

Санкт-Петербургский государственный университет

Фомичев Даниил Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Об одном 4-инварианте на алгебре Ландо

Уровень образования: магистратура

Направление: 01.04.01 «Математика»

Основная образовательная программа: ВМ.5832.2022 «Современная математика»

Научный руководитель:

Фоминых Евгений Анатольевич,

д.ф.-м.н.,

доцент,

Факультет математики и компьютерных наук,

СПбГУ

Рецензент:

Калинин Никита Сергеевич,

PhD,

доцент,

Гуандун Технион – Израильский Институт Технологии

Санкт-Петербург

2024

В работе исследуется функция на графах φ , связанная с 3-раскрасками графа. Доказывается, что φ — 4-инвариант графов. Доказывается, что значение $\mathfrak{sl}(2)$ -весовой системы на графе пересечений в точке $3/8$ равно значению φ на линейной комбинации графов. Если гипотеза Ландо истинна, это определяет значение продолжения весовой системы в точке $3/8$. Описывается способ вычисления φ на линейных комбинациях графов. Доказывается, что φ — значение инварианта Татта-Гротендика.

Содержание

1	Введение	1
1.1	Инварианты конечного порядка [1]	1
1.2	Хордовые диаграммы и весовые системы	1
1.3	Весовые системы, порожденные алгебрами Ли [1]	3
1.4	Гипотеза Ландо	4
2	Основная часть	5
2.1	Инвариант φ и связь с $w_{\mathfrak{sl}(2)}$	5
2.2	Выражение для пунктирного графа	12
2.3	Инварианты Татта-Гротендика	13

1 Введение

1.1 Инварианты конечного порядка [1]

Изучая инварианты ориентированных узлов, В. Васильев ввел понятие инвариантов конечного порядка. Для этого любой данный инвариант сперва доопределяется на сингулярных узлах, где разрешено конечное число трансверсальных двойных точек. Каждая такая особенность может быть разрешена двумя способами локальным шевелением узла в окрестности самопересечения. Этим разрешениям сопоставляется знак ± 1 , и значение инварианта продолжается как знакопеременная сумма значений инварианта на всевозможных разрешениях всех сингулярностей. Инвариант называется инвариантом порядка k , если он обращается в ноль на всех узлах с хотя бы $k + 1$ особенностью, но не является нулем на каком-то узле с k особенностями.

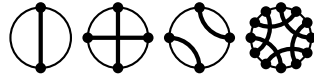
По теореме Васильева-Концевича фактор пространства инвариантов узлов порядка $\leq n$ по пространству инвариантов порядка $\leq n - 1$ изоморфен фактору пространства весовых систем порядка $\leq n$ по пространству весовых систем порядка $\leq n - 1$. Также изоморфны соответствующие градуированные биалгебры. Здесь весовые системы порядка n — функции на хордовых диаграммах с n хордами, удовлетворяющих специальным соотношениям. В связи с этим есть интерес в исследовании весовых систем самих по себе.

У теоремы Васильева-Концевича есть две основные формулировки: с обычными весовыми системами (с 1Т- и 4Т-соотношениями) и оснащенными весовыми системами (только с 4Т-соотношениями). В рамках данного текста весовые системы предполагаются оснащенными.

1.2 Хордовые диаграммы и весовые системы

Определение 1.1. Хордовая диаграмма с n хордами — ориентированная окружность с $2n$ различными выделенными точками, разбитыми на пары, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

Обозначим множество хордовых диаграмм как A .



Определение 1.2. Мы говорим, что функция f из A в кольцо R удовлетворяет 4Т-соотношениям, если для любых четырех диаграмм, отличающихся положением двух хорд, верно:

$$f\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagup \\ \circ \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagdown \\ \circ \end{array}\right) = 0.$$

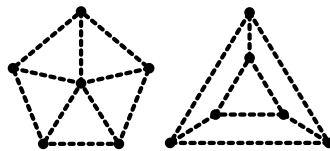
Такая функция называется весовой системой, или 4-инвариантом, или просто инвариантом.

Определение 1.3. Произведение хордовых диаграмм — хордовые диаграммы, получающиеся склеиванием двух диаграмм в произвольных точках окружности, не содержащих вершин, с правильной ориентацией. Любые такие диаграммы эквивалентны с точностью до 4Т-соотношений, откуда значение весовой системы на произведении определяется однозначно. Мы называем весовую систему $f : A \rightarrow R$ мультипликативной, если индуцированное отображение из кольца хордовых диаграмм с точностью до 4Т-соотношений в R — гомоморфизм колец.



Определение 1.4. Пусть D — хордовая диаграмма. Ее графом пересечений называется граф, вершины которого — хорды диаграммы, ребра — пары пересекающихся в смысле порядка вершин хорд.

Замечание. Не любой граф является графом пересечений некоторой хордовой диаграммы. Первые примеры графов, но не графов пересечений, появляются на 6 вершинах [2]:



Здесь и далее графы пересечений рисуются со пунктирными ребрами; подробнее это обсуждается в основной части.

Определение 1.5. В терминах графов пересечений — все четыре графа должны быть графами пересечений хордовых диаграмм из диаграммного 4Т-соотношения — 4Т-соотношения можно записать так:

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{c} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{b} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{c} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \diagdown \quad \diagdown \\ \textcircled{c} \\ \diagup \quad \diagup \\ \textcircled{b} \end{array} - \begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \diagup \quad \diagup \\ \textcircled{c} \\ \diagdown \quad \diagdown \\ \textcircled{b} \end{array}.$$

Определение 1.6. [1] Алгебра графов — градуированная коммутативная алгебра с 1, порожденная графами как образующими. Умножение двух графов в этой алгебре — их объединение. Эта алгебра продолжается до биалгебры.

Алгебра Ландо — фактор биалгебры графов по идеалу, порожденному графовыми 4Т-соотношениями для произвольных графов.

1.3 Весовые системы, порожденные алгебрами Ли [1]

Опишем класс весовых систем, конструкция которых использует конечномерные метризованные алгебры Ли.

Определение 1.7. Невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли \mathfrak{g} ад-инвариантна, если $\langle [a, b], c \rangle = \langle a, [b, c] \rangle$ для всех $a, b, c \in \mathfrak{g}$.

Определение 1.8. Для конечномерной алгебры Ли \mathfrak{g} форма Киллинга определяется как $\langle x, y \rangle_K = \text{tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))$.

Определение 1.9. Универсальная обертывающая алгебра Ли $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли \mathfrak{g} — фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу I , порожденному элементами вида $a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$.

Определение 1.10. Пусть \mathfrak{g} — конечномерная алгебра Ли, оснащенная ад-инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $e_1, \dots, e_d \in \mathfrak{g}$ — какой-то базис \mathfrak{g} . Построим для него двойственный базис $e_1^*, \dots, e_d^* \in \mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$.

Пусть D — хордовая диаграмма с n хордами. Выбрав произвольную начальную точку, представим D как последовательность $t_1, \dots, t_{2n}, t_k \in \{1, \dots, n\}$, где $t_i = t_j$ тогда и только тогда, когда есть хорда, соединяющая точки i и j . Сопоставим хордам индексы базисов произвольным образом: $\{i_k \in \{1, \dots, d\}\}_{k=1}^n$. Тогда сопоставим этой последовательности произведение $e_{i_{t_k}}$ и $e_{i_{t_k}}^*$ как элементов $U\mathfrak{g}$ в соответствующем порядке так, что при первом вхождении i_k выбирается e_{i_k} , при втором — $e_{i_k}^*$.

Значение весовой системы $w_{\mathfrak{g}}$ на хордовой диаграмме D определяется как сумма таких мономов по всевозможным выборам i_1, \dots, i_n . Это элемент $U\mathfrak{g}$.

Пример 1.1. Например, $w_{\mathfrak{g}} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)$ может быть записана как $\sum_{ijk} e_i e_j e_k e_k^* e_i^* e_j^*$.

Утверждение 1.1. $w_{\mathfrak{g}}(D)$ не зависит от выбора базиса и начальной точки хордовой диаграммы.

$$w_{\mathfrak{g}}(D) \in ZU\mathfrak{g}.$$

$w_{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет соотношениям 4Т.

$w_{\mathfrak{g}}$ мультипликативна.

Определение 1.11. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ — алгебра Ли $\{M \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2) \mid \text{tr } M = 0\}$ со скобкой Ли, заданной $[A, B] := AB - BA$.

Снабдим ее формой Киллинга.

Определение 1.12. Элемент Казимира для конечномерной алгебры Ли \mathfrak{g} с ад-инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяется как $\sum e_i e_i^* \in U\mathfrak{g}$ для некоторого базиса $\{e_i\}$.

Утверждение 1.2. Определение не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$.

Утверждение 1.3. [3] $ZU\mathfrak{sl}(2) \cong \mathbb{C}[c]$, где изоморфизм определяется значением на элементе Казимира, который мы обозначаем как c .

$w_{\mathfrak{sl}(2)}(D)$ — унитарный многочлен; для $n > 0$ свободный член равен нулю.

Замечание. В других источниках вместо формы Киллинга можно встретить $\frac{1}{2} \langle \cdot, \cdot \rangle_K$ ([4, 5, 6, 7]) и $\frac{1}{4} \langle \cdot, \cdot \rangle_K$ ([3, 1]). Эти формы порождают многочлены с целыми коэффициентами.

На простых комплексных алгебрах Ли любые невырожденные симметрические ад-инвариантные билинейные формы пропорциональны; в частности, они пропорциональны форме Киллинга. [1]

Следующий результат связывает значения $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ для пропорциональных форм.

Утверждение 1.4. [1] Пусть $w_{sl(2)}(D) = c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1c$ для формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда для формы $\lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$: $w_{sl(2)}(D) = c^n + a_{n-1}\frac{1}{\lambda}c^{n-1} + \dots + a_1\frac{1}{\lambda^{n-1}}c$.

Теорема 1.1. $w_{sl(2)}$ удовлетворяет соотношениям Чмутова-Варченко [3]:

1. $w_{sl(2)}(C_1C_2) = w_{sl(2)}(C_1)w_{sl(2)}(C_2)$.
2. Если D получается из D' умножением на хорду, $w_{sl(2)}(D) = cw_{sl(2)}(D')$.
3. Если D получается из D' добавлением хорды, пересекающей одну другую, $w_{sl(2)}(D) = (c - \frac{1}{2})w_{sl(2)}(D')$.
4. Выполняются два 6Т-соотношения:

$$\begin{aligned} w_{sl(2)} \left(\text{diagram 1} \right) - w_{sl(2)} \left(\text{diagram 2} \right) - w_{sl(2)} \left(\text{diagram 3} \right) + w_{sl(2)} \left(\text{diagram 4} \right) = \\ = \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\text{diagram 5} \right) - \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\text{diagram 6} \right); \\ w_{sl(2)} \left(\text{diagram 7} \right) - w_{sl(2)} \left(\text{diagram 8} \right) - w_{sl(2)} \left(\text{diagram 9} \right) + w_{sl(2)} \left(\text{diagram 10} \right) = \\ = \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\text{diagram 11} \right) - \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\text{diagram 12} \right). \end{aligned}$$

Замечание. $w_{sl(2)}$ полностью определяется соотношениями Чмутова-Варченко. В частности, их можно использовать как альтернативное определение $w_{sl(2)}$.

1.4 Гипотеза Ландо

Теорема 1.2. [7] $w_{sl(2)}(D)$ определяется графом пересечений D .

Гипотеза (Ландо). $w_{sl(2)}$ допускает единственное продолжение на все графы (не только графы пересечений), удовлетворяющее 4Т-соотношениям для графов.

Замечание. В терминах графов не все 6Т-соотношения поднимаются до 6Т-соотношений на хордовых диаграммах, даже для графов пересечений. Пример графового 6Т-соотношения, неверного для $w_{sl(2)}$, приведен ниже после формулировки соотношений в графовой форме.

Утверждение 1.5. [2] На графах на ≤ 8 вершинах продолжение $w_{sl(2)}$ до графового 4-инварианта существует и единственно.




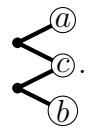
Замечание. Если гипотеза Ландо верна, известны:

1. Значения $w_{sl(2)}$ на полных двудольных графах [5, 7];
2. Значения $w_{sl(2)}$ на графах, полученных соединением малых графов и дискретных графов произвольного размера всевозможными ребрами [6];
3. Значения коэффициента при c^n проекции графа с $2n$ ребрами на примитивное подпространство биалгебры графов [4, 8].

2 Основная часть

2.1 Инвариант φ и связь с $w_{sl(2)}$

Нотация. Если не сказано иное, на дальнейших рисунках в тексте используются следующие соглашения, связанные с соседями вершин.

1. Такие вершины соединены с каждой вершиной множества a : .
2. У таких вершин могут быть другие соседи, которые нас сейчас не интересуют и на рисунке не изображены: .
3. У таких пар вершин изображены все соседи, эти множества могут пересекаться: .
4. У таких пар вершин изображены все соседи, эти множества не пересекаются: .

Нотация. Графы, которые мы рассматриваем, имеют ребра двух типов.

Пунктирному ребру соответствует линейная комбинация $\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$.

Обычные ребра мы называем сплошными.

В векторном пространстве, порожденном сплошными графами, есть два базиса: из сплошных графов и из пунктирных графов. Мы можем переходить между ними, записывая линейные комбинации.

Определение 2.1. Следуя соглашениям [9], будем всегда отображать хордовые диаграммы в пунктирные графы пересечений.

Поэтому определим соотношения Чмутова-Варченко на графах следующим образом:

- $w_{sl(2)}(G_1 \sqcup G_2) = w_{sl(2)}(G_1) \cdot w_{sl(2)}(G_2)$.
- $w_{sl(2)}(\bullet) = c$.
- $w_{sl(2)}(G \dashrightarrow \bullet) = (c - \frac{1}{2}) w_{sl(2)}(G)$.

$$\begin{aligned} \bullet w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ z \end{array} \right) &= \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} v \cup w \\ \text{---} \\ u \quad y \\ \text{---} \\ x \cup z \end{array} \right) - \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} v \cup z \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \cup y \\ \text{---} \\ x \cup w \end{array} \right). \\ \bullet w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ z \end{array} \right) &= \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} v \cup w \\ \text{---} \\ u \quad t \\ \text{---} \\ x \cup z \end{array} \right) - \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} v \cup z \\ \text{---} \\ t \quad u \\ \text{---} \\ x \cup w \end{array} \right). \end{aligned}$$

В частности, для листа со сплошным ребром следует:

$$w_{sl(2)}(G \dashrightarrow \bullet) = w_{sl(2)}(G \dashrightarrow \bullet) - w_{sl(2)}(G \sqcup \bullet) = (c - \frac{1}{2}) w_{sl(2)}(G) - c \cdot w_{sl(2)}(G) = -\frac{1}{2} w_{sl(2)}(G).$$

Замечание. $w_{sl(2)}$ удовлетворяет не всем графовым бТ-соотношениям на графах пересечений. Например:

$$w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \neq \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - \frac{1}{2} w_{sl(2)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right).$$

Определение 2.2. $\chi_k(G) := \chi(G)(k)$ — число раскрасок графа G в k цветов.

Теперь определим инвариант (что мы докажем позже), являющийся вариацией инварианта из [9] и, как окажется, связанный с $w_{51(2)}$.

Определение 2.3. Для сплошного графа $G = (V, E)$ определим $\varphi(G) := (-1)^{|E|} 2^{|E|-3|V|} \chi_3(G)$.

Утверждение 2.1.

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = -\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} \varphi \left(\bullet \text{---} \textcircled{u \Delta v} \right).$$

Доказательство. Обозначим: V — множество вершин первого графа, E' — множество ребер, не смежных с двумя выделенными вершинами.

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right).$$

Распишем последнее:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) &= \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u'} \\ \text{---} \textcircled{v'} \end{array} \right) = \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-1)^{|u'|+|v'|+1+|E'|} 2^{|u'|+|v'|+1+|E'|-3|V|} \chi_3 \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u'} \\ \text{---} \textcircled{v'} \end{array} \right) = \\ &= (-1)^{1+|E'|} 2^{1+|E'|-3|V|} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u'|+|v'|} \chi_3 \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u'} \\ \text{---} \textcircled{v'} \end{array} \right) = \\ &= (-2)^{1+|E'|} 2^{-3|V|} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u'|+|v'|} \left(\chi_3 \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u'} \\ \text{---} \textcircled{v'} \end{array} \right) - \chi_3 \left(\bullet \text{---} \textcircled{u' \cup v'} \right) \right) = \\ &= (-2)^{1+|E'|} 2^{-3|V|} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u'|+|v'|} \chi_3 \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u'} \\ \text{---} \textcircled{v'} \end{array} \right) - (-2)^{1+|E'|} 2^{-3|V|} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u'|+|v'|} \chi_3 \left(\bullet \text{---} \textcircled{u' \cup v'} \right) = \\ &= -2\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) - (-2)^{1+|E'|} 2^{-3|V|} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u'|+|v'|} \chi_3 \left(\bullet \text{---} \textcircled{u' \cup v'} \right) =: -2\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) - r. \end{aligned}$$

Заметим:

$$\varphi \left(\bullet \text{---} \textcircled{u' \cup v'} \right) = (-2)^{|E'|+|u' \cup v'|} 2^{-3|V|+3} \chi_3(\dots) = (-2)^{|E'|+|u'|+|v'|-|u' \cap v'|} 2^{-3|V|+3} \chi_3(\dots).$$

Тогда:

$$r = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{u' \subseteq u \\ v' \subseteq v}} (-2)^{|u' \cap v'|} \varphi \left(\bullet \text{---} \textcircled{u' \cup v'} \right) = -\frac{1}{4} \sum_{t \subseteq u \Delta v} \sum_{s \subseteq u \cap v} \left(\sum_{\bar{u} \cup \bar{v} = s} (-2)^{|\bar{u} \cap \bar{v}|} \right) \varphi \left(\bullet \text{---} \textcircled{t \cup s} \right).$$

Вычислим сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{u} \cup \bar{v} = s} (-2)^{|\bar{u} \cap \bar{v}|} &= \sum_{\bar{u} \subseteq s} \sum_{\bar{v} \subseteq \bar{u}} (-2)^{|\bar{v}|} = \sum_{\bar{u} \subseteq s} \sum_{k=0}^{|\bar{u}|} (-2)^k \binom{|\bar{u}|}{k} = \sum_{\bar{u} \subseteq s} (1-2)^{|\bar{u}|} = \sum_{\bar{u} \subseteq s} (-1)^{|\bar{u}|} = \\ &= \sum_{k=0}^{|s|} (-1)^k \binom{|s|}{k} = (1-1)^{|s|} = \delta_{|s|,0}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$r = -\frac{1}{4} \sum_{t \subseteq u \Delta v} \sum_{s \subseteq u \cap v} \delta_{|s|,0} \varphi(\bullet \text{---} t \cup s) = -\frac{1}{4} \sum_{t \subseteq u \Delta v} \varphi(\bullet \text{---} t) = -\frac{1}{4} \varphi(\bullet \text{---} u \Delta v).$$

□

Утверждение 2.2.

$$\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) = -\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) - \frac{1}{2} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) &= \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) - \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) - \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) = \\ &= \left(-\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \frac{1}{4} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right)\right) - \left(-\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \frac{1}{4} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right)\right) - \\ &\quad - \left(-\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \frac{1}{4} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right)\right) + \left(-\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \frac{1}{4} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right)\right) = \\ &= -\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) + \frac{1}{2} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) - \frac{1}{2} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) = \\ &= -\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right) - \frac{1}{2} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \text{---} \\ \textcircled{v} \end{array}\right). \end{aligned}$$

□

Лемма 2.1.

$$\varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{y} \\ \text{---} \\ \textcircled{x} \text{---} \textcircled{z} \end{array}\right) = \frac{1}{2} \varphi\left(\begin{array}{c} \textcircled{x} \Delta \textcircled{y} \\ \text{---} \\ \textcircled{y} \Delta \textcircled{z} \end{array}\right).$$

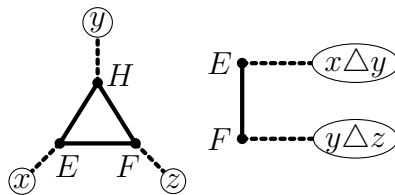
Доказательство. Значение $\varphi(G) = (-1)^{|E|} 2^{|E|-3|V|} \chi_3(G)$ можно вычислить, перебирая раскраски вершин и считая их вклады.

Докажем большее: для любых выборов цветов нижних вершин треугольника (которым сопоставим цвета двух вершин графа в правой части) вклад любой раскраски в левую часть равен вкладу в правую часть. Поскольку таким образом все раскраски в левой и правой части будут перечислены в точности по одному разу, это даст равенство φ .

Будем доказывать индукцией по размеру y , $y \cap x \cap z$, $y \cap x$, $y \cap z$: сначала по y , для равных $|y|$ по $y \cap x \cap z$ и т.д.

Для случая $y \neq \emptyset$ выберем произвольную вершину $t \in y$. Обозначим $w := y \setminus \{t\}$.

Зафиксируем цвета треугольника.



Зафиксируем также цвет вершины t . Пусть $h(G)$ — вклад раскрасок с этими фиксированными цветами в $\varphi(G)$.

1. Пусть $t \notin x, t \notin z$. Тогда достаточно показать:

$$h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) = \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right).$$

Три случая:

(a) t покрашена в цвет H .

В левой части вклад 0: таких раскрасок не существует.

В удвоенной правой части:

$$h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) = h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) (4 - 2 - 2) = 0.$$

(b) t покрашена в цвет E .

В левой части имеем:

$$h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) = -2 \cdot h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right).$$

В правой части имеем:

$$\frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) = -2 \cdot \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right).$$

Равенство имеем по индукционному предположению.

(c) t покрашена в цвет F . Аналогично случаю E .

2. Пусть $t \in y \cap x \cap z$:

$$\begin{aligned} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) &= h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) + \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) - \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right). \end{aligned}$$

3. Пусть $t \in y \cap x$. Докажем:

$$h \left(\begin{array}{c} \textcircled{w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{z} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(-2h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} \textcircled{x \Delta w} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{w \Delta z} \end{array} \right) \right).$$

Три случая:

(a) t покрашена в цвет F . В левой части имеем:

$$h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = 4 \cdot h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = 2 \cdot h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right).$$

В правой части имеем:

$$-1 \cdot h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = 2 \cdot h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right).$$

(b) t покрашена в цвет E . В левой части ноль. В правой части ноль.

(c) t покрашена в цвет H . В левой части ноль. В удвоенной правой части:

$$-2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = (-2 - (-2))h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = 0.$$

Воспользуемся этим равенством:

$$\begin{aligned} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) &= h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right). \end{aligned}$$

4. Пусть $t \in y \cap z$. Аналогично предыдущему случаю.

5. База индукции: случай $y = \emptyset$. По определению $\varphi(G)$:

$$h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \frac{1}{2} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right).$$

□

Следующее следствие доказывает соотношение 4Т в графовой форме. Это значит, что $\varphi(G)$ — весовая система:

Следствие 2.1.

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right).$$

Доказательство. Возьмем $x = b \sqcup c$, $y = a \sqcup c$, $z = a \sqcup b$ и применим лемму для (x, y, z) и (y, z, x) . □

Теорема 2.1. $\varphi(G)$ удовлетворяет 6Т-соотношениям в графовой форме.

Доказательство.

$$\frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} x \Delta y \text{---} \\ \text{---} y \Delta z \text{---} \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad z \end{array} \right) = -2 \cdot \varphi \left(\begin{array}{c} y \\ \bullet \quad \bullet \\ x \quad z \end{array} \right) - \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} y \text{---} \\ \text{---} x \Delta z \text{---} \end{array} \right).$$

Таким образом:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} z \text{---} \\ \text{---} y \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \end{array} \right) = -\frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} y \text{---} \\ \text{---} x \Delta z \text{---} \end{array} \right) - \frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} x \Delta y \text{---} \\ \text{---} y \Delta z \text{---} \end{array} \right).$$

1. Можем записать следующее:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{array}{c} a \\ \text{---} e \text{---} \\ \text{---} f \text{---} \\ d \quad b \\ c \end{array} \right) &= -\frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} b \\ \text{---} e \cup f \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right) = \\ &= -\frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right). \end{aligned}$$

Для первого 6T-соотношения хотим доказать:

$$-\frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right) = \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right).$$

Как и прежде, будем оценивать вклады раскрасок.

Пусть две центральные вершины покрашены в разные цвета. В левой части имеем:

$$-\frac{1}{4}h \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{4}h \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right) = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) + \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right).$$

В правой части имеем:

$$\frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) - \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right) = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} e \cup f \\ \text{---} d \quad b \text{---} \\ a \cup c \end{array} \right) + \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} c \cup e \\ \text{---} b \cup d \text{---} \\ a \cup f \end{array} \right).$$

Пусть две центральные вершины покрашены в один цвет. В левой части вклад всегда нулевой. Рассмотрим правую часть. Пусть d' — множество вершин из d , покрашенных

в другой цвет:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad bUd \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) - \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad bUd \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) = \\
& = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) \left(1 - \sum_{d_1 \subseteq d', d_2 \subseteq d'} (-2)^{|d_1|+|d_2|} \right) = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) \left(1 - \left(\sum_{d_1 \subseteq d'} (-2)^{|d_1|} \right)^2 \right) = \\
& = \frac{1}{2}h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) \left(1 - ((-1)^{|d'|})^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

2. Можем записать следующее:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad f \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad c \end{array} \right) = -\frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - \frac{1}{4}\varphi \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right).$$

Для второго 6T-соотношения хотим доказать:

$$\begin{aligned}
\varphi \left(\begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad f \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad c \end{array} \right) &= \varphi \left(\begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad f \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad c \end{array} \right) - \varphi \left(\begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad f \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad c \end{array} \right) = \\
&= \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) - \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) = \\
&= \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - \frac{1}{2}\varphi \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right).
\end{aligned}$$

В случае, когда две центральные вершины покрашены в разные цвета, доказательство равенства вкладов точно такое же.

Пусть они одного цвета. Пусть b', d' — множества вершин из b, d , покрашенных в другой цвет. В удвоенной правой части:

$$\begin{aligned}
h \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} cUe \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUf \end{array} \right) &= h \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) - h \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) = \\
&= h \left(\begin{array}{c} eUf \\ \diagdown \quad \diagup \\ d \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ aUc \end{array} \right) \left((-1)^{2|b'|} - (-1)^{2|d'|} \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Следствие 2.2. $\varphi(G) = w_{\mathfrak{sl}(2)}(G) \left(\frac{3}{8}\right)$ для графов пересечений G .

Доказательство. Проверим соотношения Чмутова-Варченко. Мультипликативность, значение в \bullet и значение при добавлении листа следуют из определения. Два 6T-соотношения были только что доказаны. □

Замечание. Так как $\varphi(G)$ удовлетворяет 4T-соотношениям, в случае истинности гипотезы Ландо значение $w_{\mathfrak{sl}(2)}(G)$ на произвольном графе равно $\varphi(G)$.

Вспомним, что φ явно определено на сплошном графе G . Чтобы применять результат для вычисления значений весовой системы $w_{\mathfrak{sl}(2)}$ и ее гипотетического продолжения, нужно считать φ на пунктирных графах.

Замечание. В случае других выборов формы на $\mathfrak{sl}(2)$ инвариант преобразуется:

- Для $\frac{1}{2} \langle \cdot, \cdot \rangle_K$: $\varphi_2(G) = (-1)^{|E|} 2^{|E|-2|V|} \chi_3(G)$ соответствует точке $\frac{3}{4}$;
- Для $\frac{1}{4} \langle \cdot, \cdot \rangle_K$: $\varphi_4(G) = (-1)^{|E|} 2^{|E|-|V|} \chi_3(G)$ соответствует точке $\frac{3}{2}$.

2.2 Выражение для пунктирного графа

Утверждение 2.3. Для пунктирного графа $G = (V, E)$ верно:

$$\varphi(G) = 2^{-3|V|} \sum_{\substack{U \subseteq V \\ G|_U \text{ эйлеров}}} (-1)^{|E(U, V \setminus U)|} 2^{|U|}.$$

Здесь эйлеровость понимается как четность всех степеней вершин. $G|_U$ — подграф G , индуцированный множеством вершин U .

Замечание. Это выражение — значение многочлена $w_{\mathfrak{sl}(2)}(G)$ в точке $\frac{3}{8}$ на пунктирном графе G .

Доказательство. Посчитаем вклад произвольной раскраски вершин $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$:

$$\begin{aligned} h(G) &= 2^{-3|V|} \sum_{\substack{E_1 \subseteq E(V_2, V_3) \\ E_2 \subseteq E(V_3, V_1) \\ E_3 \subseteq E(V_1, V_2)}} (-2)^{|E_1|+|E_2|+|E_3|} = 2^{-3|V|} (-1)^{|E(V_1, V_2)|+|E(V_2, V_3)|+|E(V_3, V_1)|} = \\ &= 2^{-3|V|} (-1)^{|E|} (-1)^{|E(V_1, V_1)|+|E(V_2, V_2)|+|E(V_3, V_3)|}. \end{aligned}$$

Тогда $\varphi(G)$ выражается как:

$$\begin{aligned} \varphi(G) &= 2^{-3|V|} (-1)^{|E|} \sum_{V=V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3} (-1)^{|E(V_1, V_1)|+|E(V_2, V_2)|+|E(V_3, V_3)|} = \\ &= 2^{-3|V|} (-1)^{|E|} \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} (-1)^{|E(V_1, V_1)|} \sum_{V_2=V_2' \sqcup V_2''} (-1)^{|E(V_2', V_2')|+|E(V_2'', V_2'')|} = \\ &= 2^{-3|V|} (-1)^{|E|} \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} (-1)^{|E(V_1, V_1)|} (-1)^{|E(V_2, V_2)|} \sum_{V_2=V_2' \sqcup V_2''} (-1)^{|E(V_2', V_2'')|} = \\ &= 2^{-3|V|} \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} (-1)^{|E(V_1, V_2)|} \sum_{V_2=V_2' \sqcup V_2''} (-1)^{|E(V_2', V_2'')|} = \\ &= 2^{-3|V|} \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} (-1)^{|E(V_1, V_2)|} g(G|_{V_2}). \end{aligned}$$

Осталось понять: $g(G) = 2^{|V|} \mathbf{1}(G \text{ эйлеров})$.

Пусть G таков: возьмем произвольный разрез $V = V_1 \sqcup V_2$. Любая компонента связности допускает эйлеров цикл, откуда вклад этой компоненты в $|E(V_1, V_2)|$ четен. Значит, $|E(V_1, V_2)|$ четно для всех $V = V_1 \sqcup V_2$.

Пусть G не таков: найдется вершина v нечетной степени. Пусть $V'_i = V_i \Delta \{v\}$. Тогда $(-1)^{|E(V_1, V_2)|} + (-1)^{|E(V'_1, V'_2)|} = 0$ для всех $V = V_1 \sqcup V_2$. Значит, $g(G) = 0$. \square

Замечание. М. Казарян и М. Шапиро сделали наблюдение, что значение $w_{5|2}(G) \left(\frac{3}{8}\right)$ на пунктирных графах с большим числом вершин мало.

Используя формулу выше, мы можем подтвердить это наблюдение и оценить абсолютное значение $w_{5|2}(G) \left(\frac{3}{8}\right)$ явно:

Следствие 2.3. Для пунктирного графа G верно: $|\varphi(G)| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^{|V|}$.

Доказательство.

$$|\varphi(G)| = \left| 2^{-3|V|} \sum_{\substack{U \subseteq V \\ G|_U \text{ эйлеров}}} (-1)^{|E(U, V \setminus U)|} 2^{|U|} \right| \leq 2^{-3|V|} \sum_{\substack{U \subseteq V \\ G|_U \text{ эйлеров}}} 2^{|U|} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{|V|} \sum_{U \subseteq V} 2^{|U|} = \left(\frac{3}{8}\right)^{|V|}.$$

\square

Замечание. Аналогично: $|\varphi_2(G)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{|V|}$, $|\varphi_4(G)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{|V|}$. Верхняя оценка точна: она достигается на дискретных графах. Только в последнем случае оценка не стремится к нулю с ростом числа вершин.

2.3 Инварианты Татта-Гротендика

$\varphi(G)$ в соответствии с определением продолжается на графы с петлями и кратными ребрами.

Утверждение 2.4. На пунктирных графах $\varphi(G)$ — значение инварианта Татта-Гротендика [10] в точке $(\gamma, x, y, \alpha, \beta) = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{4}, -1\right)$.

Доказательство.

1. Пусть D_n — дискретный граф на n вершинах. Тогда $\varphi(D_n) = \varphi(\bullet)^n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$.
2. Пусть e — мост. Покажем:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) &= -\frac{1}{8} \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) \iff -\varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) \iff = -\frac{1}{8} \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) \iff \\ &\iff \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) = \frac{3}{8} \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Оценим вклад произвольной раскраски в графе в правой части:

$$\frac{1}{8} h \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right) = h \left(\begin{array}{c} \textcircled{u} \\ \vdots \\ \textcircled{v} \end{array} \right).$$

Но в левой части таких вкладов в 3 раза больше, так как цвета двух вершин совпадают только в трети случаев.

3. Пусть e — пунктирная петля, e' — такая же сплошная. Тогда $\varphi(G \cup e) = \varphi(G) + \varphi(G \cup e') = \varphi(G)$, так как вершина со сплошной петлей не может быть покрашена.
4. Пусть e — ребро между различными вершинами. Покажем:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ | \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = -\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \diagup \text{---} \textcircled{v} \\ \text{---} \textcircled{u \Delta v} \end{array} \right).$$

Знаем:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ | \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = -\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u \Delta v} \end{array} \right).$$

Достаточно понять:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{x} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) = \varphi \left(\begin{array}{c} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right).$$

Возьмем произвольную вершину из x и оценим вклад произвольной раскраски:

$$h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) = h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right) + 2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) + h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right) = h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right) + 2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) - 2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right) = h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{x} \\ \text{---} \end{array} \right).$$

□

Утверждение 2.5. На сплошных графах $\varphi(G)$ — значение инварианта Татта-Гротендика в точке $(\gamma, x, y, \alpha, \beta) = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, -2\right)$.

Доказательство.

1. Пусть D_n — дискретный граф на n вершинах. Тогда $\varphi(D_n) = \varphi(\bullet)^n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$.
2. Пусть e — мост. Так как две части G , на которые он делится при удалении моста, не пересекаются, а пунктирные ребра образуют базис, по доказанному в пунктирном случае $\varphi(G \setminus e) = \frac{3}{8}\varphi(G/e)$. Тогда $\varphi(G) = -2\varphi(G \setminus e) + \frac{1}{4}\varphi(G/e) = -\frac{1}{2}\varphi(G/e)$.
3. Пусть e — петля. Тогда $\varphi(G) = 0$, так как вершина со сплошной петлей не может быть покрашена.
4. Пусть e — ребро между различными вершинами. Покажем:

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ | \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = -2\varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} \varphi \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \diagup \text{---} \textcircled{v} \\ \text{---} \textcircled{u \Delta v} \end{array} \right).$$

Пусть вершины в левой части раскрашены в разные цвета. Тогда:

$$h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ | \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = -2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right).$$

Пусть вершины в левой части раскрашены в один цвет. В левой части вклад нулевой, в правой:

$$\begin{aligned} -2h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \diagup \text{---} \textcircled{v} \\ \text{---} \textcircled{u \Delta v} \end{array} \right) &= -2 \cdot 4^{|u \cap v|} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) + \frac{1}{4} 4^{|u \cap v|} h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \\ \text{---} \textcircled{u \Delta v} \end{array} \right) = \\ &= \text{const} \left(-2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) h \left(\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{u} \\ \text{---} \textcircled{v} \end{array} \right) = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Функция φ единственна среди всевозможных функций $\psi(G) = c_1^{|E|} c_2^{|V|} \chi_3(G)$, для которых $\psi(G) = w_{\mathfrak{sl}(2)}(G)(t)$ для $t \in \mathbb{R}$.

Действительно:

- $\psi(\bullet) = 3c_2 = t \Rightarrow c_2 = \frac{t}{3}$.
- $\psi(G \rightarrow) = 2c_1 c_2 \psi(G) = -\frac{1}{2} \psi(G) \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{4t}$.
- $\psi(\blacktriangle) = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 6 = -\frac{3}{32} = -\frac{t}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{8}$.
- $c_1 = -2, c_2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \psi(G) = (-2)^{|E|} \left(\frac{1}{8}\right)^{|V|} \chi_3(G) = \varphi(G)$.

Похожим образом получается единственность, если рассматривать функции вида $\psi(G) = c_1^{|E|} c_2^{|V|} \chi_k(G)$.

Список литературы

- [1] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. 2011. arXiv: [1103.5628 \[math.GT\]](#).
- [2] Evgeny Krasilnikov. “An Extension of the \mathfrak{sl}_2 Weight System to Graphs with $n \leq 8$ Vertices”. In: *Arnold Mathematical Journal* 7 (2021), pp. 609–618.
- [3] S. V. Chmutov and A. N. Varchenko. “Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from \mathfrak{sl}_2 ”. In: *Topology* 36.1 (1997), pp. 153–178.
- [4] E. Kulakova et al. “On a weight system conjecturally related to \mathfrak{sl}_2 ”. In: *European Journal of Combinatorics* 41 (2014), pp. 266–277.
- [5] П. А. Филиппова. “Значения весовой системы, отвечающей алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , на полных двудольных графах”. В: *Функц. анализ и его прил.* 54.3 (2020), с. 73–93.
- [6] П. А. Филиппова. “Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графами пересечений хордовых диаграмм”. В: *Матем. сб.* 213.2 (2022), с. 115–148.
- [7] Maxim Kazaryan and Sergei Lando. *Weight systems and invariants of graphs and embedded graphs*. 2023. arXiv: [2302.12153 \[math.CO\]](#).
- [8] Dror Bar-Natan and Huan T. Vo. “Proof of a conjecture of Kulakova et al. related to the \mathfrak{sl}_2 weight system”. In: *European Journal of Combinatorics* 45 (2015), pp. 65–70.
- [9] Maksim Karev. “On the primitive subspace of Lando framed graph bialgebra”. In: *Communications in Mathematics* 31 (3 2024).
- [10] Andrew Goodall. *Graph polynomials and Tutte-Grothendieck invariants: an application of elementary finite Fourier analysis*. 2008. arXiv: [0806.4848 \[math.CO\]](#).