

Отзыв научного руководителя на ВКР  
Фомичева Д.С. "Об одном 4-инварианте на  
алгебре Ландо"

6 июня 2024 г.

Проблема, которую должен был решить Даниил, связана с теорией инвариантов конечного типа узлов, разработанной М. Гусаровым, В. Васильевым, М. Концевичем и другими учеными. Согласно этой теории, пространство комплекснозначных инвариантов узлов допускает фильтрацию с конечномерными компонентами, и последовательные факторы этой фильтрации имеют явное описание как двойственные к векторным пространствам, порожденным хордовыми диаграммами, факторизованным по четырехчленным соотношениям. Функционалы на этих пространствах называются весовыми системами. Каждая весовая система отвечает некоторому инварианту узлов. Богатым источником весовых систем являются метризованные алгебры Ли. В частности, простейшая нетривиальная метризованная алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2)$  позволяет построить весовую систему  $w_{\mathfrak{sl}(2)}$  со значениями в пространстве многочленов от одной переменной  $\mathbb{C}[c]$ . Эта весовая система связана с известным инвариантом узлов — крашенным полиномом Джонса.

С. Ландо ввел понятие 4-инварианта. 4-инварианты — это функции на множестве классов изоморфизмов конечных простых графов, удовлетворяющие некоторым соотношениям. Мотивацией к введению этого понятия было следующее наблюдение: имеется явно заданное отображение из пространства 4-инвариантов в пространство весовых систем, отвечающее сопоставлению каждой хордовой диаграмме ее графа пересечений. Известно, что это отображение не является сюръекцией, то есть не каждая весовая система является образом 4-инварианта. Однако вопрос, лежит ли весовая система  $w_{\mathfrak{sl}(2)}$  в образе этого отображения является открытым, и теорема Ландо-Чмутова, утверждающая что значение  $w_{\mathfrak{sl}(2)}$  на хордовой диаграмме зависит только от графа пересечений этой хордовой диаграммы, позволяет надеяться на положительный ответ. В настоящее время, вопрос принадлежности  $w_{\mathfrak{sl}(2)}$  образу активно изучается школой С. Ландо: в частности, как мне известно, с 2020 года вышло порядка пяти работ посвященных этой теме, а также готовится к публикации еще одна.

В работе Даниила доказано, что значение  $w_{\mathfrak{sl}(2)}$  в точке  $c = \frac{3}{8}$  лежит в образе пространства 4-инвариантов. Доказательство конструктивное: в

работе построен комплекснозначный 4-инвариант  $\varphi$ , связанный с количеством правильных раскрасок вершин графа в 3 цвета, допускающий рекуррентное вычисление через соотношения удаления-стягивания, и показано, что весовая система, индуцированная им, удовлетворяет рекуррентным соотношениям ЧмUTOва-Варченко, однозначно определяющим  $w_{sl}(2)$ .

Работа Даниила дает существенный вклад в понимание весовой системы  $w_{sl}(2)$ . Все утверждения текста снабжены подробными доказательствами. Работа была высоко оценена М. Казаряном. За время подготовки ВКР Даниил показал свои способности не только к коллективному, но и к самостоятельному исследованию. Планируется превратить текст ВКР в публикацию после соответствующей доработки. Считаю, что автор достоин самой высокой оценки и присвоения степени магистра.

06 июня 2024

Проф. / Е.А. Руминых /