить вычисления с бóльшим шагом.

В данной работе построены новые численные методы оптимизации выпуклых функций с использованием методов РК на основе разложения ЛБ, проведено теоретическое исследование методов, а также приведены результаты их применения к задачам из различных областей и проведено сравнение

с другими известными методами.

Целью работы является разработка и анализ новых численных методов минимизации выпуклых функций с использованием методов РК на основе разложения ЛБ. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построение новых градиентных методов,
- получение условий сходимости,
- программная реализация и решение тестовых задач,
- сравнение построенных методов с другими известными методами оптимизации.

Глава 1 посвящена обзору литературы. Рассмотрена аналогия между градиентным спуском и задачей Коши, а также осуществлен обзор статей, связанных с тематикой работы. Представлено семейство методов РК и методы, основанные на разложении ЛБ. Сформулированы цель и задачи работы.

В Главе 2 приводится построение и анализ новых градиентных методов минимизации, сформулированы и доказаны теоремы о сходимости для случая квадратичной и возмущенной квадратичной функции.

В Главе 3 проводится сравнение построенных методов с другими известными методами оптимизации. Рассматриваются задачи из различных областей: краевые задачи для уравнения Пуассона в двумерном и трехмерном случаях; задача минимизации интегрального функционала; краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения и задача логистической регрессии с регуляризацией. По результатам расчетов показано, что построенные методы могут сходиться быстрее, чем широко используемые методы минимизации выпуклых функций.

В заключении приведены основные результаты работы и выводы.

Глава 1. Обзор литературы

Настоящая работа посвящена решению задачи безусловной минимизации выпуклой функции $f(x)$ в пространстве \mathbb{R}^d :

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

В общем случае, получить точное решение такой задачи не представляется возможным. Это связано с тем, что задача минимизации выпуклой функции может быть крайне сложной, особенно при наличии большого количества переменных или структурных особенностей функции. В таких случаях прибегают к численным методам оптимизации, которые позволяют находить приближенное решение задачи. Наиболее популярными являются градиентные методы, основанные на последовательном движении в направлении наибольшего убывания функции. Характерным примером метода такого типа является градиентный спуск:

$$x^{k+1} = x^k - h_k \nabla f(x^k), \quad (1.1)$$

где h_k — шаг, который делается в направлении антиградиента функции f . Процесс спуска продолжается, пока не будет достигнута заданная точность.

Как известно [13, 27], методу (1.1) можно поставить в соответствие следующую задачу Коши:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Точка, в которой $\nabla f(x) = 0$ является точкой минимума функции f . Метод градиентного спуска (1.1) можно рассматривать как явный метод Эйлера для (1.2). Таким образом, для решения задачи минимизации можно использовать численные методы решения задачи Коши, наиболее популярными из которых являются методы РК. В связи с этим в настоящее время такие методы активно применяются для решения оптимизационных задач.

1.1 Явные методы Рунге – Кутты

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = g(u(t)), \quad t > t_0, \quad u(t_0) = u_0. \quad (1.3)$$

Методы РК являются одними из наиболее известных численных методов для решения задачи (1.3). Эти методы обладают высокой точностью и эффективностью, что делает их широко используемым инструментом для различных научных и инженерных приложений.

Методы РК могут быть разделены на две основные категории: явные и неявные методы. В отличие от неявных методов, при использовании которых для получения решения требуется решать систему нелинейных уравнений, в явных методах используются значения правой части только в предыдущие моменты времени. Это делает явные методы более простыми в реализации и эффективными с вычислительной точки зрения, но они имеют ограничения на размер шага интегрирования, вызванные условиями устойчивости.

Для нахождения приближенного решения задачи (1.3) построим на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку с шагом h , которая содержит N узлов. Явные методы РК основаны на вычислении приближенного решения u_{k+1} в узле $t_{k+1} = t_k + h$ в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами [2]:

$$u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^q p_i K_i(h), \quad (1.4)$$

где

$$K_1(h) = hg(u_k),$$
$$K_i(h) = hg\left(u_k + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} K_j(h)\right), \quad i = 2, 3, \dots, q.$$

Метод (1.4) называется явным q -этапным методом РК. Параметры метода p_i, β_{ij} , выбираются так, чтобы разложение в ряд Тейлора локальной погреш-

ности $\delta_q(h)$, задаваемой как:

$$\delta_q(h) = u(x_k + h) - u_k - \sum_{i=1}^q p_i K_i(h), \quad (1.5)$$

начиналось с максимально возможной степени:

$$\delta_q(h) = \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \delta_q^{(s+1)}(0) + o(h^{s+1}).$$

В этом случае говорят, что формула (1.4) с выбранными коэффициентами имеет порядок точности s .

Простейшим примером метода РК является явный метод Эйлера, который представляет собой формулу (1.4) при $q = 1$:

$$u_{k+1} = u_k + hg(u_k). \quad (1.6)$$

Важным свойством численного метода является устойчивость, которая исследуется в случае задачи Далквиста:

$$\dot{y} = \lambda y, \quad y(t_0) = y_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0. \quad (1.7)$$

Численное решение этой задачи после одного шага получается посредством функции $R(z)$, где $z = \lambda h$, которая называется функцией устойчивости данного метода.

Множество S , задаваемое формулой

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}, \quad (1.8)$$

называется областью устойчивости данного метода.

Доказывается [21], что если метод РК имеет порядок точности s , то:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!} + O(z^{s+1}). \quad (1.9)$$

Условие на шаг в случае метода (1.6) имеет вид:

$$0 < h \leq \frac{2}{|\operatorname{Re}(\lambda)|}. \quad (1.10)$$

Из выражения (1.9) становится ясно, что увеличение области устойчивости за счет выбора коэффициентов невозможно, поэтому необходимо изучать другие методы, с бóльшей областью устойчивости (1.8).

1.2 Разложение Лагранжа – Бюрмана

Получить бóльшую область устойчивости методов РК можно за счет использования нестандартного разложения решения задачи Коши. В работе [5] построены явные методы РК с использованием разложения Лагранжа – Бюрмана — разложения по степеням произвольной функции. За счет выбора этой функции можно влиять на такие свойства метода, как положительность, периодичность, устойчивость.

1.2.1 Формула разложения Лагранжа – Бюрмана

Пусть функция $u(t)$ бесконечно дифференцируемая, $v = p(t)$, $v_0 = p(t_0)$, $p'(t_0) \neq 0$.

Формула разложения ЛБ записывается в виде:

$$u(t) = u(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(v - v_0)^m}{m!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[u'(t) \left(\frac{t - t_0}{p(t) - v_0} \right)^m \right] \right\}_{t=t_0}. \quad (1.11)$$

Как можно заметить, при $p(t) = t$ разложение переходит в разложение в ряд Тейлора.

Введем функцию $\varphi(t)$, для которой $t = 0$ — нуль первого порядка, то есть $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$. Тогда формулу (1.11) можно переписать в виде, похожем на формулу Тейлора:

$$u(t) = u(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\varphi(t - t_0)]^m}{m!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[u'(t) \left(\frac{t - t_0}{\varphi(t - t_0)} \right)^m \right] \right\}_{t=t_0}. \quad (1.12)$$

Таким образом, получено разложение функции $u(t)$ в ряд по степеням функции $\varphi(t - t_0)$.

Введем обозначения для коэффициентов перед степенями функции:

$$b_m = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[u'(t) \left(\frac{t - t_0}{\varphi(t - t_0)} \right)^m \right] \right\}_{t=t_0}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В полученных выражениях присутствует неопределенность вида $0/0$. Поэтому итоговое выражение для коэффициентов перед $[\varphi(t - t_0)]^m$ примет вид:

$$b_m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[u'(t) \left(\frac{t - t_0}{\varphi(t - t_0)} \right)^m \right] \right\}_{t=t_0}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В частности, выражения для b_1 и b_2 имеют вид [5]:

$$b_1 = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[u'(t) \frac{t - t_0}{\varphi(t - t_0)} \right] = \frac{u'(t_0)}{\varphi'(0)},$$

$$b_2 = \frac{u''(t_0)}{2[\varphi'(0)]^2} - \frac{u'(t_0)\varphi''(0)}{2[\varphi'(0)]^3}.$$

Таким образом, формула разложения ЛБ (1.12) примет вид:

$$u(t) = u(t_0) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m [\varphi(t - t_0)]^m. \quad (1.13)$$

1.2.2 Явные методы Рунге – Кутты с разложением Лагранжа – Бюрмана

Для построения явных методов РК с использованием разложения ЛБ можно воспользоваться той же схемой, что приведена в 1.1, однако $K_i(h)$ имеют вид:

$$K_1(h) = \varphi_{\xi}(h)g(u_k),$$

$$K_i(h) = \varphi_{\xi}(h)g\left(u_k + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}K_j(h)\right), \quad i = 2, 3, \dots, q, \quad (1.14)$$

где $\xi = 0, \dots, N-1$ — узлы сетки. Для представления локальной погрешности (1.5) в виде ряда по степеням $\varphi_{\xi}(h)$ используется разложение ЛБ (1.13).

Функцию φ_ξ можно менять в разных отрезках сетки, повышая точность и устойчивость метода, однако, если взять одну и ту же функцию φ на каждом промежутке разбиения отрезка $[t_0, T]$, тогда объем вычислений не будет превосходить объем вычислений по классическому методу РК.

Аналогом явного метода Эйлера является метод [5]:

$$u_{k+1} = u_k + \gamma h g(u_k), \quad (1.15)$$

где

$$\gamma = \frac{\varphi(h)}{h\varphi'(0)}.$$

Применяя метод (1.15) к задаче Далквиста (1.7), получим:

$$y_{k+1} = (1 + \gamma h \lambda) y_k.$$

Область устойчивости (1.8) метода (1.15) задается условием $|1 + \gamma z| \leq 1$. Откуда следует следующее ограничение на шаг метода:

$$0 < h \leq \frac{2}{\gamma |\operatorname{Re}(\lambda)|}. \quad (1.16)$$

Сравнив неравенства (1.10) и (1.16), можно заметить, что за счет уменьшения параметра γ можно ослаблять ограничение на величину шага. Большой шаг численного метода позволяет проводить вычисления с меньшими затратами времени и ресурсов.

1.2.3 Метод второго порядка точности

С помощью разложения ЛБ в [5] получены формулы для второго порядка точности:

$$u_{k+1} = u_k + \frac{K_1(h)}{4\varphi'(0)} + \frac{3K_2(h)}{4\varphi'(0)}, \quad (1.17)$$

где

$$K_1(h) = \varphi(h)g(u_k), \quad K_2(h) = \varphi(h)g\left(u_k + \frac{2}{3\varphi'(0)}K_1(h)\right).$$

Если функция $\varphi(h)$ — нечетная, то $\varphi^{(2m)}(h) = 0$, $m = 0, 1, \dots$. Тогда функция $\varphi(h)$ имеет вид:

$$\varphi(h) = \varphi'(0)h + O(h^3) \Leftrightarrow \varphi'(0) = \frac{\varphi(h)}{h} + O(h^2).$$

Заменяя $\varphi'(0)$ в выражении (1.17), получим формулы для модифицированного метода второго порядка:

$$u_{k+1} = u_k + \frac{hK_1(h)}{4\varphi(h)} + \frac{3hK_2(h)}{4\varphi(h)}. \quad (1.18)$$

Полином устойчивости метода (1.18) имеет вид $R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}\gamma z^2$. Область сходимости (1.8) для этой функции устойчивости значительно больше, чем в случае классического метода РК второго порядка.

На рис. 1 представлены область устойчивости классического метода РК второго порядка и метода (1.18) при $\gamma = \frac{3}{4}$.

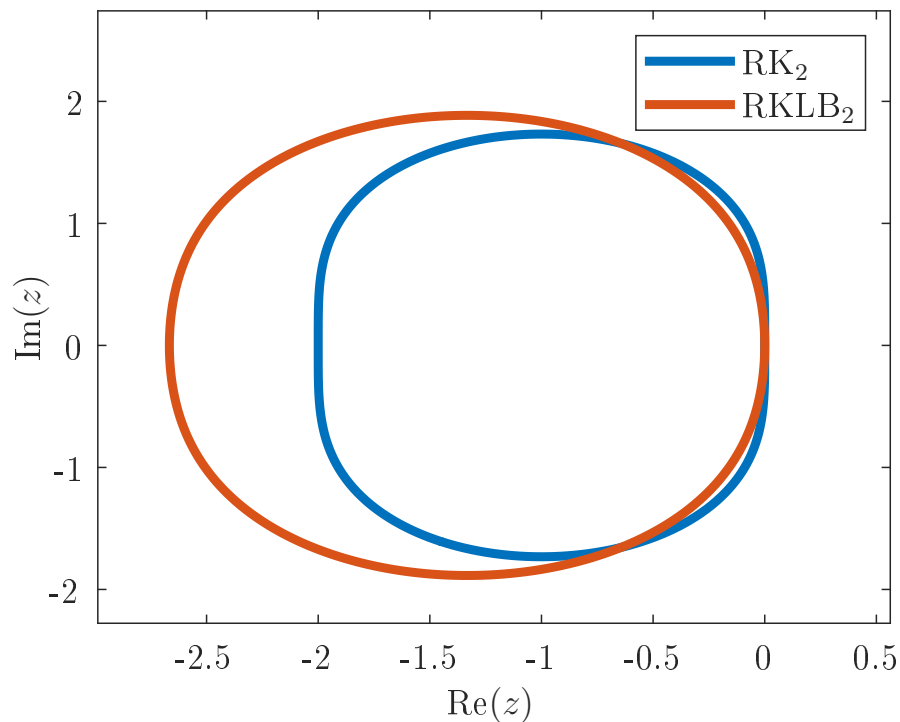


Рис. 1: Области устойчивости методов

1.3 Применение методов Рунге – Кутты к решению оптимизационных задач

В литературе разработано большое число градиентных методов, основанных на методах РК, которые используются для решения широкого круга задач оптимизации. В статье [1] эти методы использовались для нахождения решения задачи минимизации, эквивалентной решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В работе [11] показано, что применение методов, основанных на методах РК, к решению такой задачи приводит к ускорению сходимости. Работа [16] посвящена сравнению явных и неявных методов оптимизации на основе методов РК для решения задач безусловной минимизации. В статье [22] предложены новые квазиньютоновские методы на основе неявных методов РК низких порядков. В работе [27] построены предобусловленные градиентные методы первого порядка, основанные на явных и неявных методах РК. Как показано, условия сходимости разработанных градиентных методов связаны с условиями устойчивости соответствующих методов РК. В работе [32] авторы выводят и исследуют дифференциальное уравнение второго порядка, эквивалентное методу Нестерова. В статьях [33, 34, 35] авторы построили новые ускоренные методы, основанные на применении явных методов РК к модифицированной версии дифференциального уравнения из статьи [32]. Как показано, для класса гладких выпуклых функций с особыми условиями на производные, скорости сходимости этих методов лучше, чем у метода Нестерова.

В работе [25] проведен детальный анализ ускоренных методов градиентного спуска на основе неявных методов РК. В статьях [18, 34] для построения ускоренных методов применяются симплектические методы. В работе [19] предложены методы, основанные на методах РК-Чебышева, которые хорошо приспособлены для решения жестких задач Коши. Сходимость предложенных методов доказана для квадратичных и возмущенных квадратичных функций. Стохастические версии этих методов предложены в статье [31]. В работе [12] предложены методы, основанные на явной схеме Ньюмарка. Показано, что эта схема эквивалентна методу Нестерова и имеет механическую интерпретацию.

1.4 Выводы

На основе проведенного обзора литературы можно сделать следующие выводы:

1. На область устойчивости методов вида (1.4), (1.14) можно влиять за счет варьирования параметров. Это позволяет ослабить ограничения на величину шага численного метода. Таким образом, при использовании таких методов, при расчетах можно производить вычисления с бóльшим шагом, экономя вычислительные ресурсы.

2. Применение методов РК и их модификаций актуально для конструирования градиентных методов для выпуклой оптимизации.

В связи с тем, что методы РК на основе разложения ЛБ позволяют производить расчеты с большим шагом, актуальной является задача построения градиентных методов для решения задач выпуклой оптимизации на основе таких методов. Таким образом, цель настоящей работы состоит в разработке и анализе новых численных методов минимизации выпуклых функций с использованием методов РК на основе разложения ЛБ.

Глава 2. Построение и анализ градиентных методов

В данной главе проведены построение и анализ градиентных методов минимизации на основе методов РК с использованием разложения ЛБ. На первом этапе рассматриваются методы для случая квадратичной функции. В этом случае условия сходимости гарантируют глобальную сходимость к точке минимума, при этом любую достаточно гладкую функцию можно аппроксимировать квадратичной в окрестности точки минимума. Таким образом, полученные условия для квадратичного случая гарантируют локальную сходимость. Отдельно рассмотрено применение методов к возмущенной квадратичной функции, являющейся примером выпуклой неквадратичной функции.

2.1 Случай квадратичной функции

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{1}{2} (x, Ax) - (b, x) + c, \quad (2.1)$$

где A — симметричная и положительно определенная квадратная матрица размера $d \times d$, с собственными значениями $0 < l \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d = L$, b — вектор-столбец размера d , и c — скалярная величина.

Градиент функции (2.1) вычисляется как $\nabla f = Ax - b$. Учитывая свойства функции $f(x)$, задача минимизации имеет единственное решение. Точка минимума может быть найдена из условия $\nabla f(x) = 0$, которое эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений $Ax = b$.

Задача Коши (1.2) для (2.1) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -(Ax - b), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

2.1.1 Одношаговый метод

Метод второго порядка точности (1.18), примененный к задаче Коши (2.2) имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - hD(\gamma, h)\nabla f(x^k), \quad (2.3)$$

где $D(\gamma, h) = E - \frac{\gamma h}{2}A$.

Метод (2.3) является одношаговым, т.е. для получения решения на текущем шаге требуется решение только на предыдущем шаге. Справедлива следующая теорема о сходимости метода (2.3):

Теорема 1 Пусть выполняются условия: $0 < h < \frac{2}{\gamma L}$, $\frac{1}{4} < \gamma \leq 1$.

Тогда:

1) Последовательность $\{x^k\}$, получаемая по (2.3), является минимизирующей для $f(x)$ и сходится к точке минимума x^* .

2) Справедливо неравенство:

$$\|x^k - x^*\| \leq q^k \|x^0 - x^*\|, \quad (2.4)$$

где $q = \max_i \left| 1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2}\lambda_i^2 \right|$.

3) Оптимальное значение q имеет вид:

$$q^* = \frac{(L-l)^2}{l^2 + 6lL + L^2},$$

и достигается при следующих значениях h и γ :

$$h^* = \frac{8(l+L)}{l^2 + 6lL + L^2}, \quad \gamma^* = \frac{l^2 + 6lL + L^2}{4(l+L)^2}.$$

Доказательство.

1) Покажем, что метод является методом спуска, то есть, выполняется неравенство $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $\forall k$.

Собственные значения матрицы D равны $1 - \frac{\gamma h}{2}\lambda_i$. Учитывая ограниче-

ние на шаг h , получим:

$$1 - \frac{\gamma h}{2} \lambda_i \geq 1 - \frac{\gamma h}{2} L > 0, \quad (2.5)$$

то есть, матрица D является положительно определенной. Также она является симметричной, в силу симметричности матрицы A .

Рассмотрим разность функции на двух последовательных шагах:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) - f(x^k) &= -h \left(D \nabla f(x^k), Ax^k \right) + \frac{h^2}{2} \left(D \nabla f(x^k), AD \nabla f(x^k) \right) + \\ &h \left(b, D \nabla f(x^k) \right) = \frac{h^2}{2} \left(D \nabla f(x^k), AD \nabla f(x^k) \right) - h \left(\nabla f(x^k), D \nabla f(x^k) \right) = \\ &-h \left(\nabla f(x^k), D \left(E - \frac{h}{2} AD \right) \nabla f(x^k) \right). \end{aligned}$$

Полученное выражение будет отрицательным, если матрица $D \left(E - \frac{h}{2} AD \right)$ — положительно определенная. Собственные значения этой матрицы равны

$$\left(1 - \frac{\gamma h}{2} \lambda_i \right) \left(1 - \frac{h}{2} \lambda_i \left(1 - \frac{\gamma h}{2} \lambda_i \right) \right) = \left(1 - \frac{\gamma h}{2} \lambda_i \right) \left(1 - \frac{h}{2} \lambda_i + \frac{\gamma h^2}{4} \lambda_i^2 \right),$$

где первый множитель положителен в силу (2.5). Второй множитель также положителен:

$$1 - \frac{h}{2} \lambda_i + \frac{\gamma h^2}{4} \lambda_i^2 > 0 \Leftrightarrow (\gamma h \lambda_i - 1)^2 + (4\gamma - 1) > 0, \quad (2.6)$$

которое выполняется в силу ограничений на параметр γ . Таким образом, метод (2.3) является методом спуска.

2) Покажем, что метод сходится. Перепишем метод (2.3) в виде:

$$x^{k+1} = Bx^k + C, \quad (2.7)$$

где

$$B = E - hA + \frac{\gamma h^2}{2} A^2, \quad C = bhD.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости метода (2.7) является условие [4]: $r(B) < 1$, где $r(B)$ — спектральный радиус матрицы B . Собственные значения этой матрицы равны $1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2}\lambda_i^2$, так что условие сходимости примет вид:

$$-1 < 1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2}\lambda_i^2 < 1, \quad \forall i. \quad (2.8)$$

Покажем выполнение правой части неравенства (2.8):

$$1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2}\lambda_i^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma h}{2}\lambda_i < 1 \Leftrightarrow h < \frac{2}{\gamma\lambda_i} \leq \frac{2}{\gamma L}.$$

Покажем выполнение левой части неравенства (2.8):

$$1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2}\lambda_i^2 > -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{h}{2}\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{4}\lambda_i^2 > 0.$$

Как можно видеть, это неравенство совпадает с (2.6). Таким образом, метод (2.7) (а значит и метод (2.3)) сходится.

3) Покажем, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, т.е. выполняется неравенство (2.4). Точка минимума x^* является неподвижной точкой, то есть:

$$x^* = Bx^* + C.$$

Рассмотрим разность

$$x^k - x^* = B(x^{k-1} - x^*) \Leftrightarrow \|x^k - x^*\| = \|B(x^{k-1} - x^*)\| \leq \|B\| \cdot \|x^{k-1} - x^*\|. \quad (2.9)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\tau) = 1 - h\tau + \frac{\gamma h^2}{2}\tau^2.$$

В силу симметричности матрицы A

$$\lambda(\Phi(A)) = \Phi(\lambda(A)).$$

Так как матрица A является симметричной и положительно определенной, верны следующие выражения для нормы матриц [3]:

$$\|A\| = \max_i \lambda_i(A), \quad \|\Phi(A)\| = \max_i |\Phi(\lambda_i(A))| = q.$$

Покажем выполнение неравенства

$$\|x^k - x^*\| \leq q^k \|x^0 - x^*\|. \quad (2.10)$$

При $k = 1$ (2.10) имеет вид:

$$\|x^1 - x^*\| \leq q \|x^0 - x^*\|,$$

которое выполняется по (2.9). Пусть (2.10) верно для $k = s$:

$$\|x^s - x^*\| \leq q^s \|x^0 - x^*\|.$$

Покажем, что тогда (2.10) выполняется и для $k = s + 1$:

$$\|x^{s+1} - x^*\| \leq \|\Phi(A)\| \cdot \|x^s - x^*\| \leq q \cdot q^s \|x^0 - x^*\| = q^{s+1} \|x^0 - x^*\|.$$

Таким образом, метод (2.3) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q .

4) Найдем оптимальные параметры метода, при которых q принимает наименьшее значение. На спектре матрицы A справедливо неравенство

$$q = \max_i |\Phi(\lambda_i)| \leq \max_{\tau \in [l, L]} |\Phi(\tau)|.$$

Для минимизации q нужно найти многочлен $\tilde{\Phi}$ при котором достигается минимальное значение правой части неравенства. При этом верно равенство

$$\Phi(0) = \tilde{\Phi}(0) = 1.$$

Известно, что на отрезке $[-1, 1]$ эту задачу можно решить с помощью

полиномов Чебышева [9]. Сделаем преобразование отрезка $[l, L]$ в $[-1, 1]$, с использованием замены $z = a\tau + b$, $z \in [-1, 1]$, $\tau \in [l, L]$, где

$$a = \frac{2}{L-l}, \quad b = -\frac{L+l}{L-l}.$$

Тогда

$$\Psi(z) = \Phi\left(\frac{z-b}{a}\right), \quad \Psi(b) = 1.$$

Таким образом, задача нахождения полинома $\tilde{\Phi}$ такого, что:

$$\tilde{\Phi} = \arg \min \left(\max_{\tau \in [l, L]} |\Phi(\tau)| \right), \quad \Phi(0) = 1.$$

сводится к задаче нахождения $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\Psi} = \arg \min \left(\max_{z \in [-1, 1]} |\Psi(z)| \right), \quad \Psi(b) = 1.$$

Известно, что решение этой задачи имеет вид [9]:

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{T_2(z)}{T_2(b)} \Rightarrow \tilde{\Phi}(\tau) = \frac{T_2(a\tau + b)}{T_2(b)},$$

где T_2 — полином Чебышева второй степени, равный $T_2(x) = 2x^2 - 1$,

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \frac{T_2(a\tau + b)}{T_2(b)} = \frac{2a^2\tau^2 + 4ab\tau + 2b^2 - 1}{2b^2 - 1} = \frac{2a^2}{2b^2 - 1}\tau^2 + \frac{4ab}{2b^2 - 1}\tau + 1.$$

Пользуясь полученными выражениями для a и b , а также видом полинома

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \frac{\gamma^*(h^*)^2}{2}\tau^2 - h^*\tau + 1,$$

получим, что:

$$h^* = \frac{8(l+L)}{l^2 + 6lL + L^2}, \quad \gamma^* = \frac{l^2 + 6lL + L^2}{4(l+L)^2}.$$

Заметим, что

$$h^* = \frac{2}{\gamma^*(l+L)} < \frac{2}{\gamma^*L},$$

то есть, полученное значение удовлетворяет условию теоремы.

Теперь найдем

$$q^* = \max_{\tau \in [l, L]} |\tilde{\Phi}(\tau)|.$$

Заметим, что

$$b = -\frac{L+l}{L-l} = -\frac{L-l+2l}{L-l} = -1 - \frac{2l}{L-l} < -1. \quad (2.11)$$

Из неравенства (2.11) следует, что $2b^2 - 1 > 1$, а тогда $\tilde{\Phi}(\tau)$ — парабола с ветвями вверх. Значит q^* находится в вершине параболы или на ее концах. Вершина параболы располагается в точке $\tau_0 = (L+l)/2$.

Найдем значения полинома в этих точках:

$$\tilde{\Phi}(l) = \frac{8}{L^2 + 6Ll + l^2}l^2 - \frac{8(l+L)}{L^2 + 6Ll + l^2}l + 1 = 1 - \frac{8lL}{L^2 + 6Ll + l^2},$$

$$\tilde{\Phi}(L) = \frac{8}{L^2 + 6Ll + l^2}L^2 - \frac{8(l+L)}{L^2 + 6Ll + l^2}L + 1 = 1 - \frac{8lL}{L^2 + 6Ll + l^2},$$

$$\tilde{\Phi}(\tau_0) = \frac{2}{L^2 + 6Ll + l^2}(l+L)^2 - \frac{4(l+L)}{L^2 + 6Ll + l^2}(l+L) + 1 = 1 - \frac{2(l+L)^2}{L^2 + 6Ll + l^2}.$$

При этом заметим, что:

$$\tilde{\Phi}(l) = \tilde{\Phi}(L) = 1 - \frac{8lL}{L^2 + 6Ll + l^2} = \frac{l^2 - 2lL + L^2}{L^2 + 6Ll + l^2} = \frac{(L-l)^2}{L^2 + 6Ll + l^2},$$

$$\tilde{\Phi}(\tau_0) = 1 - \frac{2(l+L)^2}{L^2 + 6Ll + l^2} = \frac{-l^2 + 2lL - L^2}{L^2 + 6Ll + l^2} = -\frac{(L-l)^2}{L^2 + 6Ll + l^2}.$$

То есть полином $|\tilde{\Phi}(\tau)|$ имеет равные значения на концах отрезка $[l, L]$ и в его середине.

Таким образом, найдено оптимальное значение параметра q :

$$q^* = \frac{(L-l)^2}{L^2 + 6Ll + l^2},$$

что завершает доказательство теоремы.

2.1.2 Двухшаговый метод

Рассмотрим метод на основе метода тяжелого шарика:

$$x^{k+1} = x^k - hD(h, \gamma)\nabla f(x^k) + \beta(x^k - x^{k-1}), \quad (2.12)$$

где β — это параметр инерции, используемый для ускорения сходимости. Справедлива следующая теорема о сходимости метода (2.12):

Теорема 2 Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $0 < h < \frac{2}{\gamma L}$.
- 2) $\beta \in [0, 1)$, $\beta > \left(1 - \sqrt{\psi(h, \lambda; \gamma)}\right)^2$, $\forall \lambda \in [l, L]$, где $\psi(h, \lambda; \gamma) = h\lambda\left(1 - \frac{\gamma h}{2}\lambda\right)$.

3) На параметр γ ставится условие

$$\gamma > \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{1+\kappa} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 / 4, \quad \kappa = L/l \geq 14. \quad (2.13)$$

Тогда метод (2.12) линейно сходится к точке минимума, при оптимальной скорости сходимости

$$\rho^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}},$$

которая достигается при следующих значениях h и β :

$$h^* = \frac{2}{\gamma(l+L)}, \quad \beta^* = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}}\right)^2. \quad (2.14)$$

Доказательство.

1) Преобразуем (2.12) к одношаговому методу. Рассмотрим разность

$$x^{k+1} - x^* = x^k - x^* - hD\left((Ax^k - b) - (Ax^* - b)\right) +$$

$$\beta\left((x^k - x^*) - (x^{k-1} - x^*)\right) = (E - hDA + \beta E)(x^k - x^*) - \beta(x^{k-1} - x^*).$$

Это равенство можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} - x^* \\ x^k - x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - hDA + \beta E & -\beta E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k - x^* \\ x^{k-1} - x^* \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Введем обозначения

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k - x^* \\ x^{k-1} - x^* \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} (1 + \beta)E - hDA & -\beta E \\ E & O \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (2.15) примет вид $z^{k+1} = Tz^k$. Необходимым и достаточным условием сходимости является $r(T) < 1$ [4].

Матрицу A можно представить через спектральное разложение в виде $A = S\Lambda S^T$, где Λ — матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы A , а S — матрица из собственных векторов, которая также является ортогональной, то есть, выполняется равенство

$$SS^T = S^T S = E_{d \times d}.$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S & O_{d \times d} \\ O_{d \times d} & S \end{pmatrix}, \quad \Sigma^T = \begin{pmatrix} S^T & O_{d \times d} \\ O_{d \times d} & S^T \end{pmatrix}, \quad \bar{T} = \Sigma^T T \Sigma.$$

Тогда

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} (1 + \beta)E_{d \times d} - \Psi(h, \Lambda; \gamma) & -\beta E_{d \times d} \\ E_{d \times d} & O_{d \times d} \end{pmatrix},$$

где

$$\Psi(h, \tau; \gamma) = h\tau \left(1 - \frac{\gamma h}{2} \tau \right), \quad \tau \in [l, L].$$

Собственные значения матрицы T такие же, как у \bar{T} , и могут быть найдены из уравнения $\det(\bar{T} - \zeta E_{2d \times 2d}) = 0$. Матрицу можно переписать в виде

$$\bar{T} - \zeta E_{2d \times 2d} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\bar{T}_{11} = (1 + \beta - \zeta)E_{d \times d} - \Psi(h, \Lambda; \gamma)$, $\bar{T}_{12} = -\beta E_{d \times d}$, $\bar{T}_{21} = E_{d \times d}$, $\bar{T}_{22} = -\zeta E_{d \times d}$. Определитель этой матрицы можно вычислить по правилу [6]:

$$\det(\bar{T} - \zeta E_{2d \times 2d}) = \det(\bar{T}_{11}) \det(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{21} \bar{T}_{11}^{-1} \bar{T}_{12}) =$$

$$\det(\bar{T}_{11}) \det \begin{pmatrix} \frac{\beta}{1 + \beta - \zeta - \Psi(h, \lambda_1; \gamma)} - \zeta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{1 + \beta - \zeta - \Psi(h, \lambda_2; \gamma)} - \zeta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\beta}{1 + \beta - \zeta - \Psi(h, \lambda_d; \gamma)} - \zeta \end{pmatrix} =$$

$$(\beta - \zeta(1 + \beta - \Psi(h, \lambda_1; \gamma) - \zeta)) \cdot \dots \cdot (\beta - \zeta(1 + \beta - \Psi(h, \lambda_d; \gamma) - \zeta)).$$

Рассмотрим матрицу \tilde{T} вида

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & O_{2 \times 2} & \dots & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & \tilde{T}_2 & \dots & O_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & \dots & \tilde{T}_d \end{pmatrix},$$

где матрицы \tilde{T}_i представляются в виде

$$\tilde{T}_i = \begin{pmatrix} 1 + \beta - \Psi(h, \lambda_i; \gamma) & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения \tilde{T} можно найти из уравнения $\det(\tilde{T} - \zeta E_{2d \times 2d}) = 0$. Как известно, определитель этой блочно-диагональной матрицы можно вычислить как [6]:

$$\det(\tilde{T} - \zeta E_{2d \times 2d}) = \det(\tilde{T}_1 - \zeta E_{2 \times 2}) \cdot \dots \cdot \det(\tilde{T}_d - \zeta E_{2 \times 2}).$$

Можно заметить, что выражения для определителей матриц $\bar{T} - \zeta E_{2d \times 2d}$ и $\tilde{T} - \zeta E_{2d \times 2d}$ совпадают, а значит равны и собственные значения матриц \bar{T} , \tilde{T} и T . Таким образом, для исследования собственных значений матрицы T можно рассматривать собственные значения матриц \tilde{T}_i , которые составляют спектр матрицы \tilde{T} .

2) Перейдем к исследованию собственных значений матрицы \tilde{T}_i , которые можно найти из квадратного уравнения

$$\rho^2 - \rho(1 + \beta - \Psi) + \beta = 0, \quad (2.16)$$

корни которого равны

$$\rho_{1,2} = \frac{1 + \beta - \Psi \pm \sqrt{(1 + \beta - \Psi)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Найдем, когда дискриминант уравнения (2.16) отрицателен:

$$D = (1 + \beta - \Psi)^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{\beta} < 1 + \beta - \Psi < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$$

$$(1 + \sqrt{\beta})^2 > \Psi > (1 - \sqrt{\beta})^2 \stackrel{\beta \in [0,1]}{\Leftrightarrow} 1 + \sqrt{\beta} > \sqrt{\Psi} > 1 - \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \beta > (1 - \sqrt{\Psi})^2.$$

Заметим, что $\Psi(h, \tau; \gamma) = h\tau \left(1 - \frac{\gamma h}{2}\tau\right) > 0$ при $h < \frac{2}{\gamma L}$. Найдем, при каких значениях $\sqrt{\Psi} < 2$:

$$\sqrt{\Psi} < 2 \Leftrightarrow h\tau \left(1 - \frac{\gamma h}{2}\tau\right) < 4. \quad (2.17)$$

Наибольшее значение левой части неравенства достигается при $\tau_0 = 1/(h\gamma)$ и равняется $1/(2\gamma)$. Таким образом, неравенство (2.17) будет выполнено при $\gamma > 1/8$.

По условию теоремы

$$\gamma > \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{1 + \kappa} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 / 4 = \left(\frac{2\kappa}{(1 + \kappa)^2} + \frac{2\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa} + \frac{1}{2}\right) / 4 > 1/8,$$

при $\kappa > 0$. Таким образом, условия на параметры влекут за собой отрицательность дискриминанта уравнения (2.16).

Заметим, что при условиях теоремы выполняется неравенство $|\rho_{1,2}| < 1$:

$$|\rho_{1,2}| = \frac{|1 + \beta - \Psi \pm i\sqrt{-D}|}{2} = \frac{\sqrt{(1 + \beta - \Psi)^2 - D}}{2} = \sqrt{\beta} < 1.$$

Линейная сходимость метода (2.12) следует из [8]. Скорость сходимости определяется спектральным радиусом матрицы T , который равен $\sqrt{\beta}$:

$$\|x^k - x^*\| \leq (\sqrt{\beta} + \varepsilon_k)^k \|x^0 - x^*\|,$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

3) Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \left(1 - \sqrt{t \left(1 - \frac{\gamma t}{2}\right)}\right)^2,$$

где $t = h\tau$ и $t \in [hl, hL]$. Подкоренное выражение будет неотрицательным при $t \in [0, 2/\gamma]$. Заметим, что $\varphi(0) = \varphi(2/\gamma) = 1$. Производная φ равна

$$\varphi'(t) = -\left(1 - \sqrt{t - \frac{\gamma t^2}{2}}\right) \left(\frac{1 - \gamma t}{\sqrt{t - \frac{\gamma t^2}{2}}}\right).$$

Учитывая вид φ' , максимальное значение $\varphi(t)$ достигается на концах отрезка или в $t_0 = 1/\gamma$. Значение функции φ в точке t_0 равняется

$$\varphi\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2\gamma}}\right)^2,$$

и будет меньше 1 при $\gamma > 1/8$.

Рассмотрим случай, когда максимальное значение достигается на границе, то есть:

$$\max\{\varphi(hl), \varphi(hL)\} > \varphi\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2\gamma}}\right)^2.$$

Для нахождения оптимального значения параметра $h = h^*$ найдем минимум функции $\max\{\varphi(hl), \varphi(hL)\}$, который достигается в точке пересече-

ния функций $\left(1 - \sqrt{\Psi(h, l; \gamma)}\right)^2$ и $\left(1 - \sqrt{\Psi(h, L; \gamma)}\right)^2$:

$$\left(1 - \sqrt{hl - \frac{\gamma(hl)^2}{2}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{hL - \frac{\gamma(hL)^2}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$hl - \frac{\gamma(hl)^2}{2} = hL - \frac{\gamma(hL)^2}{2}.$$

Отсюда получим, что оптимальное значение параметра h равняется

$$h^* = \frac{2}{\gamma(l+L)}.$$

Значение функции Ψ на границе при найденном значении параметра вычисляется как:

$$\Psi(h^*, L; \gamma) = h^*L - \frac{\gamma(h^*)^2L^2}{2} = \frac{2L}{\gamma(l+L)} - \frac{2L^2}{\gamma(l+L)^2} = \frac{2lL}{\gamma(l+L)^2}.$$

Оптимальное значение параметра β равняется

$$\beta^* = \left(1 - \sqrt{\Psi(h^*, L; \gamma)}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2lL}{\gamma(l+L)^2}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa+1}}\right)^2.$$

Найдем, при каком значении параметра κ выполняется неравенство $1 - \sqrt{\Psi(h^*, L; \gamma)} > 0$.

$$1 - \sqrt{\Psi(h^*, L; \gamma)} = 1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa+1}} > 0 \Leftrightarrow \gamma > \frac{2\kappa}{(1+\kappa)^2},$$

с учетом того, что $\gamma > \frac{1}{8}$, приходим к неравенству

$$\kappa^2 - 14\kappa + 1 > 0,$$

которое выполняется при $\kappa > 7 + \sqrt{45} \approx 13.71$.

Найдем, при каком значении параметра γ выполняется неравенство:

$$\beta^* > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^2. \quad (2.18)$$

Введем параметры

$$a = \frac{\sqrt{2\kappa}}{1 + \kappa}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Тогда неравенство (2.18) примет вид:

$$(1 - a\nu)^2 > (1 - b\nu)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)\nu > 2(a - b). \quad (2.19)$$

Заметим, что $a < b$ при $\kappa > 1$. Тогда (2.19) преобразуется в

$$(a + b)\nu < 2 \Leftrightarrow \nu < \frac{2}{a + b} \Leftrightarrow \gamma > \frac{(a + b)^2}{4} = \gamma > \left(\frac{\sqrt{2\kappa}}{1 + \kappa} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 / 4,$$

которое совпадает с (2.13).

Таким образом, была доказана сходимость метода (2.12) и найдены оптимальные значения параметров численного метода.

Замечание 1. Любую достаточно гладкую функцию в окрестности точки минимума x^* можно представить в виде:

$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{1}{2} \left(\nabla^2 f(x^*) (x - x^*), (x - x^*) \right).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{L}{2} \|x^k - x^*\|^2,$$

где $L = \max_{x \in \mathbb{R}^d} \text{eig}(\nabla^2 f(x))$. Если $\exists \delta > 0 : \|x^0 - x^*\| < \delta$, тогда для метода (2.3) с матрицей $A = \nabla^2 f(x^*)$ имеет место следующее неравенство (см. (2.4)):

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{q^{2k} L}{2} \delta^2,$$

а для метода (2.12) с той же матрицей выполняется неравенство [8, 20]:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{(\rho + \varepsilon)^{2k} L}{2} \delta^2, \quad \varepsilon \in (0, 1 - \rho),$$

где ρ — спектральный радиус матрицы T .

2.2 Случай возмущенной квадратичной функции

Перейдем к анализу метода в случае возмущенной квадратичной функции:

$$f(x) = \frac{1}{2} (x, Ax) + g(x), \quad (2.20)$$

где выпуклая функция $g(x)$ мала по сравнению с квадратичным членом и поставлены условия:

1) градиент удовлетворяют условию Липшица:

$$\exists \Theta > 0 : \quad \|\nabla g(x) - \nabla g(y)\| \leq \Theta \|x - y\|, \quad \forall x, y,$$

2) выполняются неравенства:

$$\|\nabla^{(i)} g(x)\| \ll 1, \quad i = 2, 3, \dots$$

Тогда в окрестности произвольной точки \tilde{x} функцию g можно представить в виде

$$g(x) \approx g(\tilde{x}) + (\nabla g(\tilde{x}), x - \tilde{x}).$$

Градиент функции f в окрестности точки \tilde{x} равняется

$$\nabla f(x) = Ax + \nabla g(\tilde{x}). \quad (2.21)$$

Задача Коши (1.2) для (2.20) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -(Ax + \nabla g), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.22)$$

Метод второго порядка точности (1.18), примененный к (2.22) имеет вид:

$$x^{k+1} = \left(E - hA + \frac{\gamma h^2}{2} A^2 \right) x^k + h \left(\frac{\gamma h}{2} A - E \right) \nabla g(x^k). \quad (2.23)$$

Теорема 3 Пусть выполняются условия:

$$h < \frac{2}{\gamma L}, \quad \gamma > \frac{1}{4}, \quad \frac{8\Theta}{L} < 1, \quad \rho \in \left(0, 1 - \frac{8\Theta}{L} \right),$$

где $\rho = \max_i \left| 1 - h\lambda_i + \frac{\gamma h^2}{2} \lambda_i^2 \right|$.

Тогда метод (2.23) является методом спуска, который сходится со скоростью геометрической прогрессии: $\|x^k - x^*\| \leq \left(\rho + \frac{8\Theta}{L} \right)^k \|x^0 - x^*\|$.

Доказательство.

Так как x^* — точка минимума, то $\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow Ax^* + \nabla g(x^*) = 0$.

Тогда метод (2.23) может быть переписан в виде:

$$x^{k+1} - x^* = Bx^k - hD\nabla g(x^k) \pm Bx^* + hD(Ax^* + \nabla g(x^*)), \quad (2.24)$$

где $B = E - hA + \frac{\gamma h^2}{2} A^2$, $D = E - \frac{\gamma h}{2} A$.

Используя, что $B - E = -hA + \frac{\gamma h^2}{2} A^2$, $hDA = hA - \frac{\gamma h^2}{2} A^2$, перепишем (2.24) в виде:

$$x^{k+1} - x^* = B(x^k - x^*) + hD \left(\nabla g(x^*) - \nabla g(x^k) \right).$$

Отсюда, учитывая, что $\|B\| = \rho < 1$, $\|D\| < 1$, получим:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq (\rho + h\Theta) \|x^k - x^*\| < \left(\rho + \frac{8\Theta}{L} \right) \|x^k - x^*\|,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Учитывая ограничения на функцию (2.20), можно считать, что $\nabla^2 f(x) \approx A$. Тогда минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\nabla^2 f(x)$ можно приближенно считать равными соответственно минимальному и максимальному собственному значению матрицы A . Та-

ким образом, при выполнении расчетов, связанных с задачей минимизации функции (2.20), метод (2.3) можно применять с оптимальными параметрами, найденными для случая квадратичной функции с матрицей A . Аналогично, метод (2.12) можно использовать с оптимальными параметрами. В обоих случаях градиент функции f вычисляется по формуле (2.21).

2.3 Результаты

В рамках настоящей главы получены были получены следующие результаты:

1. Построены одно- и двухшаговые методы минимизации выпуклой функции.
2. Доказаны теоремы о сходимости методов (2.3) и (2.12) для минимизации квадратичной функции. Доказана теорема о сходимости метода (2.3) в случае возмущенной квадратичной функции и указаны условия применения метода (2.12) для решения такой задачи.
3. Получены аналитические выражения для оптимальных параметров методов (2.3) и (2.12) в случае минимизации квадратичной функции.

Глава 3. Решение задач

В настоящей главе проводится сравнение построенных методов с другими известными методами минимизации при решении тестовых задач. Рассмотрены задачи из различных областей: краевые задачи для уравнения Пуассона в двумерном и трехмерном случаях; задача минимизации интегрального функционала; краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения и задача логистической регрессии. В качестве методов для сравнения рассматривались следующие методы минимизации:

1) метод градиентного спуска (GD) [8, 26]:

$$x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k), \quad h_{opt} = \frac{2}{L+l}, \quad \rho_{opt} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}.$$

2) метод тяжелого шарика Поляка (НВ) [8]:

$$x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k) + \beta(x^k - x^{k-1}),$$
$$h_{opt} = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{l})^2}, \quad \beta_{opt} = \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^2, \quad \rho_{opt} = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}.$$

3) ускоренный метод Нестерова для выпуклой функции, градиент которой удовлетворяет условию Липшица (NAG) [24, 26]:

$$x^{k+1} = y^k - h\nabla f(y^k), \quad y^k = x^k + \beta(x^k - x^{k-1}),$$

$$h_{opt} = \frac{1}{L}, \quad \beta_{opt} = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}, \quad \rho_{opt} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}.$$

4) метод сопряженных градиентов для квадратичной функции (CGM) [7], который задается следующим алгоритмом:

$$p_0 = r_0 = b - Ax_0,$$

$$r_{k+1} = r_k - \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)} Ap_k, \quad x^{k+1} = x^k + \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)} p_k,$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)} p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3.1 Решение двумерной задачи для уравнения Пуассона

Рассмотрим решение задачи для уравнения Пуассона в квадрате с нулевыми граничными условиями первого рода:

$$\Delta u = -xy, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1].$$

Точное решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \operatorname{sh}(\pi n)} (\operatorname{sh}(\pi n y) - y \operatorname{sh}(\pi n)).$$

Построим равномерную сетку с шагом h по обоим переменным, имеющую $N \times N$ внутренних узлов. Применение метода конечных разностей сводит задачу к решению СЛАУ:

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} = -x_i y_j h^2.$$

На рис. 2 приведен портрет матрицы этой системы. Как видно из структуры матрицы, ее элементы преимущественно нулевые, то есть, она является разреженной. На рис. 3 приведены графики зависимости логарифма нормы погрешности от номера итерации. Как можно заметить, метод на основе разложения ЛБ (LB), сходится к точке минимума быстрее, чем метод градиентного спуска. Ускоренный метод (HBLB) сходится за число шагов, приблизительно равное числу шагов, которое требуется CGM, являющимся одним из самых быстрых методов минимизации квадратичных функций.

В таблице 1 приведено количество шагов и время работы, которые потребовались ускоренным методам минимизации квадратичных функций для достижения u^* с нужной точностью. Как можно видеть, построенный метод HBLB сошелся за приблизительно равное время с CGM, а на задаче с большой размерностью оказался быстрее других методов. Вычисления производились в программе Matlab R2023a на персональном компьютере с следующими характеристиками: Intel(R) Core(TM) i7-13700k 5.4 ГГц, 32 Гб ОЗУ. При вычислениях критерием останова являлось условие $\|u^k - u^*\| < eps$, где eps — точность метода. Начальное приближение бралось в виде $u^0 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

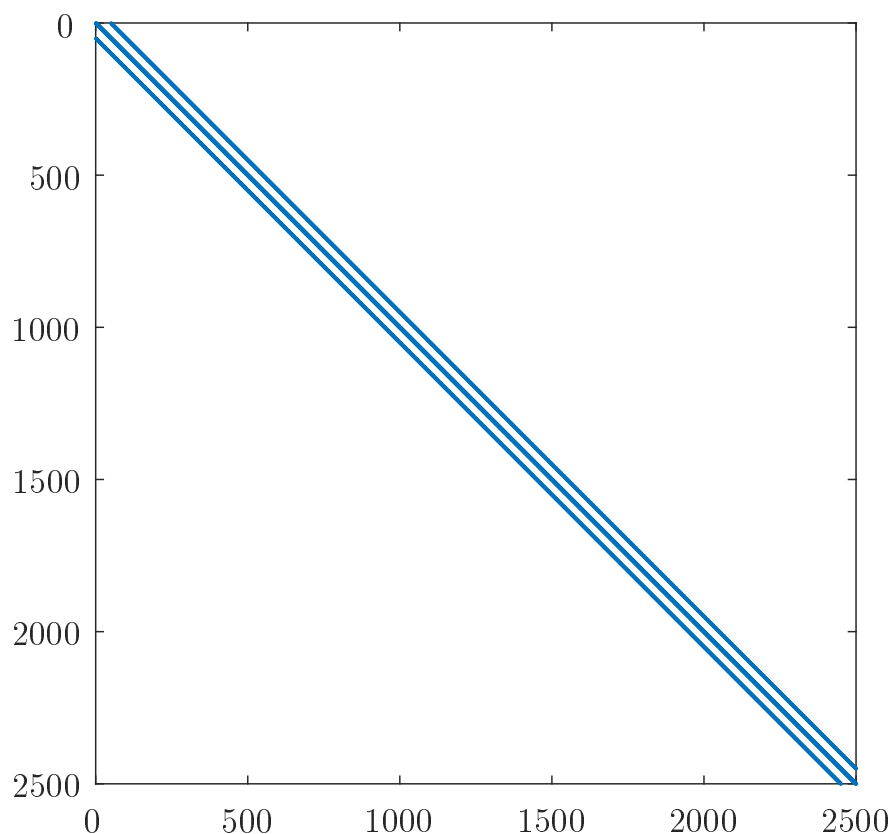


Рис. 2: Портрет матрицы системы при $N = 50$

Таблица 1: Количество шагов и время работы (в секундах) ускоренных методов при решении задачи для уравнения Пуассона в двумерном случае при $eps = 10^{-3}$

Метод \ N	500		1000		2000	
	Шаги	Время	Шаги	Время	Шаги	Время
CGM	864	10.28	1807	91.69	3767	758.06
HB	1763	14.28	3761	132.91	8006	1089.59
NAG	3519	30.63	7514	276.17	16005	2326.79
HBLB	899	10.76	1917	103.62	4082	703.27

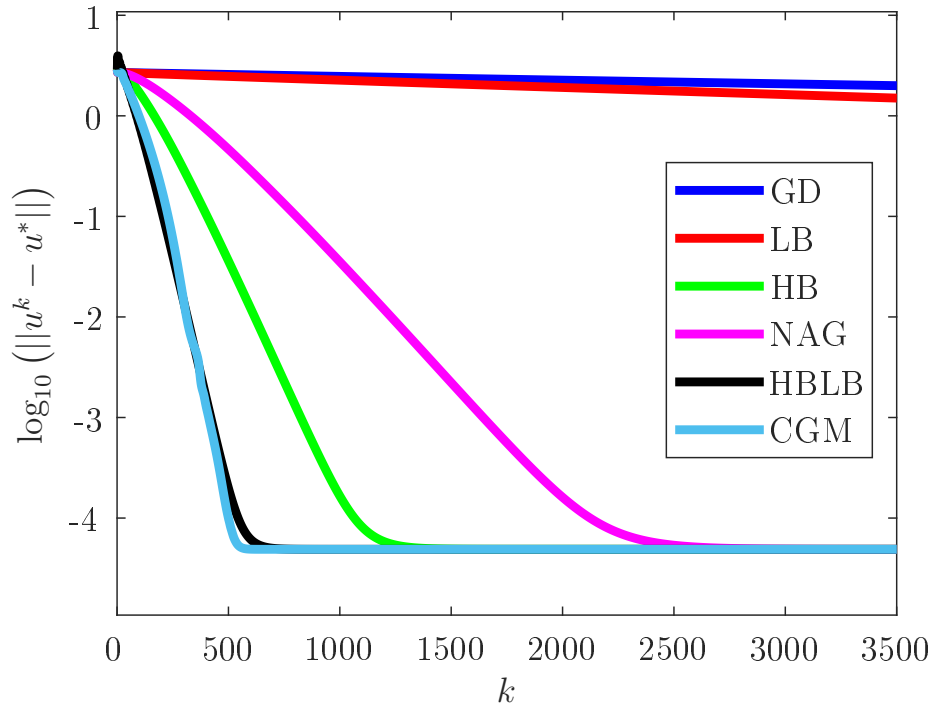


Рис. 3: График зависимости логарифма нормы погрешности от k при решении задачи для уравнения Пуассона в двумерном случае при $N = 250$

3.2 Решение трехмерной задачи для уравнения Пуассона

Рассмотрим уравнение Пуассона в кубе с нулевыми граничными условиями первого рода:

$$\Delta u = -\sin(\pi y) \sin(\pi z), \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, 1].$$

Точное решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(x, y, z) = \frac{\sin(\pi y) \sin(\pi z)}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\text{sh}(\sqrt{2}\pi x) + \text{sh}(\sqrt{2}\pi(1-x))}{\text{sh}(\pi\sqrt{2})} \right).$$

В этом случае сетка, построенная с шагом h в трехмерном единичном кубе имеет N^3 внутренних узлов. Система линейных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют значения решения в узлах сетки, получается аналогично двумерному случаю. Начальное приближение выбрано таким же, как в предыдущей задаче. На рис. 4 приведен график зависимости логарифма нормы погрешности от номера итерации. Как можно видеть, для всех методов уменьшение погрешностей происходит аналогично двумерной задаче.

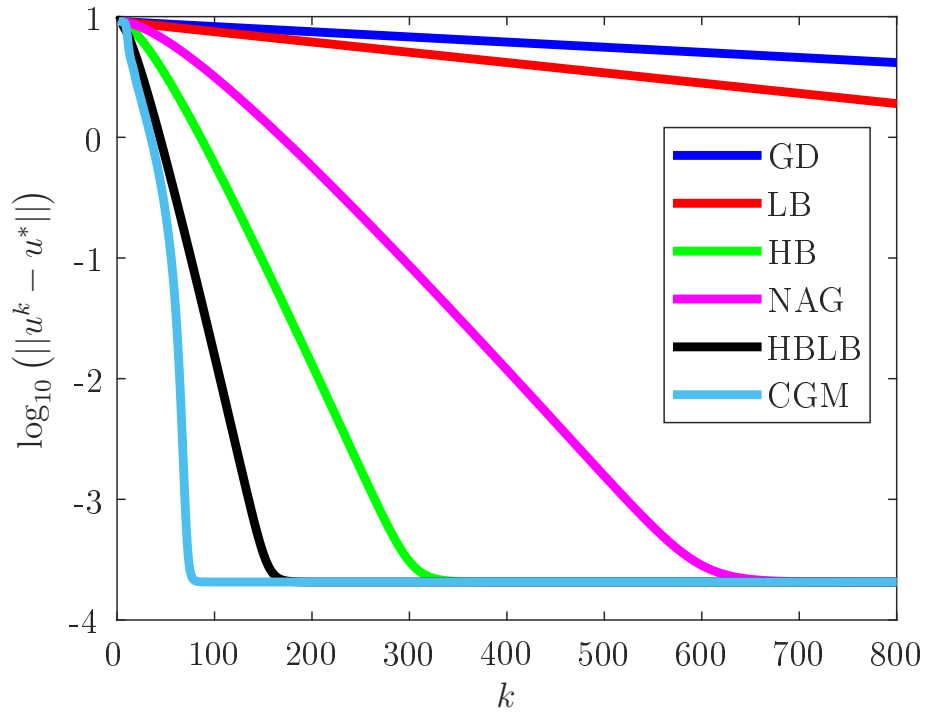


Рис. 4: График зависимости логарифма нормы погрешности от k при решении задачи для уравнения Пуассона в трехмерном случае при $N = 250$

Было проведено сравнение количества шагов и времени работы ускоренных методов минимизации квадратичных функций. Результаты расчетов приведены в таблице 2. Как можно видеть, ускоренный метод на основе разложения ЛБ сошелся быстрее всех методов, кроме метода сопряженных градиентов.

Таблица 2: Количество шагов и время работы (в секундах) ускоренных методов при решении задачи для уравнения Пуассона в трехмерном случае при $eps = 10^{-3}$

Метод \ N	500		1000		2000	
	Шаги	Время	Шаги	Время	Шаги	Время
CGM	95	2.98	139	14.79	226	123.65
HB	394	8.36	619	44.18	1095	374.58
NAG	780	17.72	1231	98.12	2182	808.96
HBLB	201	7.03	316	37.44	558	345.45

3.3 Решение задачи минимизации интегрального функционала

В качестве примера, связанного с минимизацией возмущенной квадратичной функции, рассмотрим задачу вариационного исчисления — задачу минимизации интегрального функционала [10]:

$$I(y) = \int_0^1 \left((y')^2 - \delta (y')^4 \right) dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \delta \ll 1. \quad (3.1)$$

Точное решение поставленной задачи имеет вид $y^* \equiv 0$. По составной квадратичной формуле трапеций интеграл можно записать в виде:

$$I(y) \approx \frac{h}{2} \left[\sum_{k=0}^1 \left[(y'(k))^2 - \delta (y'(k))^4 \right] + 2 \sum_{i=1}^N \left[(y'(x_i))^2 - \delta (y'(x_i))^4 \right] \right].$$

Применяя конечные разности, получим:

$$\Phi(y_1, \dots, y_N) = \frac{h}{2} \left[\left(\frac{y_1}{h} \right)^2 - \delta \left(\frac{y_1}{h} \right)^4 + \left(\frac{y_N}{h} \right)^2 - \delta \left(\frac{y_N}{h} \right)^4 \right] + h \sum_{i=1}^N f_i,$$

$$f_i = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right)^2 - \delta \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right)^4.$$

Функция Φ может быть записана в виде:

$$\Phi(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{2} (y, Ay) + \delta g(y),$$

где

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 5 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Таким образом, задача (3.1) сводится к минимизации возмущенной квадратичной функции, матрица квадратичной части которой имеет вид (3.2). В качестве начального приближения выбрана функция $y^0 = x(1 - x)$.

На рис. 5 приведен график зависимости логарифма нормы погрешности от номера итерации. Можно увидеть, что метод HBLB сошелся за меньшее число итераций, чем остальные методы.

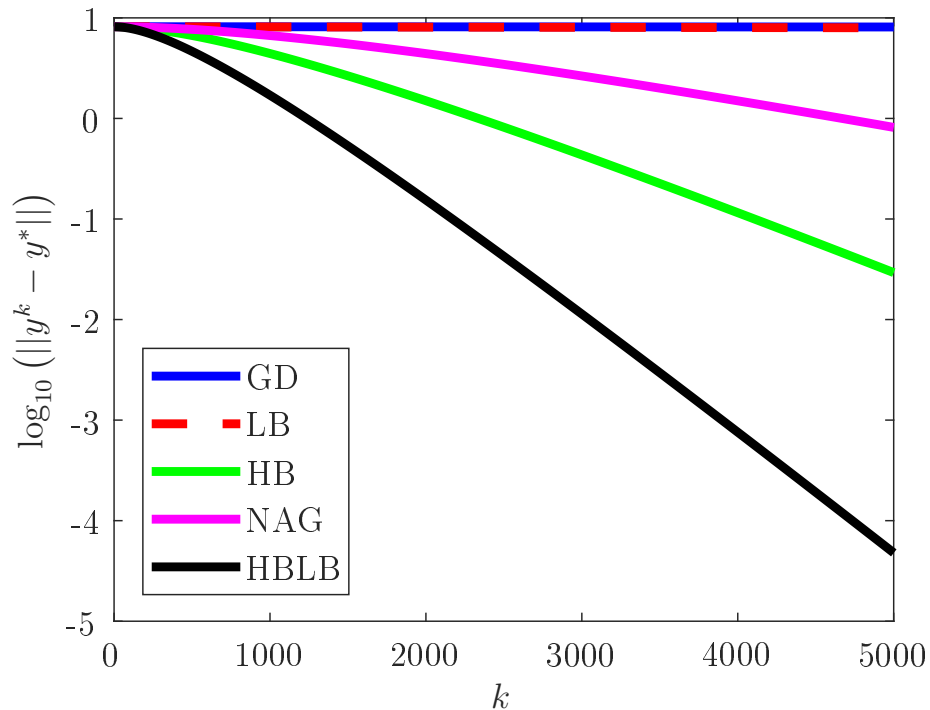


Рис. 5: График зависимости логарифма нормы погрешности от k при решении задачи минимизации интегрального функционала при $N = 2000$ и $\delta = 0.02$

В таблице 3 приведено количество шагов и время работы методов, которые потребовались для достижения точки y^* с точностью $eps = 10^{-6}$. Видно, что построенный метод HBLB оказался почти в два раза быстрее метода HB.

Таблица 3: Количество шагов и время работы (в секундах) ускоренных методов для решения задачи минимизации интегрального функционала при $eps = 10^{-6}$ и $\delta = 0.02$

Метод \ N	5000		7000		15000	
	Шаги	Время	Шаги	Время	Шаги	Время
HB	30939	25.37	43704	50.10	95552	233.17
NAG	61867	50.61	87398	100.24	120000	296.88
HBLB	15776	13.04	22285	25.82	48722	121.89

3.4 Решение задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Другим примером задачи, приводящей к минимизации возмущенной квадратичной функции, является задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения [19]:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \int_0^1 \frac{u^4(s)}{(1 + |x - s|)^2} ds, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \quad (3.3)$$

Построим равномерную сетку на отрезке $[0, 1]$ с шагом h , у которой N внутренних узлов. Вторую производную в (3.3) заменим с помощью второй разностной производной. Интеграл в правой части уравнения (3.3) вычислим с помощью составной квадратурной формулы трапеций:

$$I(u) \approx \frac{h}{2(1+ih)^2} + \sum_{j=1}^N \frac{hu_i^4}{(1+h|i-j|)^2}.$$

В результате дискретизации задача (3.3) сводится к системе вида

$$Au = \nabla p(u), \quad (3.4)$$

где матрица A представляется в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система (3.4) может быть рассмотрена как необходимое условие экстремума функции $f(u)$, которая имеет вид:

$$f(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - p(u). \quad (3.5)$$

Таким образом, задача нахождения решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (3.3) сводится к минимизации возмущенной квадратичной функции (3.5). В качестве u^* использовалось решение, полученное с использованием метода GD с критерием останова $\|u^{k+1} - u^k\| < 10^{-8}$. В качестве начального приближения была выбрана функция $u^0(x) = 1 - x^2$.

На рис. 6 приведен график зависимости логарифма нормы погрешности от номера итерации. Можно увидеть, что метод HBLB сошелся за меньшее число итераций чем остальные методы.

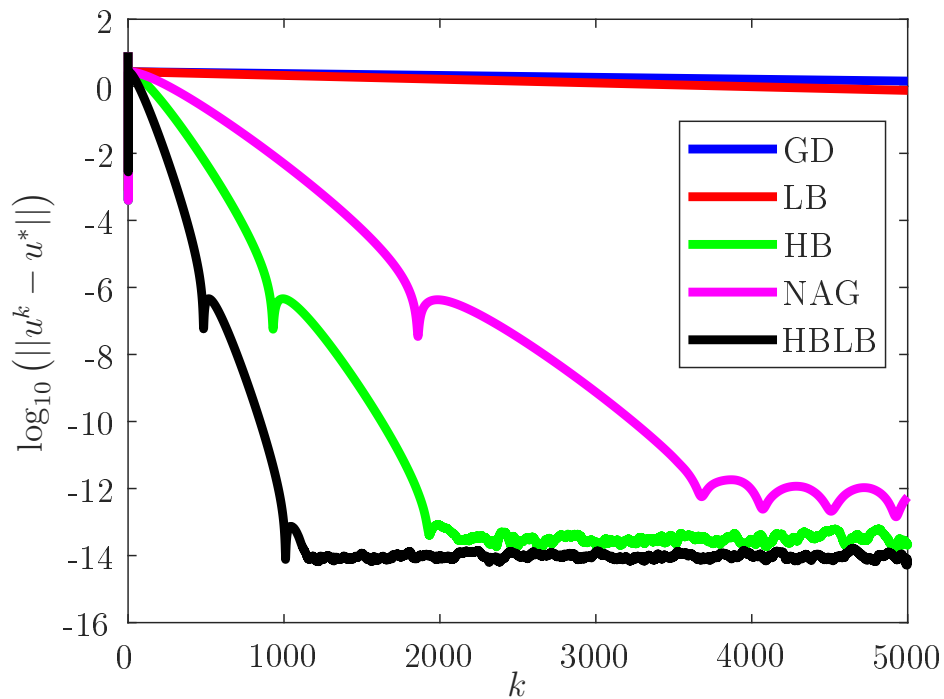


Рис. 6: График зависимости логарифма нормы погрешности от k при решении задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения при $N = 200$

В таблице 4 приведено количество шагов и время работы методов, которые потребовались для достижения точки минимума с точностью $eps = 10^{-6}$. Как можно видеть, построенный метод оказался в несколько раз быстрее других широко используемых методов минимизации выпуклых функций.

Таблица 4: Количество шагов и время работы (в секундах) ускоренных методов при решении задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения при $eps = 10^{-6}$

Метод \ N	300		700		1000	
	Шаги	Время	Шаги	Время	Шаги	Время
НВ	1367	9.98	3208	127.19	4589	369.48
NAG	2727	19.96	6408	253.37	8000	644.62
HBLB	697	5.09	1636	64.19	2340	188.34

3.5 Решение задачи логистической регрессии

Рассмотрим случай достаточно гладкой выпуклой функции $f(x)$. Такую функцию можно аппроксимировать квадратичной функцией в окрестности точки x^k :

$$f(x) \approx f(x^k) + (\nabla f(x^k), x - x^k) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x^k)(x - x^k), x - x^k).$$

Таким образом, метод (2.3) может быть записан в виде:

$$x^{k+1} = x^k - h \left(E - \frac{\gamma h}{2} \nabla^2 f(x^k) \right) \nabla f(x^k).$$

Использование этого метода на практике требует вычисление матрицы Гессе и ее умножение на ∇f , что требует больших вычислительных ресурсов. Для того, чтобы избежать этой проблемы можно воспользоваться следующим равенством [8]:

$$\nabla f(x + y) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x + \zeta y) y d\zeta.$$

Из которого можно получить следующее приближение:

$$\nabla^2 f(x^k) \nabla f(x^k) \approx \frac{\nabla f(x^k + \alpha \nabla f(x^k)) - \nabla f(x^k)}{\alpha}, \quad (3.6)$$

где $0 < \alpha \ll 1$ — параметр, который необходимо подбирать при вычислениях.

В качестве примера задачи минимизации гладкой выпуклой функции была рассмотрена задача логистической регрессии с регуляризацией, которая связана с минимизацией функции f , имеющей следующий вид [19, 29]:

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \sigma_i^T x)) + \frac{\delta}{2} \|x\|_2^2,$$

где σ_i^T представляет строки матрицы признаков Σ , $\dim(\Sigma) = m \times d$, где m — размер выборки, а d — число признаков, $y_i \in \{-1, 1\}$ — результирующий класс, $i = 1, 2, \dots, d$, $\delta > 0$ — параметр регуляризации. Как известно [19, 29], функция f обладает следующими параметрами: $l = \delta$ и $L = \delta + \|\Sigma\|_2^2 / 4$.

Сравнение методов производилось на датасете SONAR, взятого с сайта <https://www.causality.inf.ethz.ch/challenge.php?page=datasets>, с параметрами $m = 208$, $d = 60$. Начальное приближение выбралось следующим образом: $x^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$. В качестве x^* использовалось решение, полученное с использованием метода НВ с критерием останова $\|x^{k+1} - x^k\| < 10^{-13}$. При вычислениях использовалось приближение (3.6) с параметром $\alpha = 0.01$. Параметр регуляризации был выбран равным $\delta = 10^{-3}$.

На рис. 7 приведен график зависимости логарифма нормы погрешности от номера итерации. Можно увидеть, что ускоренный метод HBLB сошелся к точке минимума за меньшее число итераций, чем остальные методы.

Было проведено сравнение ускоренных методов до достижения точки x^* с точностью $eps = 10^{-9}$. Метод НВ сошелся за 23402 шага за время 0.942 секунд, метод NAG достиг точки минимума за 15414 итераций за 0.595 секунд, метод с инерцией HBLB оказался быстрее других рассматриваемых методов и сошелся за 3875 шага за время 0.256 секунд.

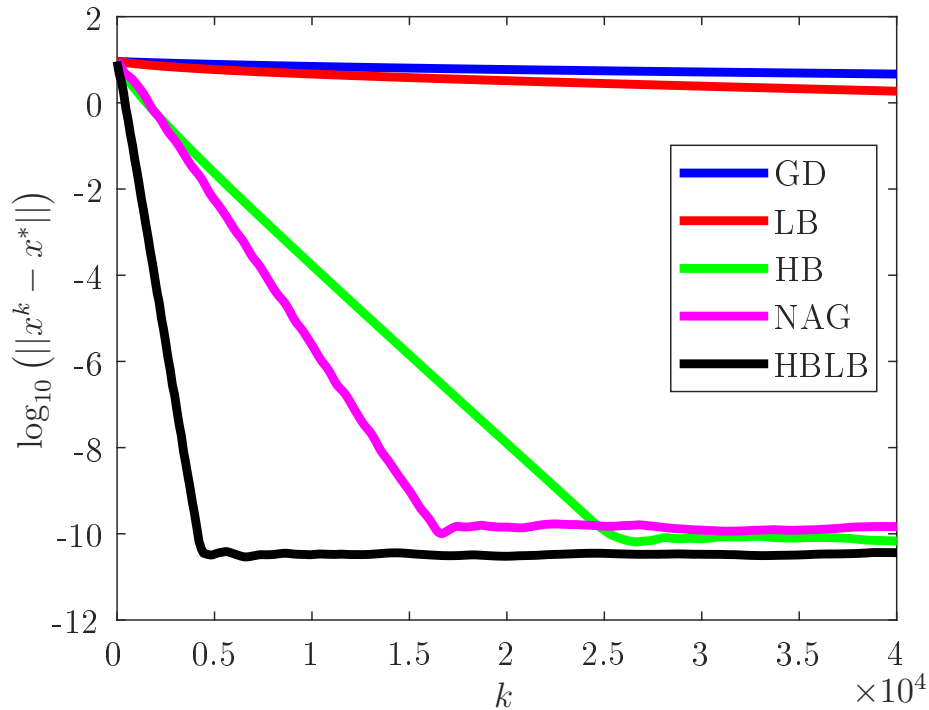


Рис. 7: График зависимости логарифма нормы погрешности от k при решении задачи логистической регрессии

3.6 Результаты

В данной главе были получены следующие результаты:

1. Методы (2.3) и (2.12) применены к решению задач минимизации квадратичных функций, возмущенных квадратичных функций и выпуклой гладкой функции.

2. В ходе численных расчетов проведено сравнение с другими известными методами минимизации.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. Метод (2.3), примененный к рассматриваемым задачам сходится быстрее, чем метод градиентного спуска.

2. В случае квадратичных задач метод (2.12) сравним с методом сопряженных градиентов и сходится быстрее, чем остальные ускоренные методы. Для неквадратичных функций метод (2.3) сходится за меньшее число итерации и меньшее время, чем другие методы минимизации.

Заключение

В представленной работе были проведены построение и анализ методов на основе метода РК с разложением ЛБ. Сформулированы и доказаны теоремы о сходимости построенных методов. Получены выражения для параметров, обеспечивающие оптимальную скорость сходимости. Проведено сравнение построенных методов с другими известными методами минимизации выпуклых функций при решении тестовых задач из различных областей.

В ходе работы были получены следующие результаты:

1. Построены методы спуска на основе двухэтапного метода Рунге – Кутты с разложением Лагранжа – Бюрмана.
2. Получены условия сходимости для случая квадратичной и возмущенной квадратичной функции.
3. Проведены вычислительные эксперименты по сравнению предложенных методов с известными методами минимизации при решении двумерных и трехмерных задач для уравнений эллиптического типа, задачи вариационного исчисления, задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения и задачи логистической регрессии.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. В выражении для шага (2.14) за счет выбора параметра γ можно влиять на скорость сходимости и шаг численного метода. За счет этого, при проведении практических расчетов можно производить вычисления с высокой эффективностью, экономя вычислительные ресурсы.
2. При решении задач из разных областей показано, что построенные методы могут сходиться быстрее, чем известные методы минимизации выпуклых функций.

Перспективной для дальнейшего исследования можно назвать задачу распространения методов на основе метода РК с разложением ЛБ на случай произвольной гладкой выпуклой функции. В частности, можно рассмотреть построение квазиньютоновских методов и их применение к задачам машинного обучения, обработки изображений и теории управления.

Список литературы

- [1] Альбер С. И., Альбер Я. И. Применение метода дифференциального спуска для решения нелинейных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, том 7, номер 1, 14–32.
- [2] Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: МГУ, 1990, 336 с.
- [3] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2020, 636 с.
- [4] Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002, 840 с.
- [5] Ворожцов Е. В. Построение явных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана // Выч. мет. программирование, 2010, том 11, выпуск 2, 198–209.
- [6] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М: Наука, 1966, 581 с.
- [7] Жадан В. Г. Методы оптимизации. Ч. 2. Численные алгоритмы. М.: МФТИ, 2015, 320 с.
- [8] Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М: Наука, 1983, 384 с.
- [9] Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М: Мир, 1986, 448 с.
- [10] Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. М: Гостехиздат, 1958, 164 с.
- [11] Abbott J. P., Brent R. P. Fast local convergence with single and multistep methods for nonlinear equations // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B: Applied Mathematics. 1975, vol. 19, no. 2, 173–199.

- [12] Areias P., Rabczuk T. An engineering interpretation of Nesterov's convex minimization algorithm and time integration: application to optimal fiber orientation // *Computational Mechanics*. 2021, vol. 68, no. 1, 211–227.
- [13] Ascher U. M., van den Doel K., Huang H., Svaiter B. F. Gradient descent and fast artificial time integration // *ESAIM: M2AN*. 2009, vol. 43, no. 4, 689–708.
- [14] Bishop C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, 2006, 758 p.
- [15] Boyd S., Vandenberghe L. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018, 473 p.
- [16] Brown A. A., Bartholomew-Biggs M. C. Some effective methods for unconstrained optimization based on the solution of systems of ordinary differential equations // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1989, vol. 62, no. 2, 211–224.
- [17] Chen R., Li X. Implicit Runge-Kutta Methods for Accelerated Unconstrained Convex Optimization // *IEEE Access*. 2020, vol. 8, 28624–28634.
- [18] Duruisseaux V., Leok M. Practical perspectives on symplectic accelerated optimization // *Optimization Methods and Software*. 2023, vol. 38, no. 6, 1230–1268.
- [19] Eftekhari A., Vandereycken B., Vilmart G., Zygalakis K. C. Explicit stabilised gradient descent for faster strongly convex optimisation // *BIT Numerical Mathematics*. 2021, vol. 61, 119–139.
- [20] Gitman I., Lang H., Zhang P., Xiao L. Understanding the Role of Momentum in Stochastic Gradient Methods. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2019, vol. 32.
- [21] Hairer E., Wanner G., Norsett S.P. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1993, 528 p.

- [22] Khiyabani F. M., Leong W. J. Quasi-Newton methods based on ordinary differential equation approach for unconstrained nonlinear optimization // *Applied Mathematics and Computation*. 2014, vol. 233, 272–291.
- [23] Leonard D., Long N., Ngo V. L. *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge University Press, 1992, 386 p.
- [24] Lessard L., Recht B., Packard A. Analysis and Design of Optimization Algorithms via Integral Quadratic Constraints // *SIAM Journal on Optimization*. 2016, vol. 26, no. 1, 57–95.
- [25] Luo H., Chen L. From differential equation solvers to accelerated first-order methods for convex optimization // *Mathematical Programming*. 2022, vol. 195, 735–781.
- [26] Nesterov Y. E. *Introductory Lectures on Convex Optimization: a Basic Course*. Springer, 2004, 236 p.
- [27] Porta F., Cornelio A., Ruggiero V. Runge–Kutta-like scaling techniques for first-order methods in convex optimization // *Applied Numerical Mathematics*. 2017, vol. 116, 256–272.
- [28] Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003, 567 p.
- [29] Scieur D., d’Aspremont A., Bach F. Regularized nonlinear acceleration // *Mathematical Programming*. 2020, vol. 179, no. 1, 47–83.
- [30] Shi B., Du S. S., Jordan M. I., Su W. J. Understanding the acceleration phenomenon via high-resolution differential equations // *Mathematical Programming*. 2022, vol. 195, 79–148.
- [31] Stillfjord T., Williamson M. SRKCD: A stabilized Runge–Kutta method for stochastic optimization // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023, 417 p.
- [32] Su W., Boyd S., Candès E. J. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // *Journal of Machine Learning Research*. 2016, vol. 17, no. 153, 1–43.

- [33] Zhang J., Sra S., Jadbabaie A. Acceleration in First Order Quasi-strongly Convex Optimization by ODE Discretization // 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control. 2019.
- [34] Zhang J., Mokhtari A., Sra S., Jadbabaie A. Direct Runge-Kutta Discretization Achieves Acceleration // Advances in Neural Information Processing Systems. 2018, vol. 31, Curran Associates, Inc.
- [35] Zhang J., Uribe C. A., Mokhtari A., Jadbabaie A. Achieving Acceleration in Distributed Optimization via Direct Discretization of the Heavy-Ball ODE // 2019 IEEE American Control Conference (ACC). 2019.